普通高等教育“十五”国家级规划教材

电磁场与电磁波

陈抗生

高等教育出版社

策划编辑　刘激扬
责任编辑　吴陈滨
封面设计　王凌波
责任绘图　朱　静
版式设计　胡志萍
责任校对　王效珍
责任印制

内容提要

《电磁场与电磁波》是普通高等教育“十五”国家级规划教材。本书对电磁场与电磁波的分析研究按先交变场后静态场并以交变场为主的体系进行。对交变场的讨论微波与光波并重，并从传输线理论入门。传输线模型作为分析电磁波传播的一种有效方法贯穿全书。全书共13章。第1章作为研究电磁场与电磁波必要的数学物理准备；第2章传输线理论；第3章到第5章是电磁场与电磁波理论的基础部分，包括麦克斯韦方程、平面波以及介质交界面对波的反射、折射；第6、7、8章分别为波导、谐振器、天线；第9章为波动专题；第10、11两章为静电场与恒定磁场；最后两章为波导系统的等效网络分析及网络参数的数值模拟。

本书可作为电子信息类专业本科生“电磁场与电磁波”课程教材，同时可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/陈抗生. —北京：高等教育出版社，2003.11

ISBN 7-04-013020-3

Ⅰ.电… Ⅱ.陈… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教材②电磁波-高等学校-教材 Ⅳ.O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第080672号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
开　　本	787×960　1/16	版　　次	年　月第1版
印　　张	41	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	770 000	定　　价	46.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

序

科学技术的飞速发展，市场对人才新的需求，促成了新一轮教学改革高潮的兴起，课程改革是一个重要方面。

近半个世纪，电子信息科学与技术的发展充满生机，新的研究领域一个接着一个。从20世纪50～60年代的真空电子学、60～70年代的固体电子学，到70～80年代计算机，90年代后互联网，进入21世纪又关注硅以后的技术，但电磁场与电磁波作为电子信息科学与技术基础课的地位没有变，只是随着新领域的不断涌现教学的侧重点有所变化。根据当前以及今后一段时期内电子信息科学与技术发展中涉及的电磁问题，编写适合本科生教学的电磁场与电磁波教材是放在电磁工作者面前的一项重要任务。陈抗生同志基于多年从事电磁场与电磁波教学与科研的经验，撰写了电磁场与电磁波教材，在这方面进行了有益而成功的尝试，值得庆贺。

选择先交变场后静态场并以交变场为主的教材体系，很有见地。人们对事物的认识有两个途径，一是从特殊到一般，二是从一般到特殊。对于十分成熟的电磁科学，从一般到特殊，直接从麦克斯韦方程讲授电磁运动规律，使读者从较高的起点认识电磁问题，这是可行的，也利于缩短教学时数。从传输线理论步入麦克斯韦方程组，对于已有一定电路基础的读者，这个途径很好。

电磁理论的研究，当所研究对象的尺度比波长小得多时，可以采用路的方法，而与波长可比拟甚至比波长大得多时，就要用场的方法。路是场的特例。传输线理论兼有路和场两者的特点。传输线理论，尤其是圆图在微波技术发展史上具有里程碑式的意义。作者对场与波问题的阐述，将传输线模型作为分析场与波的一种有效方法贯穿全书，运用自如，这在现有电磁场与电磁波教材中不多见。

微波与光波都是电磁波，人们对光波的研究比微波早得多，但微波一开始就与应用结合，其发展速度比光波快得多，且更成熟。20世纪70年代后由于光纤通信与光存贮技术的进步，光波的发展进入一个新的阶段。21世纪光波与微波将发展得同样强大。由于历史发展的原因，以往微波与光学分属两个学科，将两者紧密结合的电磁场与电磁波教材还不多。陈抗生同志撰写的教材，微波与光波并重，反映了新世纪微波与光波技术的发展，力求将两者在统一的框架下进行分析处理，也较成功。

将电磁场与电磁波基本原理、概念的讲解与应用结合，且举例力求与读者

日常经历、今后可能从事的工作领域结合，这是提高读者学习积极性的好方法。

电磁场与电磁波涉及数学较多，教师感到难教，学生感到难学，怎么解决这个问题，教材是关键。陈抗生同志撰写的电磁场与电磁波教材颇有特色，我为此书的完稿与出版深感庆幸。我衷心希望有电磁教学与科研经历的专家、学者都来关心这个问题，期望国内有更多的各种风格与特色的优秀电磁场与电磁波教材问世。

2003 年 3 月于中国电子科技大学

前　言

世间运动最快的物质是电磁波，当今社会绝大部分信息都是通过电磁波这个载体传播的。正因如此，在电子信息类专业本科生知识结构中，电磁运动规律及其应用占有十分重要的地位。

随着信息科学技术的进步，尤其是以互联网技术为代表的网络与通信技术的飞速发展，电子信息类专业对电磁场与电磁波类课程提出了新的要求。本书作者所在的浙江大学信息与电子工程系从1999年起对原电磁场与电磁波类三门课程——“电磁场理论(含天线)”(周学时3.5)、“微波与光导波技术”(周学时3)、“电磁波实验”(周学时1)进行综合改革，要求在总学时不增加的前提下，根据电磁科学与技术的最新进展提高课程起点，适当提高课程的深度，拓展课程的广度；增开与应用结合的新课，同时提高实验水平。为此，我们将原“电磁场理论(含天线)”以及“微波与光导波技术”两门课有机地组合成一门课“电磁场与电磁波”(周学时4)，并开设“射频与微波电路及其设计”(周学时2.5)新课，“电磁波实验”课周学时数不变，但测量技术提高到基于网络参数的测量，并增加微带电路的实验。对“电磁场与电磁波”课程的要求是：授课时数要压缩，基础要加强，深度要提高，内容涵盖要宽，要反映现代电磁理论与应用的最新进展，在保持电磁理论系统性、严密性的同时，强调与应用结合。本书正是在这一课程改革背景下的产物。

根据上述课程改革的要求，精选教学内容是关键之一。从信息科学技术的发展以及市场对电子信息工程技术人才的要求出发，本书微波与光波并重，主要针对通信、网络、雷达、导航、遥感、集成电路与集成光路、加热与能量传输、控制和记录以及生物电磁学等领域涉及的电磁问题精选教学内容。教材体系也作了大胆改革，对电磁理论的讲解直接从麦克斯韦方程组开始，先交变场后静态场，并以交变场为主。静态场作为交变场的特例，以角频率 $\omega=0$ 给出。对于交变场的讲授，微波与光波并重，并力求将两者在统一的框架下进行分析处理。对于先交变场后静态场的教材体系，有些人有疑虑。作者从1999年起已连续在4届本科生中按新体系讲授“电磁场与电磁波”，其中静态场的规律作为交变场的特例，主要安排学生自学。实践的结果是学生不仅能接受，而且收到较好的效果。

按什么思路组织教材，这是本书编写又一关键问题。为使已熟悉电路的读者很自然地过渡到从场与波的角度看电磁问题，本书从第1章给出必要的物

理、数学准备后，第 2 章就进入传输线基本理论。本书对传输线理论给予较多关注，一是因为传输线理论在解决电磁工程问题中得到广泛应用；二是根据传输线理论建立起来的关于波的传播、反射和阻抗匹配等概念对其后理解电磁波的传播，波遇到不均匀处的反射、折射，及其在多层介质中以至各类波导中的传播都十分有益。本书不仅从麦克斯韦方程出发导出将场问题化为路问题——波传播的传输线模型，而且在此基础上将电磁波传播的问题尽可能地统一到传输线模型框架下进行分析，使本书内容有机地组织起来。导波结构的传输线模型是本书分析电磁问题的特色，其优点是便于将复杂的场问题简化为工程技术人员熟悉的路的问题。

与应用结合是本书编写中考虑的又一重要问题。针对通信与网络等主要应用精选教学内容是其一；举例与读者日常经历结合，与其感兴趣的或今后可能从事的工作领域相关联是其二。因此，与电磁场、电磁波相关的各类信号处理器件与系统(如微波通信系统与雷达等)以及诸如静电复印机、静电喷涂、离子推进器、磁记录和硅微机械等都结合相关原理作为应用例子给出。

本书共分 13 章，第 1 章为引言——波与矢量分析，这是学习与研究电磁场与电磁波必要的物理、数学准备，旨在使不同基础的读者能在同一起点上进入麦克斯韦方程，研究电磁问题。因此第 1 章讲授时数将随学生基础而异。第 2 章传输线基本理论与圆图，这一章的重要性不仅在于其应用的广泛性，也因为其后本书对导波问题的分析尽可能地简化到传输线问题，而圆图作为分析计算传输线的工具在微波发展史上具有里程碑式的意义。第 3 章麦克斯韦方程，这是支配电磁运动的基本方程，是全书分析电磁场与电磁波的出发点。第 4 章均匀平面波，这是无界均匀媒质中电磁运动的最基本形式，并可用传输线等效。第 5 章研究介质交界面对平面的反射和透射，这是研究不均匀介质中电磁波传播的基本问题，并用传输线模型分析多层介质中稳态与瞬态两种情况下波的传播。第 6 章波导，研究导引电磁波，重点研究柱形金属波导、平板介质波导、光纤中电磁波的传输。第 7 章谐振器，它是储存电磁能的元件。传输线模型、横向谐振是研究波导、谐振器的有效方法。第 8 章天线，研究电磁波的辐射与接收。第 9 章波动专题，重点是各向异性介质中波的传播。第 10、11 两章讨论静电场、恒定电场与恒定磁场，是作为交变场 $\omega=0$ 的特例引入的。第 12 章波导器件及其等效网络分析，将各类波导元件当作一个黑盒子，从外部特性描述各类波导元件。第 13 章讨论电磁问题的数值模拟，这一章作为数值求解电磁问题的导引。

根据作者在浙江大学的教学实践，本书作为教材可以满足不同类型的教学要求。如果 18 周为一个学期(包括复习考试)，周学时为 3，可选第 1 到第 7 章或第 1 到第 5 章与第 8、9 章。如果周学时为 4，可选第 1 到第 9 章。如果周学

时为5~6，全书基本上都可安排在课内讲授。以上3种类型的教学安排，第10、11两章均作为交变场的特例简略提及，主要安排自学。如果有电磁场与电磁波类后继课，第12章可与后继课结合。作者所在浙江大学信息电子工程系，将第12章与后续课“射频与微波电路及其设计”结合。第13章亦可作为专题研究参考资料供学生自学。本书也可作为非电磁场与微波技术专业研究生的教材，周学时为3。

配合本书的电子版阅读材料可从本课程网站（http://EITS.zju.edu.cn/EM01）下载。电子版阅读材料分章列出，内容丰富多彩，且随时更新。从电磁波发展历史的趣事，到电磁场与电磁波的最新研究进展都有涉及，有帮助理解难点的多媒体教学软件以及电磁场数值模拟及射频微波电路设计的应用软件，更多的则是指导读者做电磁场与电磁波专题研究的参考材料。

中国科学院院士刘盛纲教授在百忙中为本书作序，这是对本书出版的莫大支持。上海大学李英教授审阅了全书，并提出许多宝贵意见。作者在此特向刘盛纲院士、李英教授表示衷心的感谢。

美国麻省理工学院孔金瓯教授等撰写的“Applied Electromagnetism”一书对本书先交变场后静态场教材体系的确定影响很大。美国纽约理工大学彭松村教授（近年在台湾新竹交大）的研究成果在本书中引用，作者特向他们致谢。本书撰写过程中得到浙江大学周文教授、李志能教授、黄达诠教授和倪光正教授等的关心与支持，章献民教授、冉立新副教授、郑史烈博士、谢银芳高级工程师、盛法生副教授、李文杨副教授和朱一心讲师在本书撰写与使用本书初稿过程中提出许多宝贵意见，郑国武、陈红胜等多名研究生的成果在本书中得到应用，使用本书初稿的同学指出初稿中许多不足，作者也在此一并致谢。

感谢浙江大学教务部、浙江大学信息电子工程系为本书撰写提供各种便利与支持。

全书由王锴波小姐打印，在此表示谢意。

陈抗生

2003年1月

符 号 表

符号	含义
$\boldsymbol{A}$	A 矩阵
A	安培
$\boldsymbol{A}$	矢量位
A_e	天线有效面积
$\boldsymbol{B}$	磁通量密度（磁感应强度）
B	电纳
b	归一化电纳
C	库仑
c	真空中光速（3×10^8 m/s）
$\boldsymbol{D}$	电通量密度（电位移）
dB	分贝
$\boldsymbol{E}$	电场强度
e	自然对数的底
e	电子电荷
F	法拉
$\boldsymbol{F}$	力
f	频率
G	电导
G	天线增益
g	加速度
G_D	天线方向性
Hz	赫兹
I	电流
$\boldsymbol{J}$	电流密度
j	$\sqrt{-1}$
$\boldsymbol{k}$	波矢
k	传播常数，波数
L	电感
l	长度，曲线
dl	线元
d$\boldsymbol{l}$	线元矢量
$\boldsymbol{m}$	磁矩
m	米
N	牛顿
N	奈贝
$\boldsymbol{n}_0$	法线方向单位矢量
p	功率
$\boldsymbol{p}$	电矩
Q，q	电荷
Q	品质因数
R	电阻
r	归一化电阻
$\boldsymbol{S}$	坡印廷矢量
S	面积
d$\boldsymbol{S}$	面元矢量
dS	面元
T	温度
T	透射系数
T	时间周期
V	电压
v	速度
V	体积
dV	体积元
Wb	韦伯
W	能量
w	能量密度
X	电抗
x	归一化电抗
Y	导纳
y	归一化导纳

Z 阻抗
z 归一化阻抗
$\boldsymbol{Z}$ $\boldsymbol{Z}$ 矩阵
$\boldsymbol{Y}$ $\boldsymbol{Y}$ 矩阵
$\boldsymbol{S}$ $\boldsymbol{S}$ 矩阵
$\boldsymbol{T}$ $\boldsymbol{T}$ 矩阵
∇ 梯度算符
α 波导纵向传播常数的虚部
β 波导纵向传播常数的实部
β 耦合度
γ 旋磁比
δ δ 函数
δ 穿透深度
δ 介质损耗角
ε 介电常数(电容率)
η 波阻抗
η 效率
η_0 自由空间波阻抗(377 Ω)
θ 角度
θ_b 布儒斯特角
θ_B 波束宽度
θ_c 临界角
κ 等效传输线传播常数
λ 波长
λ 本征值
λ_c 临界波长(截止波长)
λ_g 导波波长
μ 磁导率
π 圆周率
ρ 电荷密度
ρ 驻波系数
(ρ, φ, z) 圆柱坐标系
(r, θ, φ) 球坐标系
σ 电导率
σ 雷达截面
Φ 标量位
Φ 电位
χ 极化率或磁化率
ω 角频率
ψ 标量函数
Γ 反射系数
Ω 立体角
Ω 欧姆

目　录

第1章　引言——波与矢量分析

本章简要介绍电磁场与电磁波的基本概念，波动的基本特征及其复数表示，以及有关矢量分析与场论的基本概念与定理。1.1节以通信网为例说明本书的主要研究内容；1.2、1.3节以及1.4节简要回顾电磁场与电磁波的基本概念、波动的基本特征以及波的复数表示；1.5节介绍电磁波谱；1.6节扼要提及本书要用到的矢量分析与场论的基本概念与定理；1.7节为常用正交坐标系；最后1.8节讨论电流与电荷分布的模型。本章从物理和数学两个方面为学习和研究麦克斯韦方程作必要的准备。

1.1　概述

本书的主题是电磁场与电磁波，主要研究基本电磁现象及其工程应用，包括静态场(不随时间变化)和时变场(随时间变化)两种情况。本书重点研究时变场，因为诸如微波与光通信、雷达、导航、遥感等应用系统以及高速微电子学、生物电磁学等与时变电磁场的关系极为密切。

作为时变场的一个典型工程应用实例，让我们观察一下图1－1所示的通信网系统。该系统包括卫星通信、光纤通信、陆上微波中继接力通信和蜂窝移动通信等子系统。图1－1中与高速公路并行的是光纤干线网的一部分，其速率正在向每秒几百千兆比特甚至上千千兆比特目标前进。沿高速公路行驶的车辆，通过宏蜂窝移动通信系统与光纤主干网连接，而如机场、车站等通信密集场所，通过微蜂窝移动通信系统连到光纤主干网，更大范围内的移动通信则利用卫星通信系统。轨道上的卫星经卫星地面站与地面通信网连接。地面通信网通过光纤主干网连起来，语音、图像和数据等媒体通过该通信网畅通无阻地传输。

图1－1所示通信网涉及的以下几部分将在本书中讨论：

- 电磁波经过大气(包括自由空间)的传输；
- 电磁波遇到不同介质交界面的反射、折射；
- 天线发送、接收电磁波的原理与设计；
- 电磁波沿微带线、同轴线、矩形波导、光纤等导波结构的定向传播；
- 以波导为基础的各类信号处理器件的原理及其等效网络表示。

除了以上几个问题，本书首先给出支配电磁运动的基本方程——麦克斯韦

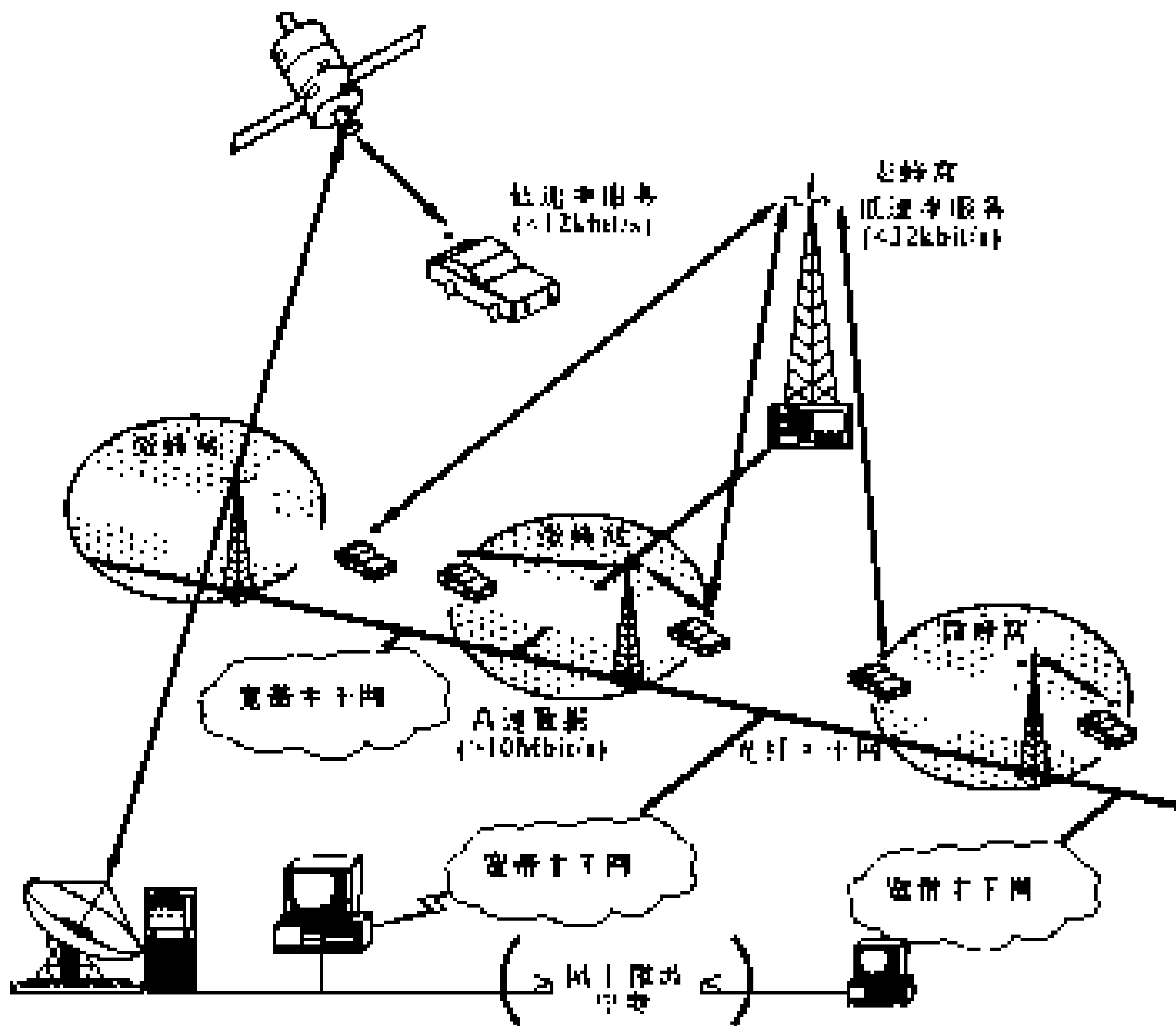


图 1－1 通信网系统

方程组以及反映场与物质相互作用的洛伦兹力方程，并在此基础上进一步阐述电磁场的几个基本原理与定理。

本书侧重时变电磁场的研究，静态场作为时变场的特例给出。

电磁波传播的传输线模型将复杂的场问题简化为路问题，是分析电磁问题的一种行之有效的方法。所以本书第 2 章对传输线理论进行较为深入的研究。本书最后还对波导信息处理器件的等效网络表示以及电磁场的数值模拟作了介绍。

1.2 电磁场与电磁波的基本概念

1.2.1 电场强度 *E* 与电通量密度 *D*

现代物理学告诉我们，任何带电质点之间存在电磁力，这种力在以原子、分子为代表的微观系统中起主要作用。电磁力包括电力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}$ 和磁力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{m}}$。1785

年库仑通过实验总结出两点电荷间作用力(见图 1－2)为

$$F_{e21}=\boldsymbol{r}_{12_0}\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2} \qquad (1.2.1)$$

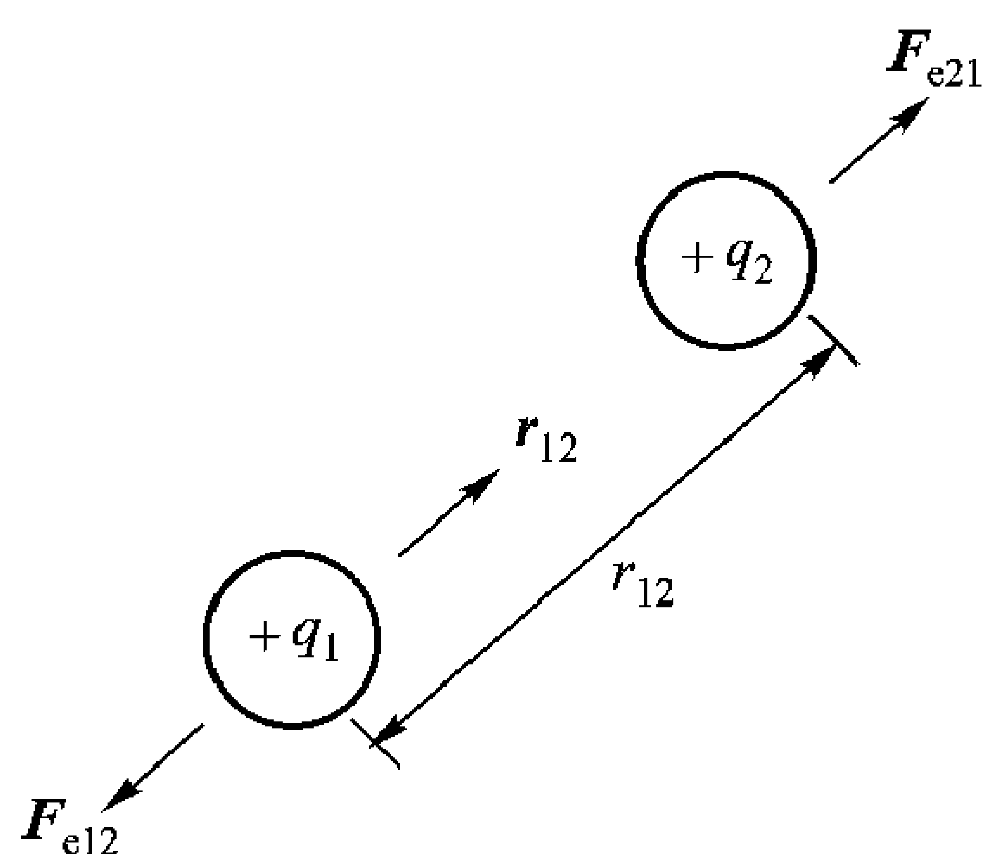


图 1－2　自由空间带正电的两点电荷间的作用力

这就是著名的库仑定理。式中 F_{e21}表示点电荷 q_1 作用于点电荷 q_2 的力，单位是牛顿(N)，q_1、q_2 为两点电荷带的电荷量，用库仑(C)做单位。一个电子所带电荷量的大小 e 为

$$e=1.6\times10^{-19}\ \mathrm{C}$$

r_{12}为两点电荷间距离，用米(m)做单位，$\boldsymbol{r}_{12_0}$是从 q_1 指向 q_2 的单位矢量。ε_0 是一普适常数，称为自由空间介电常数(或自由空间电容率)。自由空间相当于真空，故 ε_0 又称为真空介电常数或真空电容率[$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$法拉每米(F/m)]。点电荷 q_2 作用于点电荷 q_1 的力 $\boldsymbol{F}_{e12}$与 $\boldsymbol{F}_{e21}$大小相等,方向相反,即

$$\boldsymbol{F}_{e12}=-\boldsymbol{F}_{e21}$$

库仑定理告诉我们:

● 相同极性电荷之间的力是斥力,不同极性电荷之间的力是吸力,两者方向相反;

● 两点电荷之间作用力方向在两点电荷的连线上;

● 两点电荷之间作用力大小与两点电荷电量的乘积成正比,与两点电荷间距离的平方成反比。

式(1.2.1)表示的库仑力与质量为 m_1、m_2 两物体间的引力 $\boldsymbol{F}_{g21}$相似，为

$$\boldsymbol{F}_{g21}=-\boldsymbol{r}_{12_0}\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2} \qquad (1.2.2)$$

式中 r_{12}为两物体质心间距，G 为普适引力常数。但也有明显的区别：产生引力的源是质量 m，而产生电力的源是电荷 q；电荷有正负极性，而质量没有这种性质。

地球对任一质量为 m 的物体的作用力(重力)可认为是地球产生的重力场 g 对 m 的作用，而

$$\boldsymbol{g}=-\boldsymbol{r}_0\frac{GM}{r^2} \qquad (1.2.3)$$

式中 M 为地球的质量，$-\boldsymbol{r}_0$为指向地球地心的单位矢量，r 是质量为 m 的物体的质心到地球地心的距离。

与此类似，置于自由空间中的点电荷 Q 对另一点电荷 q 的作用可认为是

点电荷 Q 在其周围产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 对另一点电荷 q 的作用。而点电荷 Q 产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}_0 \tag{1.2.4}$$

$\boldsymbol{E}$ 叫做电场强度，其单位为伏特每米(V/m)。式中 $\boldsymbol{r}_0$ 是以点电荷 Q 所在点为球心的径向单位矢量，而 r 为所观察点到 Q 的距离。点电荷 $+Q$ 产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 的图解示于图 1-3 (a)。

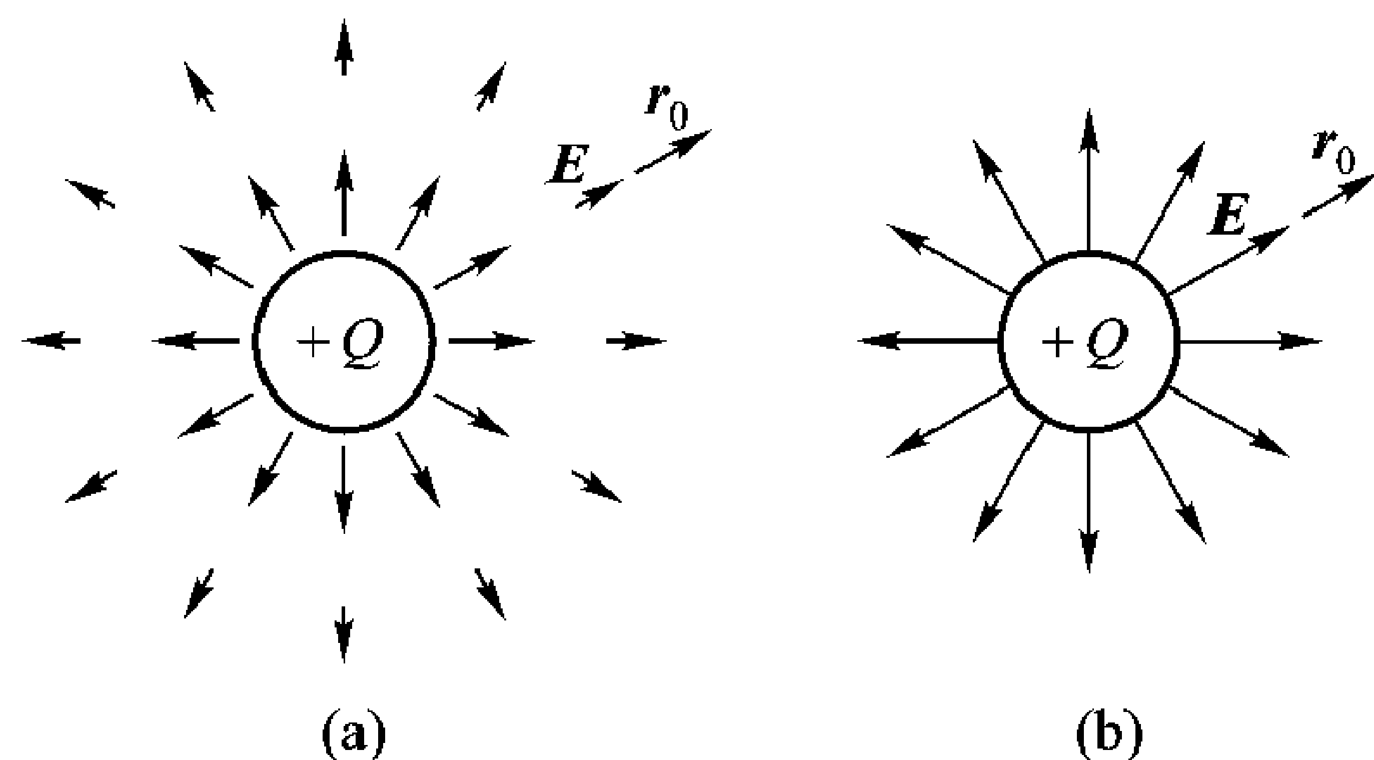


图 1-3　点电荷 $+Q$ 产生的电场和电场线图

(a) 点电荷 $+Q$ 产生的电场　(b) 点电荷 $+Q$ 产生的电场线图

由式(1.2.4)可见，点电荷 Q 产生的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是矢量，它是空间坐标 r 的函数。空间任一点单位试验正电荷受力的方向即电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向，受力的大小即电场 $\boldsymbol{E}$ 的大小。电场 $\boldsymbol{E}$ 在空间的分布可用电场线图解表示。电场线上任一点的切线方向表示该点电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向，而穿过垂直于电场线方向单位面积的电场线数就表示该点电场强度。正电荷 Q 产生的电场线示于图 1-3 (b)。

电荷产生的电场满足叠加原理，即 n 个点电荷在空间某点产生的电场为每个点电荷在该点产生的电场的矢量和。相距为 d 的两点电荷 q、$-q$ 组成的系统(当 d 很小时)叫做电偶极子[见图 1-4 (a)]。

电偶极子用电矩 $\boldsymbol{p}$ 表示，有

$$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{d} \tag{1.2.5}$$

$\boldsymbol{d}$ 的方向由负电荷指向正电荷。

按照叠加原理，电偶极子产生的场就是两个点电荷产生场的叠加，其图解示于图 1-4 (b)。注意，电场线总是从正电荷出发终止于负电荷。

前面讨论的都是将点电荷置于自由空间或真空中的情况。现在我们考察一下，如果将一个正电荷 q 放在介质中将会发生什么？我们知道任何物质都由分子、原子组成，原子又由带正电的核和围绕核带负电的电子云构成。原子中核带的正电荷数与电子云带的负电荷数刚好相等，所以一般情况下原子所带净电荷为零，即呈电中性。没有外加电场时，介质中不会有电场。如果将正电荷

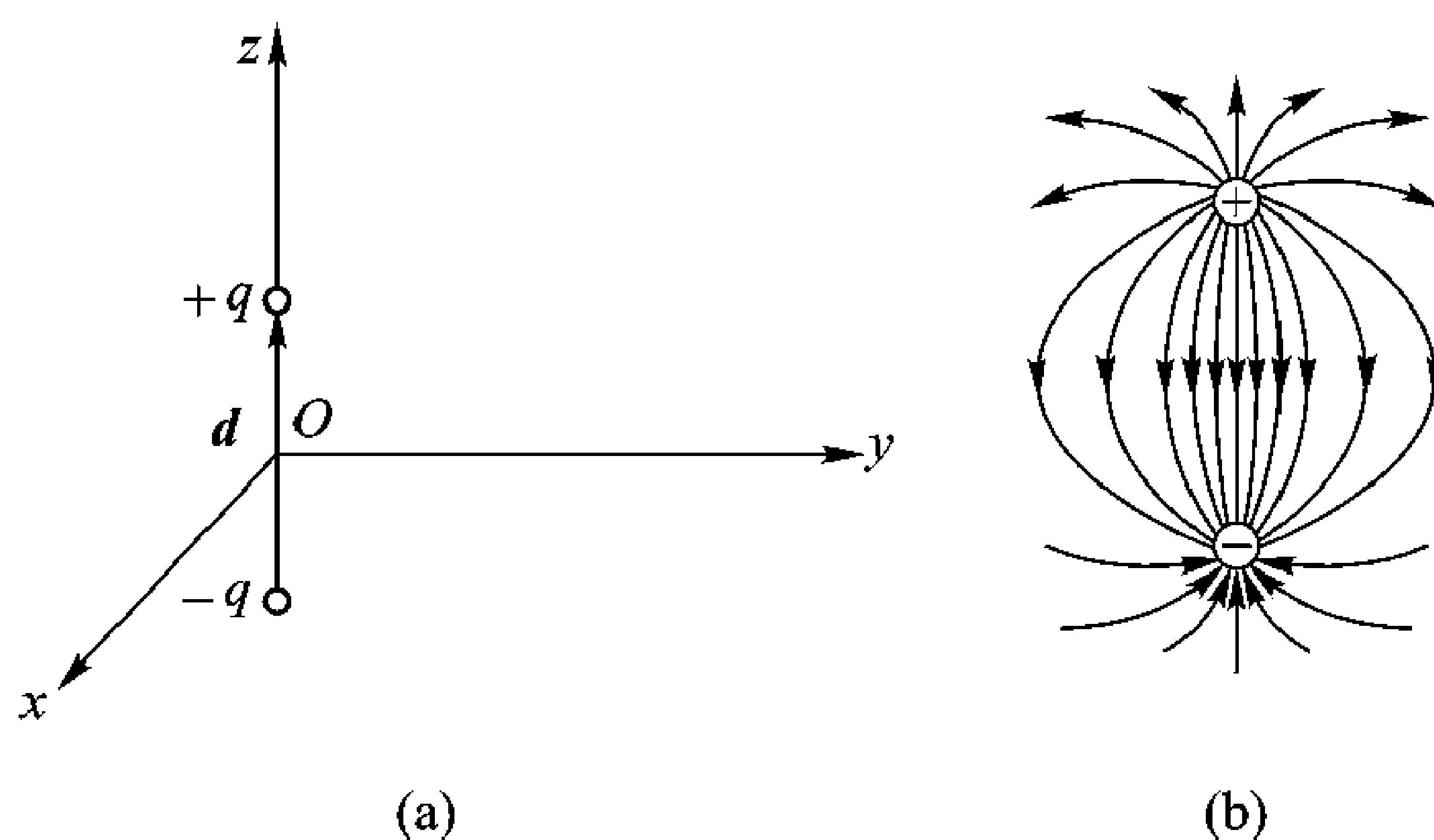


图 1－4　电偶极子及其产生的电场线的图解

(a) 电偶极子　(b) 电偶极子产生的电场线图

q 放到介质中，如图 1－5，在点电荷 q 产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 的作用下，原子中电子云的对称中心相对于核有所移位，使原子的一端正电荷较多，另一端负电荷较多，如同一个电偶极子。电偶极子趋向于按电场方向排列。这个过程叫做介质的极化。这时介质中总的电场就包括两部分：没有介质时点电荷 q 产生的电场以及因介质极化而致的诸多偶极子 $\boldsymbol{p}$ 产生的电场。总的场与介质特性有关，其表示式为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{r}_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{1.2.6}$$

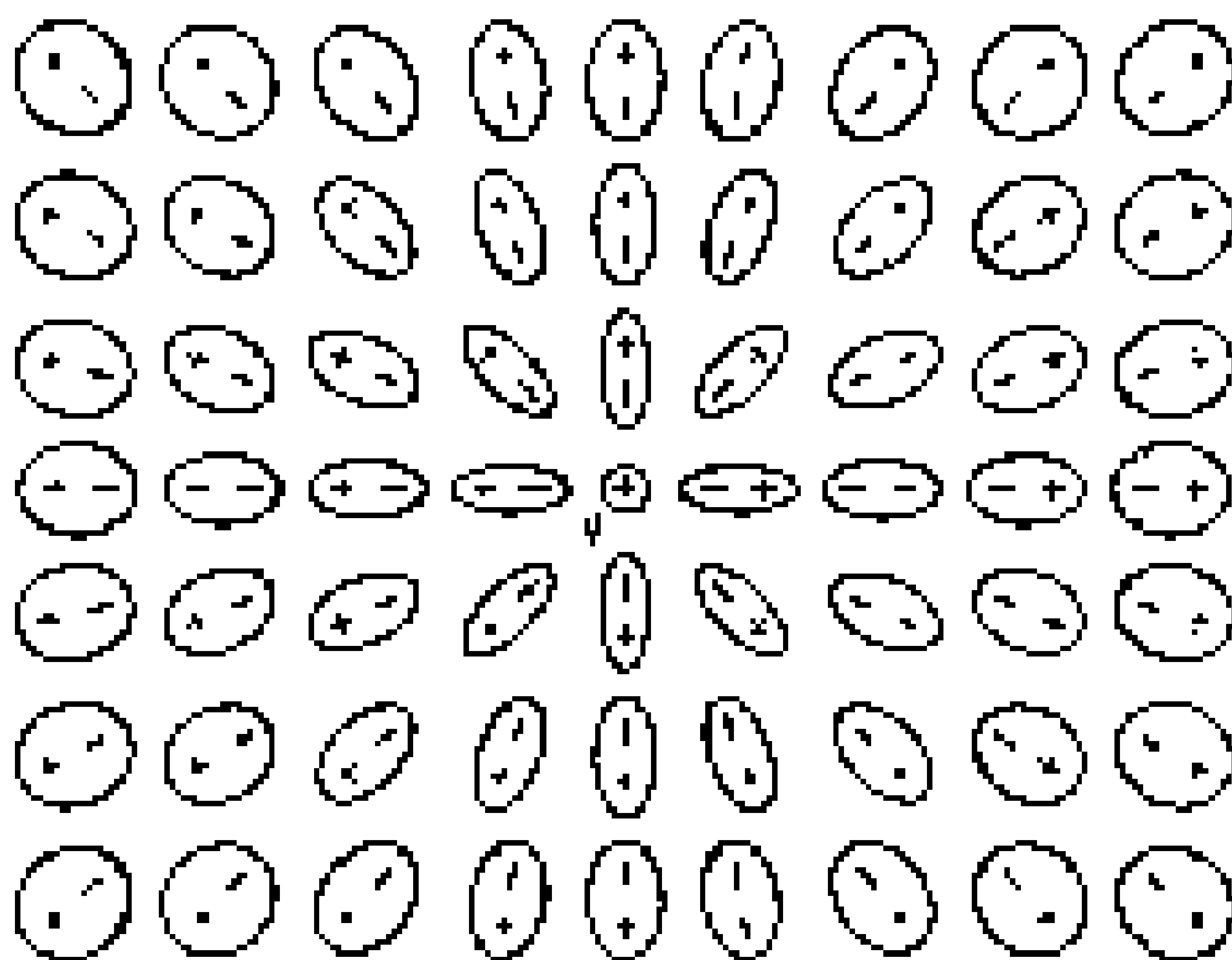


图 1－5　正电荷 q 产生的场使介质原子极化

$\boldsymbol{E}$ 的单位为 V/m。ε 叫做介质的介电常数(或电容率)，通常表示为

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \tag{1.2.7}$$

其单位为 F/m。式中 ε_r为量纲为一的量，叫做介质的相对介电常数(或介质相对电容率)。ε_r一般大于1。真空中 $\varepsilon_r=1$。空气中 $\varepsilon_r=1.0006$。常用介质材料的 ε_r值见本书最后的附录4。

除了电场强度 $\boldsymbol{E}$，以后我们还经常用到另一个与 $\boldsymbol{E}$ 相关的矢量 $\boldsymbol{D}$，叫做电通量密度或电位移，它与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系由介质特性决定：

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{1.2.8}$$

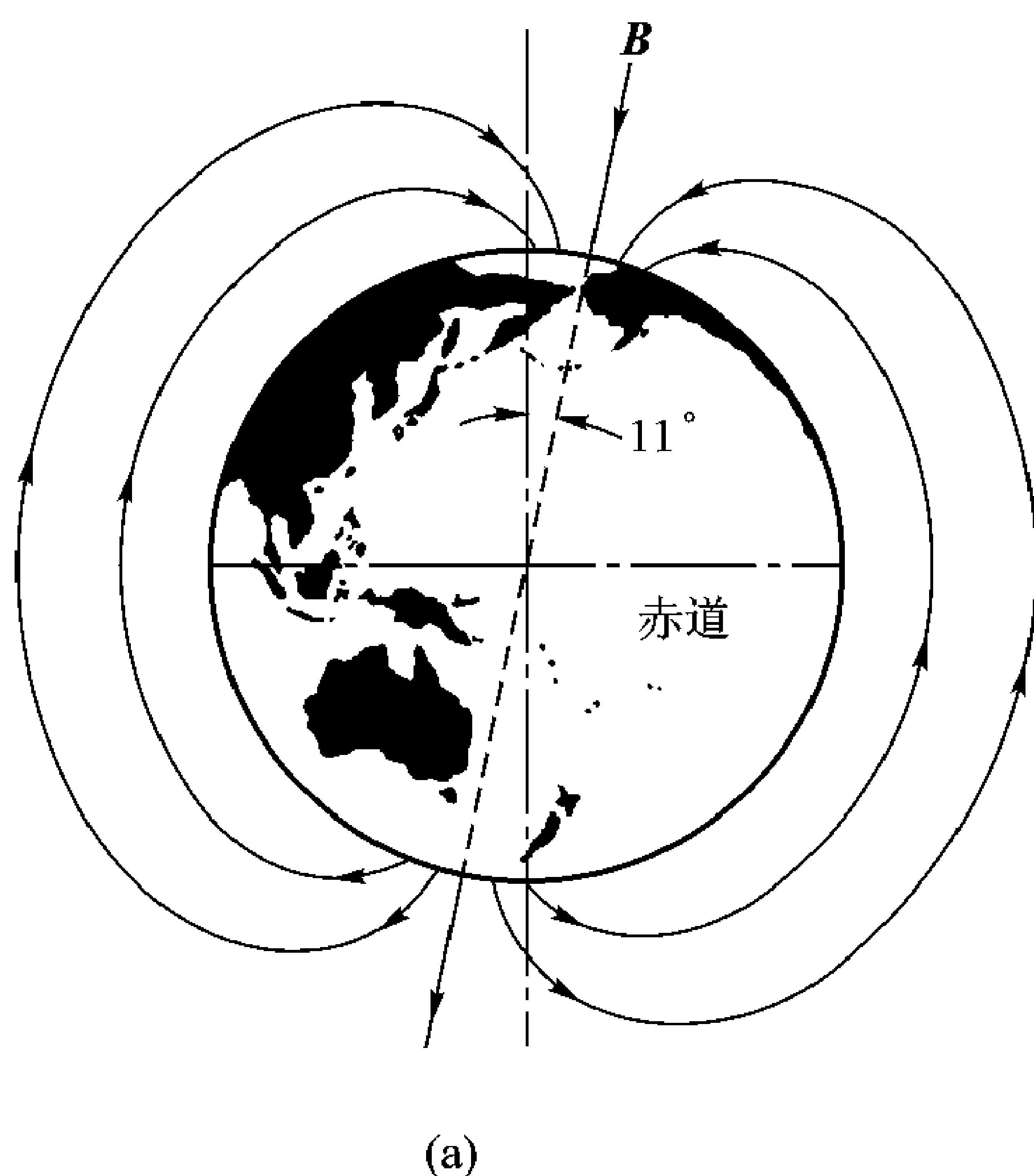
$\boldsymbol{D}$ 的单位是库仑每平方米(C/m^2)。

$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 构成了电磁场中最基本的一对特征场量，另一对特征场量是 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$。$\boldsymbol{D}$ 的空间分布可用电力线图解表示，它和电场线的空间分布是一样的，但穿过垂直于电力线方向单位面积的电力线数表示的是该点的电通量密度的大小。

1.2.2 磁通量密度 $\boldsymbol{B}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$

早在公元前2700多年(黄帝时代)，我们的祖先已观察到地球是一个特大的磁体(见图1-6)，在其周围存在磁场，而且任何时候永磁棒的磁矩都指向地磁的北极，由此制造了原始的罗盘，即指南针。

直到19世纪人们对磁现象才有了比较深入的认识。电荷产生电场可用电力线表示，永磁体产生的磁场也可用磁场线表示，如图1-7(a)。任何永磁体南极、北极都是成对出现的，迄今为止还没有发现单独的磁极存在。这与电荷不同，正电荷与负电荷可单独存在。相同极性磁极接近时有斥力，不同极性磁



(a)



(b)

图1-6 地球磁场

(a) 地球磁场 (b) 被确认为早在公元前2700年的黄帝就应用永磁体作罗盘

极接近时有吸力。

如果将一个小磁体加工成可自由转动的磁针，那么磁针所指示方向即磁力线方向，穿过与磁力线垂直的单位面积的磁力线数就表示所观察点的磁通量密度(或磁感应强度)$\boldsymbol{B}$。奥斯特在1819年发现，不仅永磁体可使附近的磁针偏转，在通电导线周围的磁针也会偏转。这就是说通电导线周围有磁场。通电闭合回路产生的磁场，其磁力线与永磁体产生的磁力线很相似[见图1-7(b)]。当通电闭合回路的直径很小时，这种闭合环形电流称为磁偶极子。

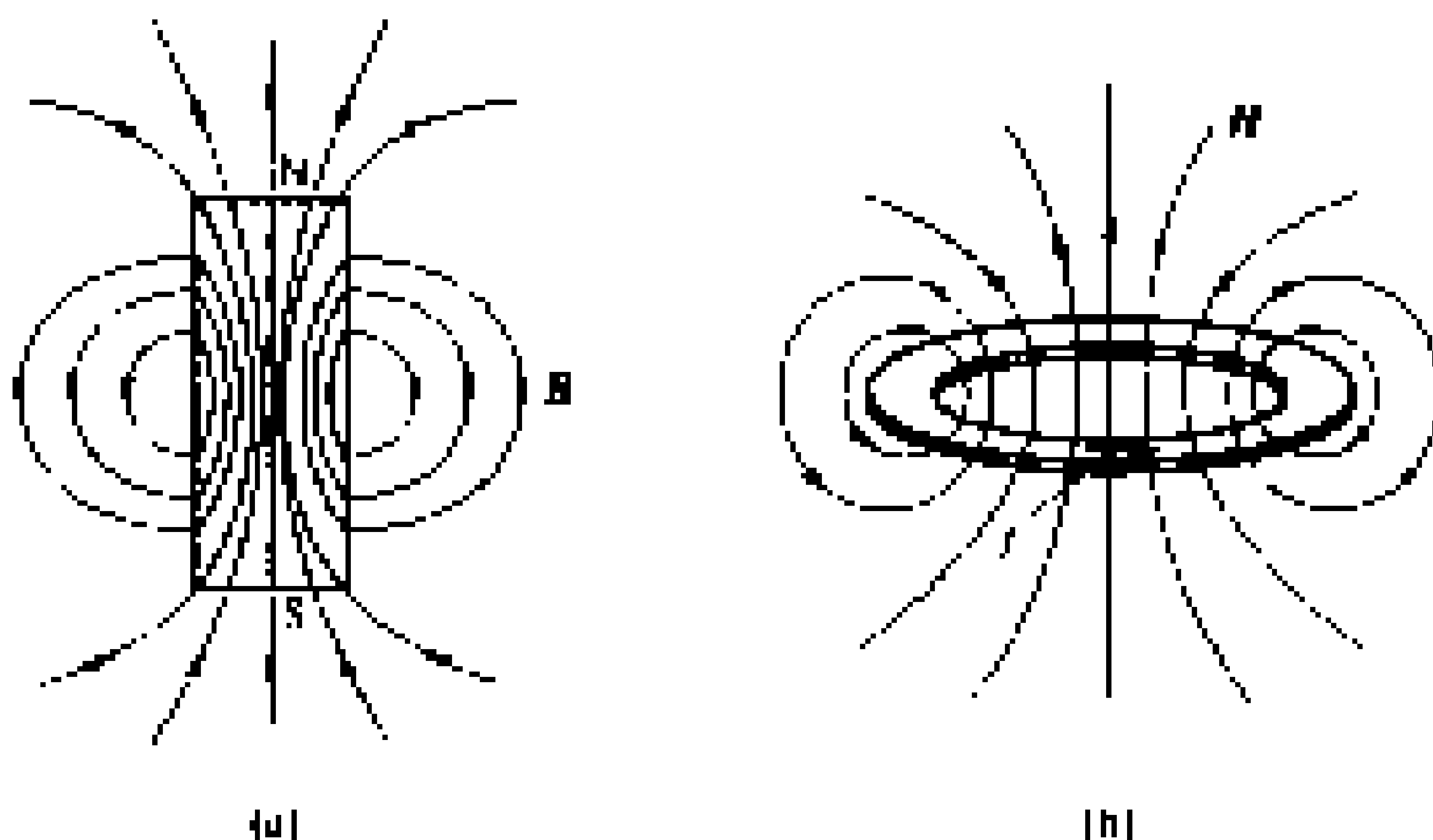


图1-7　永磁体与磁偶极子

(a) 永磁体及其产生的磁力线　(b) 磁偶极子及其产生的磁力线

电流通过无限长直导线产生的磁场见图1-8。如果右手大拇指指向与电流方向一致，那么右手四指方向即磁力线方向，磁力线形成闭合回路。电流与磁场的这种关系叫做右手螺旋关系。

无限长直导线周围产生的磁通量密度$\boldsymbol{B}$与所观察点的空间位置及电流的关系为

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \tag{1.2.9}$$

$\boldsymbol{B}$的单位为韦伯每平方米(Wb/m^2)，I是流过导线的电流，单位是安培(A)，ρ为所观察点到导线的径向距离，单位为米(m)，$\boldsymbol{\varphi}_0$是角向(或圆周方向)单位矢量，它表示磁通量密度的方向，μ_0是一个常数，叫做自由空间或真空磁导率，$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$亨每米(H/m)，与真空介电常数$\varepsilon_0$对应。以后将证明，$\varepsilon_0$、$\mu_0$定义了真空中光速$c$为

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s} \tag{1.2.10}$$

对于间距为 d 的两平行直导线(如图 1－9)，当两导线上电流同方向时，两导线相互吸引，即两导线受到吸引力；而当两导线上电流方向相反时，两导线相互排斥，即两导线受到排斥力。通电导线间的这种作用力可作如下解释：根据式(1.2.9)，导线 1 在其周围产生磁场 $\boldsymbol{B}$，通过 $\boldsymbol{B}$ 作用于导线 2，其作用力 $\boldsymbol{F}_{m21}$为

$$\boldsymbol{F}_{m21} = I_2 \boldsymbol{I}_0 \times \boldsymbol{B} \tag{1.2.11}$$

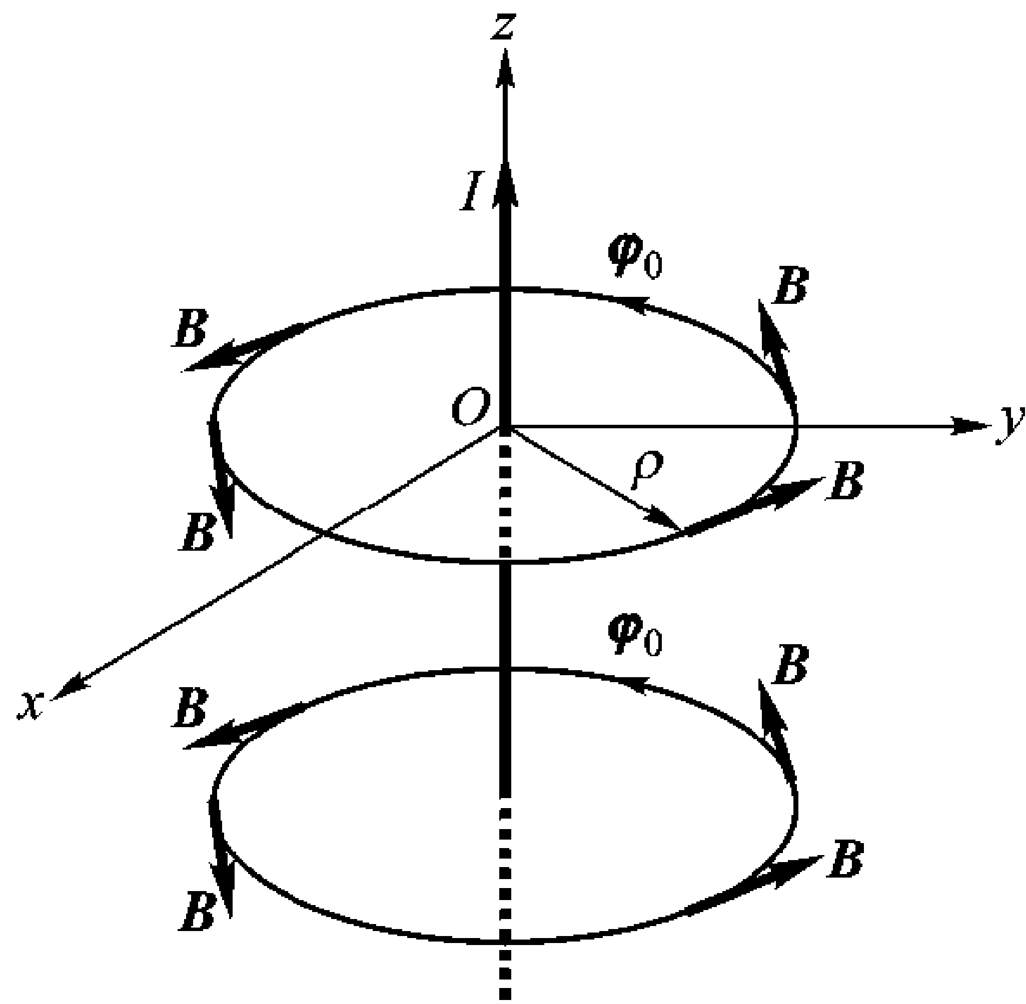


图 1－8　z 方向恒定电流产生的磁场

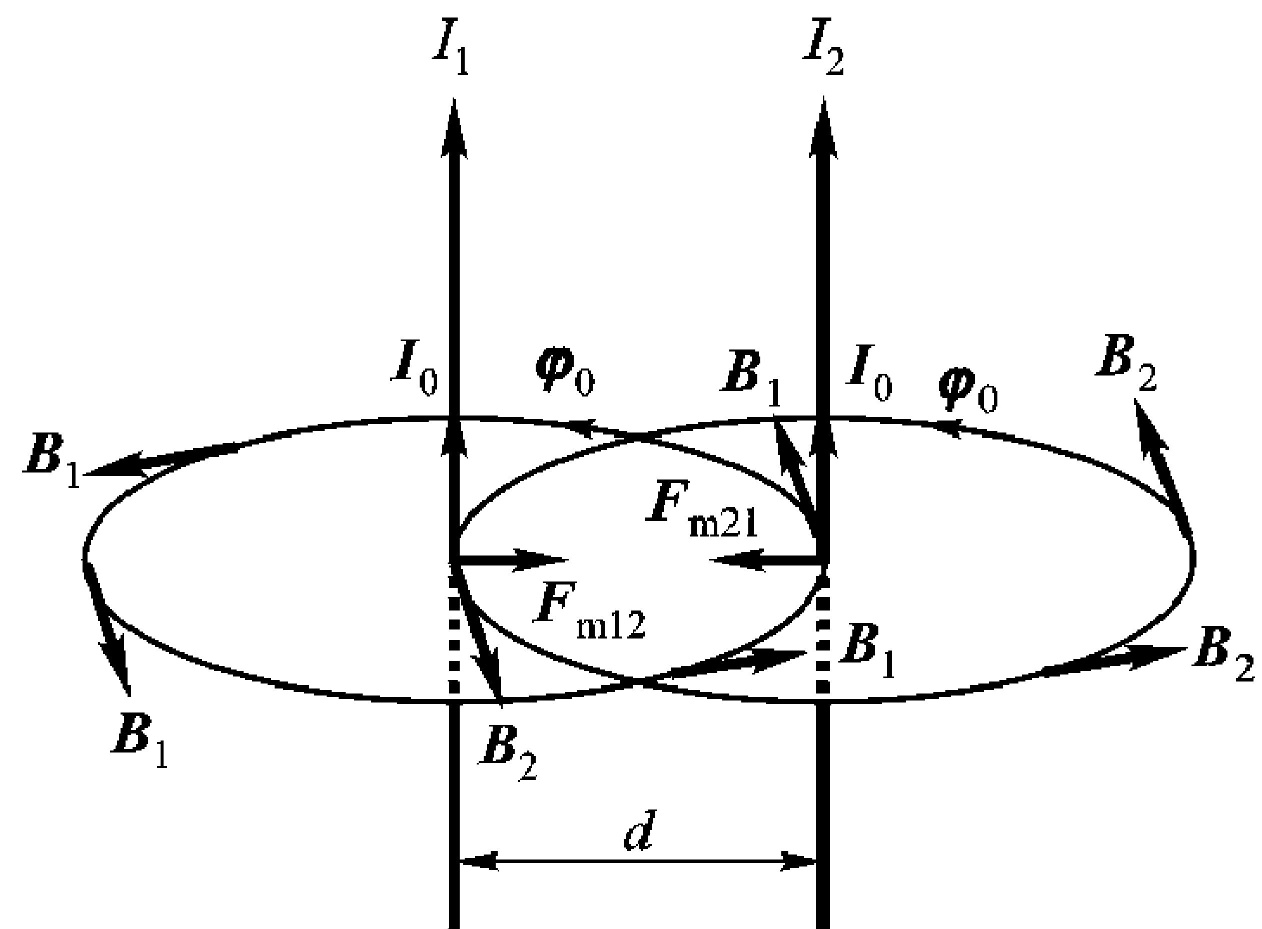


图 1－9　两个通电并行直导线

$\boldsymbol{I}_0$为导线 2 电流方向的单位矢量。由式(1.2.9)和式(1.2.11)，结合图 1－9 可见，流过导线 1 的电流 I_1 在导线 2 产生的磁场 $\boldsymbol{B}$，按右手螺旋关系，从纸面进去。当导线 1 与导线 2 上电流同方向时，($\boldsymbol{I}_0 \times \boldsymbol{B}$)指向导线 1。同样，流过导线 2 的电流 I_2 产生的磁场作用于导线 1 的力指向导线 2，所以两导线受到的是吸力。反之，当导线 1、2 上电流反向时，两导线间就受到斥力。

下面考察将通电直导线置于介质中的情况。物质由原子组成，原子中有绕核旋转的电子，电子本身还有自旋。无论是电子的绕核旋转还是自旋，其结果相当于一个产生磁场的环形电流，类似于一个小磁体。因此，介质可以看成是由无限多小磁体组成的。由于绕核旋转电子以及自旋电子取向的随机性，无限多小磁体的排列也是随机的，它们产生的磁场相互抵消，介质中不会有净的磁场。当通电导线置于介质中时，在通电导线产生的磁场 $\boldsymbol{B}$ 的作用下，构成介质的无限多小磁体将按磁力线方向有序排列，这时无限多小磁体产生的磁场彼此不会完全抵消，而有净的磁场产生。这种现象叫做介质的磁化。通电导线置于介质中时，除了介质不存在时通电导线产生的磁场外，还有在通电导线产生的磁场感应下，构成介质的无限多小磁体有序排列所产生的净磁场。合成磁场的大小与介质的特性有关，通电导线在介质中产生的总的磁场的表达式为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\varphi}_0\frac{\mu I}{2\pi\rho} \tag{1.2.12}$$

式中

$$\mu=\mu_r\mu_0 \tag{1.2.13}$$

μ 称为介质的磁导率，μ_r是量纲为一的量，称为介质的相对磁导率，反映介质的磁特性。对于大多数介质，$\mu_r\approx 1$，$\mu_r\gg 1$ 的介质叫铁磁性介质。常用铁磁介质的相对磁导率见本书后面的附录 4。

前面已讨论过，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 是描述电磁场的一对场量，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 就是与此对应的另一对场量，$\boldsymbol{H}$ 叫作磁场强度，单位是安每米(A/m)，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的关系是

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{1.2.14}$$

介质中光速 v 由 ε、μ 决定

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \tag{1.2.15}$$

单位为 m/s，c 为真空中光速。

电偶极子、磁偶极子也是一组对应物理量。电偶极子用电矩 $\boldsymbol{p}$ 表示，磁偶极子可用磁矩 $\boldsymbol{m}$ 表示，有

$$\boldsymbol{m}=IS\boldsymbol{z}_0 \tag{1.2.16}$$

I 是圆环上电流，单位是 A，S 是圆环包围的面积，单位为平方米(m^2)。单位矢量 $\boldsymbol{z}_0$方向这样确定：如果右手四指顺电流方向，大拇指方向就是 $\boldsymbol{z}_0$方向。

1.2.3 静电场、恒定磁场与时变场

电场 $\boldsymbol{E}$ 由电荷 q 产生，而磁场 $\boldsymbol{H}$ 由电流 $I=\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ 产生，因为 q 与 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ 是独立变量，所以只要电流是常数，电荷产生的电场与电流产生的磁场彼此独立。为了说明这一点，可以以恒速运动的荷电粒子束形成的直流电流的一个小段为例。这一小段电荷产生的电场由这一小段包含的电荷量 q 决定，但恒定电流产生的磁场只与电流 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ 有关，而与 q 无关。在运动的荷电粒子多、速度慢与荷电粒子少、速度快两种情况下可以得到相同的电流 I，即产生相同的磁场，但在两种情况下产生的电场不同。

不随时间变化的电荷产生的电场称为静电场，不随时间变化的电流(以后称为恒定电流)产生的磁场为恒定磁场，因为 q 与 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ 是独立的，所以静电场和恒定磁场彼此也是独立的。静电场与恒定磁场统称为静态场。

与静态场相对应的是动态场，其特点是场随时间变化，亦称时变场或交变场。当电荷密度和电流随时间变化时就产生交变场。还回到前面的例子，如果 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ 随时间变化，那么在给定荷电粒子束的一小段其电荷量也随时间变化，反过来也是一样。当电子束的一小段包含的电荷量(即电荷密度)随时间变化，

其电流 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ 也随时间变化。在这种情况下，电场和磁场耦合在一起，彼此不再独立。实验证明，随时间变化的电场产生磁场，而随时间变化的磁场产生电场。表1-1总结了静电场、恒定磁场、交变场的存在条件及相关场量。

表1-1　静电场、恒定磁场、交变场的存在条件及相关场量

	条　件	场　量
静电场	静止电荷 $(\partial q/\partial t=0)$	电场强度 $\boldsymbol{E}$ (V/m) 电通量密度 $\boldsymbol{D}$ (C/m^2)，$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$
恒定磁场	恒定电流 $(\partial I/\partial t=0)$	磁通量密度 $\boldsymbol{B}$ (Wb/m^2) 磁场强度 $\boldsymbol{H}$ (A/m)，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$
交变场	随时间变化的电流 $(\partial I/\partial t\neq 0)$	$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{H}$； $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{D})$与$(\boldsymbol{B},\boldsymbol{H})$耦合在一起

1.2.4　介质的电磁特性

表示介质的电磁特性除了介电常数 ε、磁导率 μ 两个参数外，还有第三个参数就是电导率 σ，它的单位是西门子每米(S/m)。电导率 σ 大，电荷在介质中很容易移动，电导率 σ 小，电荷在介质中很难移动。如果 $\sigma=0$，电荷在介质中移动不可能超过一个原子距离。我们把这种介质叫做完纯介质。如果 $\sigma=\infty$，电荷可在介质中自由移动，这种介质叫做完纯导体。引入电导率 σ 这个参量后，介质中电流密度 $\boldsymbol{J}_c$与所加电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$\boldsymbol{J}_c=\sigma\boldsymbol{E} \tag{1.2.17}$$

$\boldsymbol{J}_c$的单位是安每平方米(A/m^2)，这就是我们熟知的欧姆定律的另一种表达形式。

1.2.5　电磁波

前面我们从电荷之间、电流之间作用力出发简要描述了电磁场的特性。电磁力还有一个极为重要的性质，即使产生电磁力的源，电荷或电流，在原子尺度内，不管源在自由空间还是在介质中，其作用(或影响)能以电磁波的形式向外传播，而电磁波运动的速度就是光速。电磁波是世间运动最快的物质，这就是现代信息传递用电磁波作载体的根本原因。

通过下面的实验可以帮助我们理解电磁场与电磁波的客观性。微波炉现已成为普通的家用电器。微波炉中的磁控管将50 Hz的市电转变为2 450 MHz的高频电磁振荡，此电磁振荡耦合到盛食物的空腔中，腔中的食物就被加热。现

取 100 W 白炽灯放到盛有水的玻璃烧杯中，白炽灯的螺口金属部分要浸没在水中[见图 1－10(a)]，然后将玻璃烧杯连同白炽灯一起放入微波炉[见图 1－10(b)]。开启微波炉，白炽灯的灯丝会发亮。如果微波炉输出功率过大而将灯丝烧断，灯丝还能发光。这是因为磁控管耦合到微波炉空腔的交变电磁场，会在灯丝表面感应起高频电流，正是此高频电流在灯丝表面的欧姆损耗使灯丝发热，以致发光。白炽灯接入 50 Hz 的市电网时，因为市电频率低，灯丝横截面都有电流流过，灯丝断了，电流不能构成回路，就没有电流流通，灯丝不会发光。白炽灯放入微波炉中，灯丝表面电流由微波炉空腔中高频电磁场激励，电流可在灯丝表面形成回路，因此即使灯丝断了，灯丝还能炽热发光。本实验表明，电磁场具有能量。

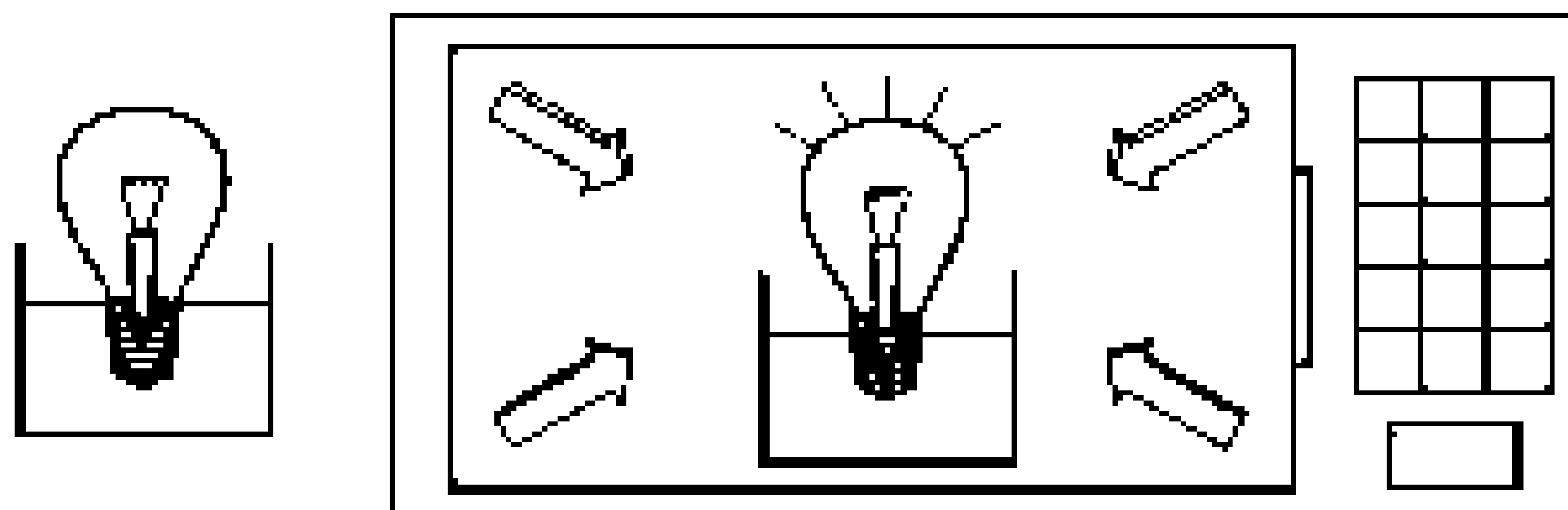


图 1－10　微波炉

(a) 白炽灯置于盛水的玻璃烧杯中　(b) 微波炉中高频场使白炽灯发光

波是物质运动的一种基本形式，波动的基本特征对于我们理解电磁波十分重要。下一节讨论波动基本特征。

1.3　波动特征

波是物质运动的一种基本形式。如图 1－11 (a)所示，当我们手携绳子一端对其扰动(使绳子一端质点上下振动)，此扰动就沿绳子传播出去。这种波叫做一维波，因为手对于绳子的扰动限于空间一个坐标轴的方向，可以用一个空间坐标变量描述。当我们向平静的水池中投入一颗小石子，就会看到以小石子落入水面这一点为中心有一圈一圈的波纹传播出去[如图 1－11 (b)]，这种波叫做二维波，因为此时平静水面质点扰动要用两个空间坐标变量描述。对于三维波，其扰动就要用空间 3 个坐标变量描述。三维波的几个特例，光平面波及其通过长缝激励的柱面波示于图 1－11 (c)，球面波示于图 1－11 (d)。

我们熟悉的这些波有以下几个共同点：

- 运动的波带有能量。

● 波从一点传播到另一点有时间延迟，即波以一定速度传播。光波速度最快，真空中光近似以 3×10^8 m/s 传播，而声波速度慢得多，约 330 m/s。

● 有些波，如电磁波和声波，具有线性特征。所谓线性，即一个波的传播并不影响另一个波的传播。如两个人交谈，一个人声带振动发出的声波并不影响另一个人发出的声波传播。两个声波相遇，其总的波只是两个波的简单叠加。

波有瞬态波和随时间作简谐变化的连续波之分。前者作为波源的扰动局限于一个很短的时间内，而后者为连续的简谐振荡源激励。两种波本书都讨论，但以连续波为主。因为根据傅里叶变换，瞬态波可以分解为无限多不同频率随时间作简谐变化的连续波分量的叠加。

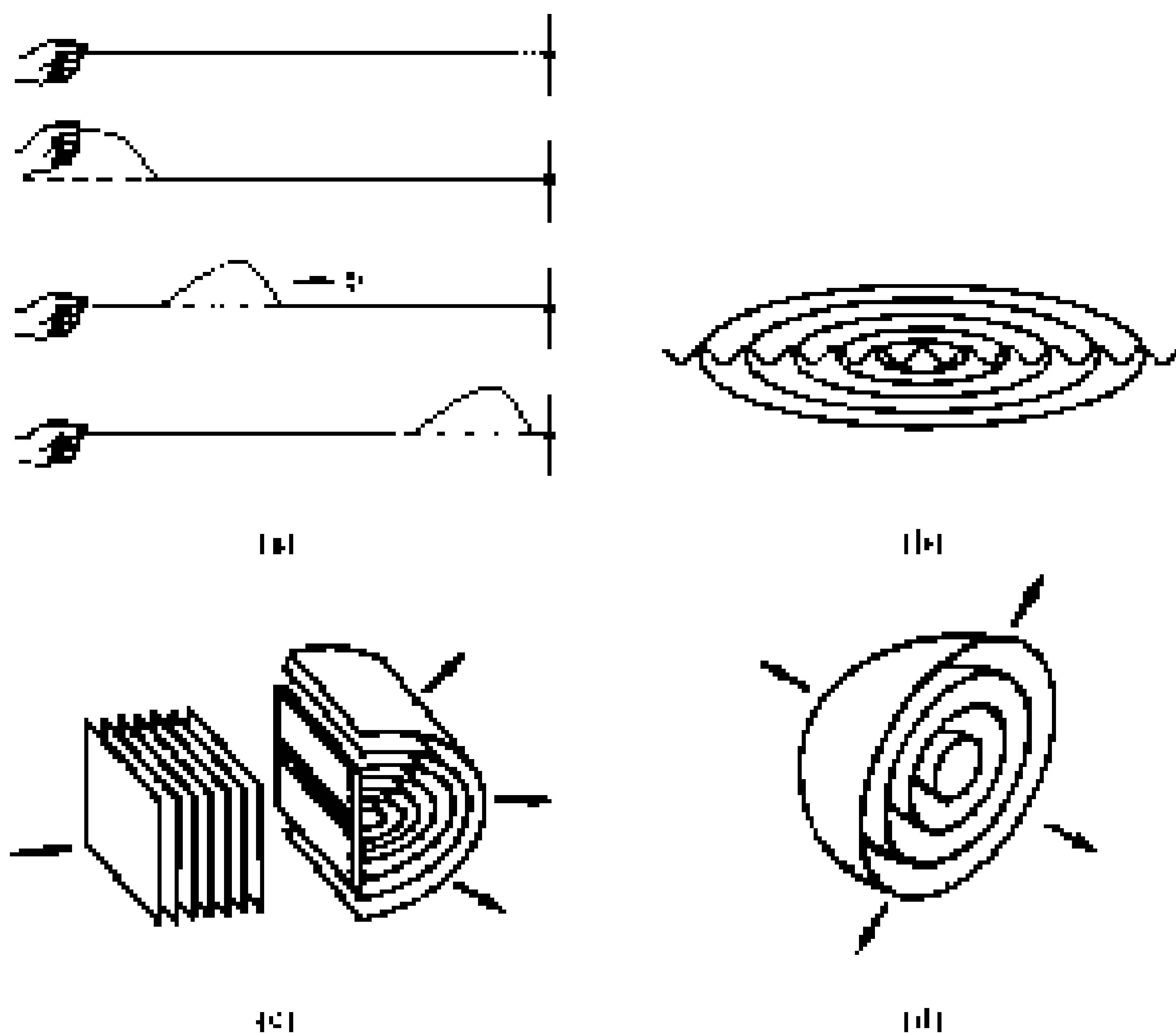


图 1－11　波动举例

(a) 沿绳子传播的一维波　(b) 沿水面传播的二维波

(c) 光平面波以及其通过长缝激励的柱面波　(d) 球面波

对于一个随时间作简谐变化的连续波 $A(z,t)$，其数学表达式为

$$A(z,t)=A_0\cos(\omega t-kz+\varphi_0) \tag{1.3.1}$$

波 $A(z,t)$是空间坐标 z 和时间坐标 t 的函数。对于图 1－11 (a)所示的沿绳子运动的机械波，$A(z,t)$表示在任一位置 z、任一时刻 t 绳子质点在与绳垂直方向的位移。式中 A_0 叫做波的振幅，ω 叫作角频率，k 叫做波的传播常数，

也叫空间频率。$\omega t - kz + \varphi_0$ 叫做波的相位，φ_0 叫做波的初相。

为方便起见，在下面分析中假定初相 $\varphi_0 = 0$，即 $A(z, t) = A_0\cos(\omega t - kz)$。可以从两个途径观察式(1.3.1)，先固定于空间某一点，比如 $z = 0$，观察 $A(0, t)$ 随时间的变化。图 1－12 给出 $z = 0$ 点 A 随 t 的变化。

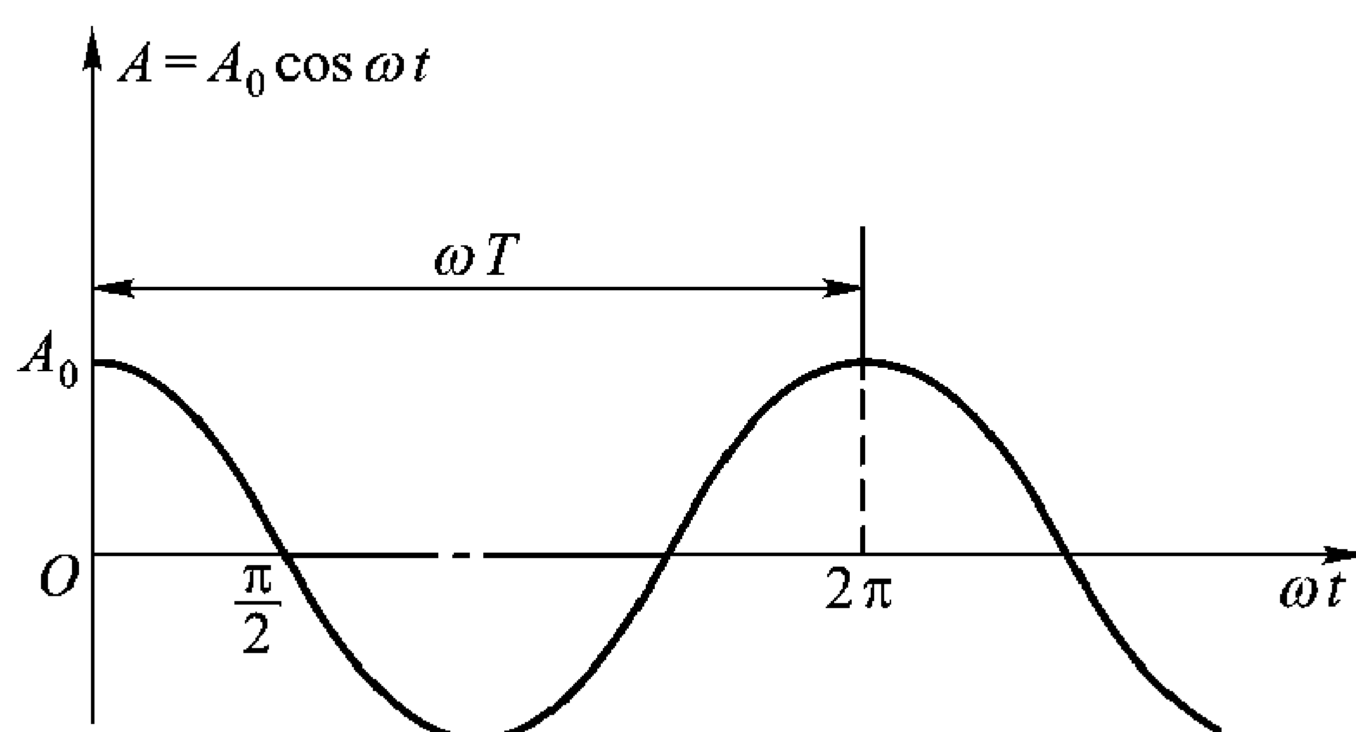


图 1－12 $z = 0$ 处波 $A(0, t)$ 随时间的变化

由图 1－12 可见，A 随 t 作周期变化，相位变化 2π 的时间叫周期 T，即 $\omega T = 2\pi$，所以

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.3.2a}$$

或

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.3.2b}$$

频率 $f = 1/T = \omega/2\pi$，表示每秒振荡的次数，单位用赫兹(Hz)。$\omega = 2\pi f$，称为角频率，单位是弧度每秒(rad/s)。由式(1.3.2b)可知，ω 表示 2π 时间长度内包含的时间周期数。然后固定时间 t，观察 A 随 z 的变化，图 1－13 给出 $\omega t = 0$，$\omega t = \pi/2$，$\omega t = \pi$（或 $t = 0, t = T/4, t = T/2$）3 个时刻 A 随空间 z 的变化。

由图 1－13 可见，A 在 z 方向也是呈周期性变化的，相位变化 2π 的距离叫波长 λ，即 $k\lambda = 2\pi$，由此得到

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{1.3.3a}$$

或

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{1.3.3b}$$

式(1.3.3b)也表示 k 为 2π 距离内包含的波数，或 2π 距离内包含的空间周期数。

比较式(1.3.2b)与式(1.3.3b)可见，空间域中波长 λ、波数 k 与时间域中周期 T、角频率 ω 等价。这就是将 k 也称为空间频率的原因。

由图 1－13 可以清楚地看到一个简谐波沿 $+z$ 方向传播。现在要问波的传播速度是多少？设想一个人站在波峰上，此人随着波峰前进的速度即波的速度，这就要求 $\cos(\omega t - kz)$ 是常数，或者波的相位是常数(即站在波峰上的人所处相位永远不变)：

$$\omega t - kz = 常数$$

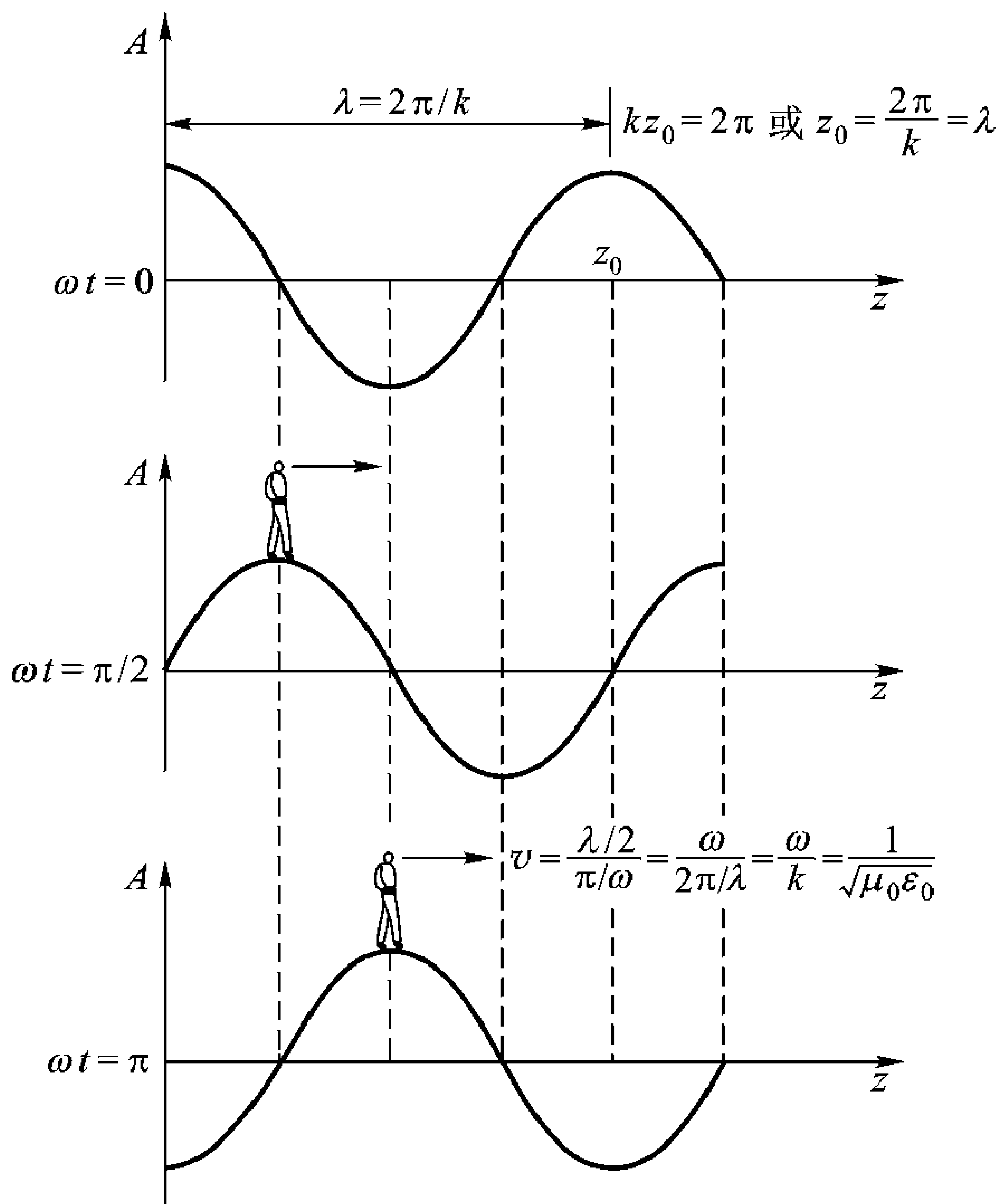


图 1－13　不同时刻 t，波 $A(z,t)$ 随 z 的变化

所以波等相位点传播速度就是

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=v=\frac{\omega}{k} \tag{1.3.4}$$

因为 $\omega=2\pi f$，而 $k=(2\pi)/\lambda$，代入上式，得到 $v=f\lambda$。

在真空中 v 等于光速 c，即

$$c=f\lambda \tag{1.3.5}$$

初相 φ_0 只不过使图 1－12、1－13 波形沿横轴平移一个距离，上面的分析结果对 $\varphi_0\neq0$ 也适用。

显然，如果式(1.3.1)中相位表达式为 $\omega t+kz+\varphi_0$，则表示沿 $-z$ 方向传播的波。

表示波动的两个主要参数，一是角频率 ω，二是传播常数 k。ω 由波源的频率决定。在 ω 给定的情况下，波的特征主要由传播常数 k 表示。由式(1.3.3)、(1.3.4)可见，k 决定了波的波长及波传播的速度。

例 1－1　电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的 x 分量 E_x 表示为

$$E_x=10^{-2}\cos\left(2\pi\times10^{10}t+\frac{2\pi}{0.015}z\right)$$

问：电场 E_x 的振幅、频率、波数、波长各是多少？波沿什么方向传播？波等相位点传播的速度是多少？

解： 振幅

$$|E_x| = 10^{-2}\ \text{V/m},\ \omega = 2\pi\times 10^{10}\ \text{rad/s}$$

所以，波的频率

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi\times 10^{10}}{2\pi} = 10^{10}\ \text{Hz}$$

波数

$$k = \frac{2\pi}{0.015}/\text{m}$$

波长

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\times 0.015}{2\pi} = 0.015\ \text{m}$$

波沿 $-z$ 方向传播。

波等相位点传播的速度

$$v = \omega/k = 1.5\times 10^{8}\ \text{m/s}$$

1.4　时谐标量波的复数表示

1.4.1　用复数“表示”时谐标量波

随时间作简谐变化的电压波可表示成

$$V(z,t) = V_0\cos(\omega t - kz + \varphi_{0v}) = V_0\cos[\omega t + \varphi_v(z)] \tag{1.4.1}$$

$$\varphi_v(z) = -kz + \varphi_{0v}$$

因为 $V(z,t)$ 只有大小，是一个标量，又随时间作简谐变化，故叫做时谐标量波，以跟后面讨论的随时间作简谐变化的矢量波相区别。矢量波不仅有大小，还有方向。

时谐标量波可用复数表示，“表示”的意义是，式(1.4.1)表示的电压波 $V(z,t)$ 与一个复数 V 对应，复数 V 的定义* 是

$$V = V_0 e^{j\varphi_v(z)} = V_0 e^{-j(kz-\varphi_{0v})} \tag{1.4.2}$$

复数 V 的模 $|V| = V_0$，相位 $\varphi_v(z) = -kz + \varphi_{0v}$。

$V(z,t)$ 与 V 对应的意义是，V 乘 $e^{j\omega t}$ 取实部，就得到 $V(z,t)$，即

---

* 这里定义的复数 V，通常叫做相量(phasor)，并用符号 $\tilde{V}$ 或 $\dot{V}$ 表示。本书不用相量这个名称，为简化书写，也不加上标“~”或“•”，请读者留意。

$$V(z,t)=\mathrm{Re}[V\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$
$$=\mathrm{Re}[(V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_v(z)})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$
$$=\mathrm{Re}[(V_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_{0v})})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

式中Re[]表示对[]中的复量取实部运算。为简化书写，符号$\mathrm{Re}[()\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$常略去，用复数 V 等效于时谐标量波 $V(z,t)$，即

$$V(z,t)\longleftrightarrow V=V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_v}=V_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_{0v})} \tag{1.4.3}$$

按此约定的规则，如果

$$U(z,t)=U_0\cos(\omega t-kz+\varphi_{0u})$$

则有如下等效关系

$$U(z,t)\longleftrightarrow U=U_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u},\ \varphi_u=-kz+\varphi_{0u}$$

很容易证明$[V(z,t)+U(z,t)]$与复数$(V+U)$对应，即

$$V(z,t)+U(z,t)\longleftrightarrow V+U \tag{1.4.4}$$

因为

$$V(z,t)+U(z,t)=\mathrm{Re}[(V+U)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

以及

$$\frac{\partial}{\partial t}V(z,t)\longleftrightarrow \mathrm{j}\omega V \tag{1.4.5}$$

$$\int V(z,t)\mathrm{d}t\longleftrightarrow \frac{V}{\mathrm{j}\omega} \tag{1.4.6}$$

因为

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial t}=-\omega V_0\sin(\omega t-kz+\varphi_{0v})=\mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_v}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$\int V(z,t)\mathrm{d}t=\frac{V_0\sin(\omega t-kz+\varphi_{0v})}{\omega}=\mathrm{Re}\left[\frac{V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_v}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{j}\omega}\right]$$

对于随时间变化的量，上式积分中的常数可不予考虑。所以时谐标量波用复数表示后，对时间的微分、积分运算简化为乘与除的代数运算。这种简化问题的分析方法我们在电路原理课程中早已用过。

如果工作频率很低，电路元件 R、L、C 的几何尺寸与波长 λ 相比很小很小，在电路元件占据的空间范围内，$kz=2\pi\frac{z}{\lambda}$随 z 的变化可忽略不计，那么电压波

$$V(z,t)=V_0\cos(\omega t-kz+\varphi_{0v})$$
$$=V_0\cos(\omega t+\varphi_v)=V(t)$$

φ_v 可认为与 z 无关。

现在研究这样的 $V(t)$作用于图 1－14 中的串联 LCR 电路，试求电路中电流 $I(t)$。

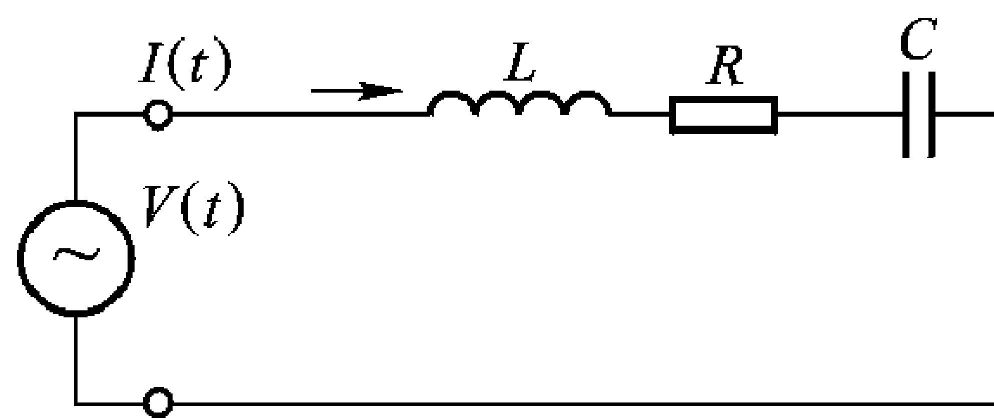


图 1－14　$V(t)$作用于 LCR 回路

式中 L、C、R 分别为回路的电感、电容、电阻。该电路满足的方程为

$$L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}+RI(t)+\frac{\int I(t)\mathrm{d}t}{C}=V(t) \tag{1.4.7}$$

当简谐变化的电压 $V(t)$、$I(t)$用复数表示时，即

$$V(t)\longleftrightarrow V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_v}=V$$

$$I(t)\longleftrightarrow I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}=I$$

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\longleftrightarrow \mathrm{j}\omega I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}=\mathrm{j}\omega I$$

$$\int I(t)\mathrm{d}t\longleftrightarrow \frac{I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}}{\mathrm{j}\omega}=I/\mathrm{j}\omega$$

微分方程(1.4.7)可简化为代数方程

$$\mathrm{j}\omega LI+RI+I/(\mathrm{j}\omega C)=V$$

所以

$$I=V/Z \tag{1.4.8}$$

式中

$$Z=R+\mathrm{j}\omega L+1/(\mathrm{j}\omega C) \tag{1.4.9}$$

而

$$I(t)=\mathrm{Re}[I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}\left[\frac{V_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_v}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{R+\mathrm{j}\omega L+1/(\mathrm{j}\omega C)}\right] \tag{1.4.10}$$

例 1-2 沿导体的电流分布可表示为 z 的函数

$$I(z)=\mathrm{j}21.2\cos kz\ \mathrm{A}$$

频率为 100 MHz，求 $I(z,t)$的表示式。

解：

$$\begin{aligned}I(z,t)&=\mathrm{Re}[I(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\\&=\mathrm{Re}[\mathrm{j}21.2\cos kz\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]\\&=-21.2\cos kz\sin\omega t\end{aligned}$$

式中

$$\omega=2\pi\times10^8\ \mathrm{rad/s}$$

例 1-3 假定 $V(t)=100\cos(120\pi t+60°)$ V，$V(t)$的复数表示是什么？

解： $V=100\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}=(50+\mathrm{j}86.6)$ V

例 1-4 $V(t)=\cos(120\pi t+\pi/3)+\sin(120\pi t)$，$V(t)$的复数表示是什么？

解： $\cos(120\pi t+\pi/3)$的复数表示形式是

$$V_1=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}$$

同样，$\sin(120\pi t)=\cos(120\pi t-\pi/2)$的复数表示式

$$V_2=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}$$

因此 $V(t)$的复数表示形式是

$$V_1 + V_2 = e^{j\pi/3} + e^{-j\pi/2} = (0.5 - j0.134)\ V$$

例 1－5　$V(t) = \cos(120\pi t) + \cos(240\pi t)$的复数表示式是什么？

解： 因为$V(t)$是两个不同频率时谐标量的和，所以$V(t)$的复数表示形式不存在。注意，两个时谐标量的乘积没有相应的对应关系，因为

$$V(z,t) = \cos(\omega t - kz + \pi/3)\sin(\omega t - kz)$$
$$= \frac{1}{2}[\sin(2\omega t - 2kz + \pi/3) - \sin\pi/3]$$

所以$V(z,t)$可分解为一个2ω分量与另一个直流分量$\omega = 0$，不可能用一个复数乘$e^{j\omega t}$再取实部表示。

1.4.2　两时谐标量波乘积的时间平均值

时谐变量的时间平均值总是等于零的，即

$$\langle V(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V_0\cos(\omega t + \varphi_v)\,dt = 0 \tag{1.4.11}$$

式中$T = 1/f = (2\pi)/\omega$表示简谐变化的周期。但是两个时谐变量乘积的平均值并不总是等于零的，例如

$$V(t) = V_0\cos(\omega t + \varphi_v)$$
$$I(t) = I_0\cos(\omega t + \varphi_i)$$
$$\langle V(t)I(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T V_0\cos(\omega t + \varphi_v)I_0\cos(\omega t + \varphi_i)\,dt$$
$$= \frac{1}{2}V_0I_0\cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

与$V(t)$、$I(t)$对应的复数V、I分别为

$$V(t) \longleftrightarrow V = V_0e^{j\varphi_v}$$
$$I(t) \longleftrightarrow I = I_0e^{j\varphi_i}$$

因为

$$\mathrm{Re}[VI^*] = \mathrm{Re}[V_0e^{j\varphi_v}I_0e^{-j\varphi_i}]$$
$$= \mathrm{Re}[V_0I_0e^{j(\varphi_v - \varphi_i)}]$$
$$= V_0I_0\cos(\varphi_v - \varphi_i)$$

所以引入$V(t)$、$I(t)$的复数表示V、I后，$V(t)$与$I(t)$乘积的时间平均值计算可简化为

$$\langle V(t)I(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[VI^*] \tag{1.4.12}$$

我们在电路原理中计算电路功率早已应用式(1.4.12)表示的关系。

1.5 电磁波谱

1.5.1 电磁波谱图

广播电台和电视台发射的无线电波、雷达站发射的微波、可见光、X 射线和 γ 射线都是电磁波，在自由空间，所有这些电磁波都以光速 c（3×10^8 m/s）传播。根据式(1.3.5)，波长 λ 与频率 f 满足下面关系：

$$\lambda=\frac{c}{f}$$

所以电磁波可以用波长或频率区分。频率和波长的变化范围可以覆盖多个数量级，为了简化数字，频率常用千赫、兆赫等表示，波长常用千米、毫米等表示，如表 1－2、1－3 所示。

表 1－2 频率常用单位

名　　称	简　写	与 Hz 关系
千赫（kilohertz）	kHz	10^3
兆赫（megahertz）	MHz	10^6
吉赫（gigahertz）	GHz	10^9
太赫（Terahertz）	THz	10^{12}
皮赫（Petahertz）	pHz	10^{15}

表 1－3 波长常用单位

名　　称	简　写	与 m 关系
千米（kilometre）	km	10^3
毫米（millimetre）	mm	10^{-3}
微米（micrometre or micron）	μm	10^{-6}
纳米（nanometre）	nm	10^{-9}

波长与频率互为倒数关系，工程师习惯于用频率表示波，而科学家习惯于用波长表示波，这个界线已越来越模糊。当波长小于 1 mm（或频率高于 300 GHz）时，倾向于用波长表示波，而波长大于 1 mm（或频率低于 300 GHz）用频率表示波，但微波这个名称有点例外，它的频率一般低于 300 GHz。

理论上电磁波的频率可以从零到无穷大，实际上我们所掌握的电磁波的频率范围是有限的。电磁波可用频率的范围称为电磁波谱，如图 1－15。从图 1－15可见，普通无线电波，包括甚低频（VLF，3 ~ 30 kHz）、低频（LF，30 ~ 300 kHz）、中频（MF，300 ~ 3000 kHz）、高频（HF，3 ~ 30 MHz）、甚高频（VHF，30 ~ 300 MHz），频率从几百 kHz 到 300 MHz。如用波长来称呼时，甚低频、低频、中频、高频、甚高频又叫做超长波、长波、中波、短波、超短波，波长从 10^5 m到 1 m。广义地说，微波是指频率从 300 MHz 到 300 GHz 范围内的电磁波，其相应的波长范围是 1 m 至 1 mm。根据应用上特点，微波又可细分成分米波、厘米波、毫米波，见表 1－4。微波与红外的过渡段称为亚毫米波。光波所指

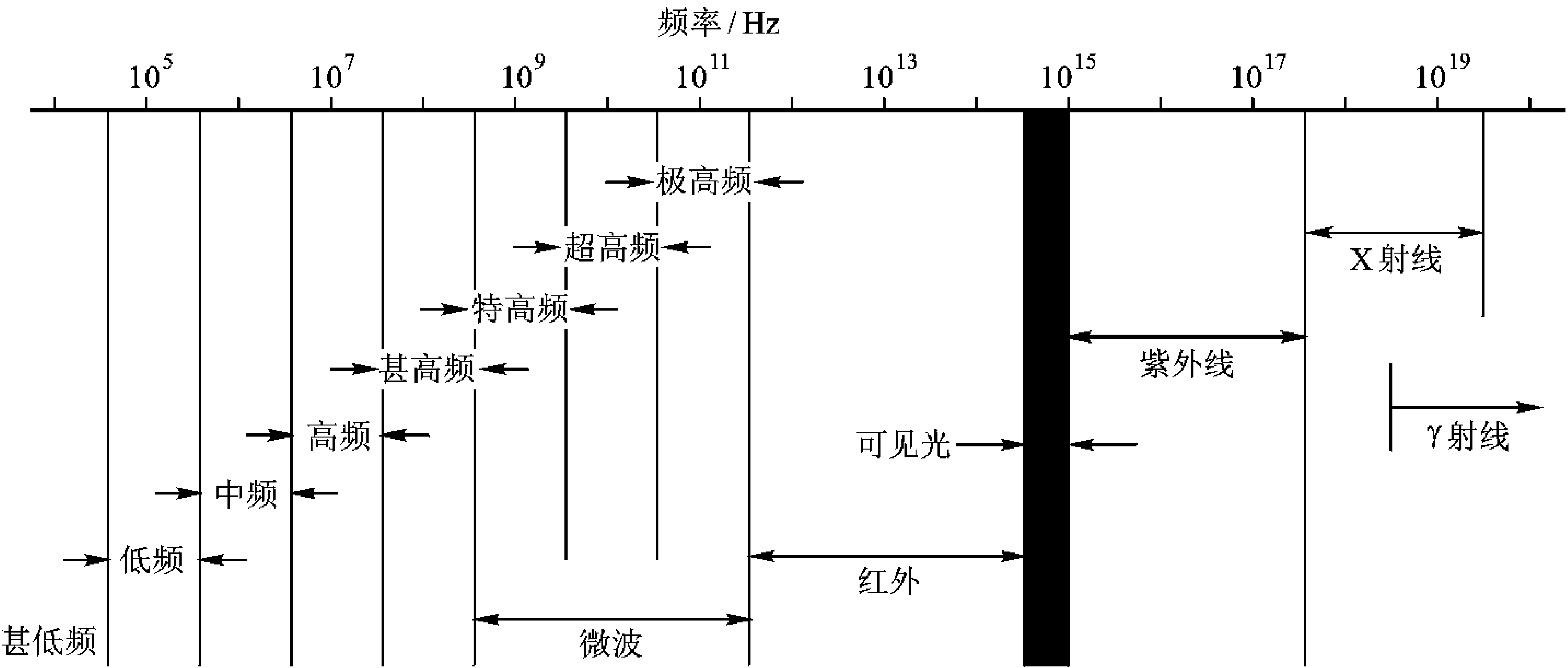


图1-15　电磁波谱图

的频率范围比可见光(380 THz到770 THz)要宽。从现代激光和光学系统应用的频率来看，光波一般是指频率从100 THz到1000 THz这段电磁波谱，相应的波长为3 μm至300 nm。比可见光波长更短的依次是紫外线、X射线、γ射线。

表1-4　微波波段

波长范围	频率范围	波段名称			备注
		按波长	按频率	代号	
10~1 m	30~300 MHz	米波	甚高频	VHF	普通无线电波与微波的过渡
1~0.1 m	300~3000 MHz	分米波	特高频	UHF	微波
0.1~0.01 m	3~30 GHz	厘米波	超高频	SHF	
0.01~0.001 m	30~300 GHz	毫米波	极高频	EHF	
0.001~0.000 01 m	300~30 000 GHz	亚毫米波			微波与红外的过渡

有时用一些特定的字母代表微波中的某一波段，这些代号起源于初期雷达研究的保密需要，后来沿用至今，没有严格和统一的定义。比较通行的代号如表1-5所示。

表1-5　雷达波段代号

波段代号	P	L	S	C	X	K	K_u	Q	V
波段	米波	22 cm	10 cm	5 cm	3 cm	2 cm	1.25 cm	8 mm	4 mm

1.5.2　电磁波大气传输窗口

要实现信号的远距离传输，传输过程中的损耗一定要小。利用接近地球表

面的空间传递信息时，要考虑到大气对电磁波传输的影响。大气对于电磁波，有些频率范围是透明的，称为大气窗口，见图 1－16。第一个较宽的大气窗口覆盖了从射频到厘米波这一段电磁波谱。波长从 10 mm 到 1 mm 也有几个窄的大气窗口。这些大气窗口在通信、雷达和遥感等领域得到广泛应用。在光波段又有一个很宽的大气窗口，其中包括能为人眼感知的可见光窗口。紧靠光波的红外也有很多窄的窗口。由于大气中微粒（如很小的水滴、尘埃）散射引起的损耗，光波通过大气的传输只能在短距离上得到应用。

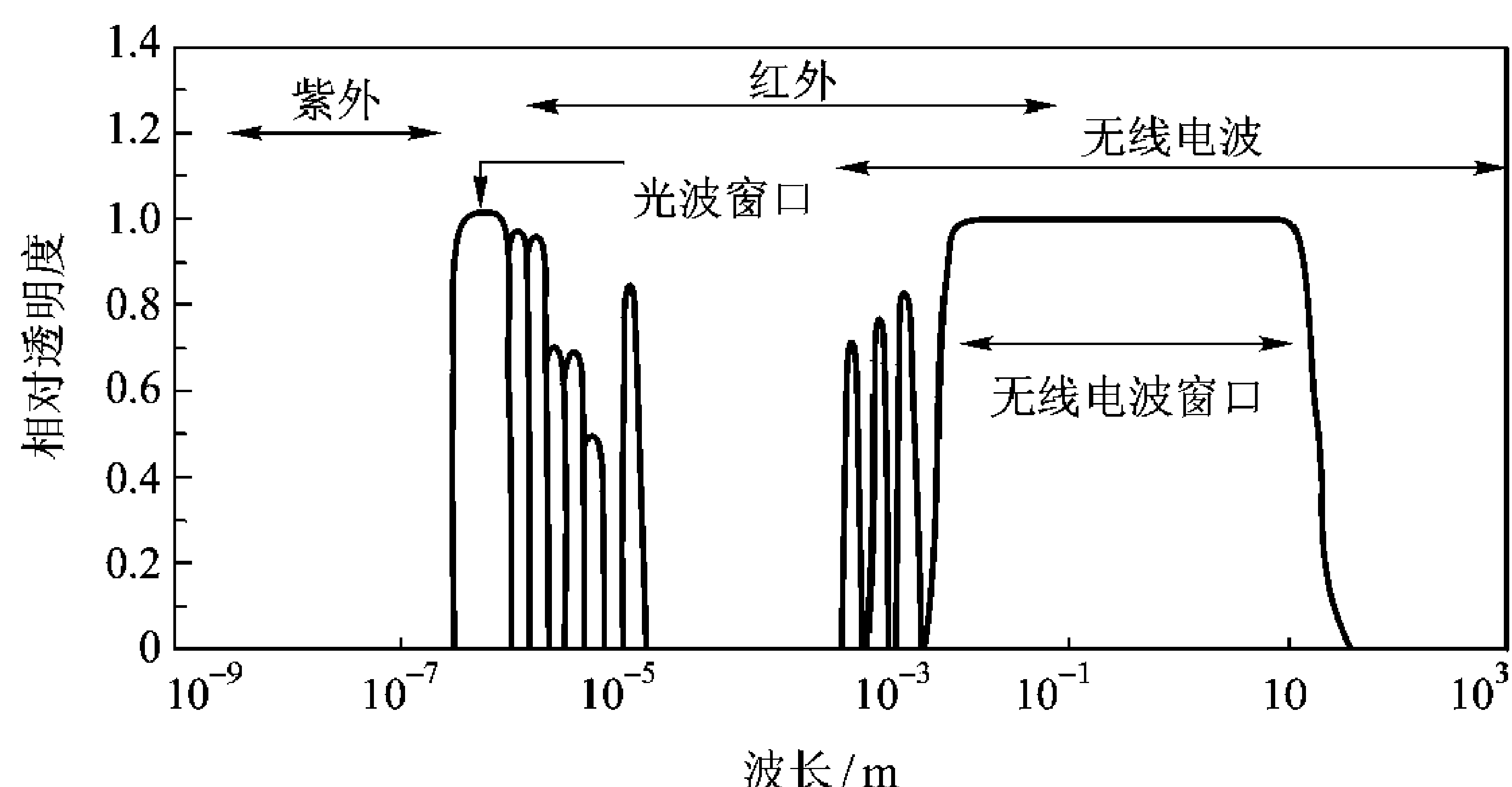


图 1－16　电磁波大气传输窗口

1.5.3　不同波段电磁波的传播特性及其应用

电磁波谱的各个波段在空间的传播特性是不一样的。长波可以沿地球的弯曲表面传播到很远，这种传播方式叫地波。短波可以借助 60～300 km 高空的电离层折射返回地面，这种传播方式叫天波。到了超短波、微波和光波波段，电磁波则能穿过电离层达到外层空间（视距传播），这种传播方式称为空间波。考虑到大气吸收，利用穿透电离层的视距传播，通常采用微波。地球和宇宙空间之间的通信、卫星通信必须使用微波。陆地移动通信越来越多地采用微波。微波视距传播用于陆地长距离通信有它不利的一面，即在地球上它不能传播到很远的地方，因为地球表面是弯曲的表面，一个高 100 m 的发射天线其作用半径只有约 40 km。为了解决微波在陆地上传播距离有限这个问题，在发射台与接收台之间设立若干中继站，站与站之间的距离不超过视距，这样微波信号就可像接力棒一样一站一站地传下去。也可把中继站设在人造地球卫星上，这样通信的距离就很大了。目前广泛使用的是赤道上空距地球表面约 36 000 km 的同步轨道上的同步卫星。3 颗同步卫星就可覆盖全球的大部分面积（南北极除外）。

光波通过大气衰减较大，因此光波通过大气传输只能在短距离上实现。光波的长距离传播要用低损耗的光纤。1970 年美国康宁玻璃公司研制出第一条

光导纤维(损耗为 20 dB/km,波长为 0.8 μm)。目前工作在 1.45 ~ 1.65 μm 波长的商用低损耗石英光纤每公里损耗可小于 0.2 dB。

1.6 矢量分析与场论

1.6.1 标量、矢量与场

我们接触过的物理量，如温度 T、电荷密度 ρ 只有大小，没有方向，这种物理量叫做标量。还有一些物理量，如速度$\boldsymbol{v}$、电场强度 $\boldsymbol{E}$，不仅有大小，还有方向。这种要用大小及方向同时表示的物理量叫矢量。

如果在空间域 Ω 上，每一点都存在一个确定的物理量 A，我们就说：场域 Ω 上存在由场量 A 构成的场。如果 A 是标量，我们就说场域 Ω 上存在一标量场；同理如果 $\boldsymbol{A}$ 是矢量，则说明场域 Ω 上存在一矢量场。场是物质存在的一种形态，但有别于实物粒子。在空间同一点上同时允许存在多种场，或者一种场的多种模式(模式的概念以后会进一步讨论)。这与实物粒子的不可入性和排他性有天壤之别。

激发电磁场与电磁波的源，电荷密度 ρ 是标量，电流密度 $\boldsymbol{J}$ 是矢量。ρ 的单位是库仑每立方米(C/m^3)。表示电磁场的特征量，电场强度 $\boldsymbol{E}$、电通量密度 $\boldsymbol{D}$、磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 和磁通量密度 $\boldsymbol{B}$ 都是矢量。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 在空间可用一个有向线段表示(见图 1 – 17)，有向线段的方向即矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向，而有向线段的长度就表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小。矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小可用模 $|\boldsymbol{A}|$ 表示，方向可用单位矢量 $\boldsymbol{a}_0$ 表示。$\boldsymbol{a}_0$的方向即 $\boldsymbol{A}$ 的方向，$\boldsymbol{a}_0$ 的大小为 1，即模 $|\boldsymbol{a}_0| = 1$。引入单位矢量 $\boldsymbol{a}_0$ 后，矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{a}_0 \tag{1.6.1}$$

当两矢量的模和方向都相同时就可以认为这两个矢量彼此相等的这一类矢量叫做自由矢量。在以后的讨论中我们仅限于自由矢量。对于自由矢量我们常常把矢量的起点平移到坐标原点，以使分析简化，见图 1 – 18。

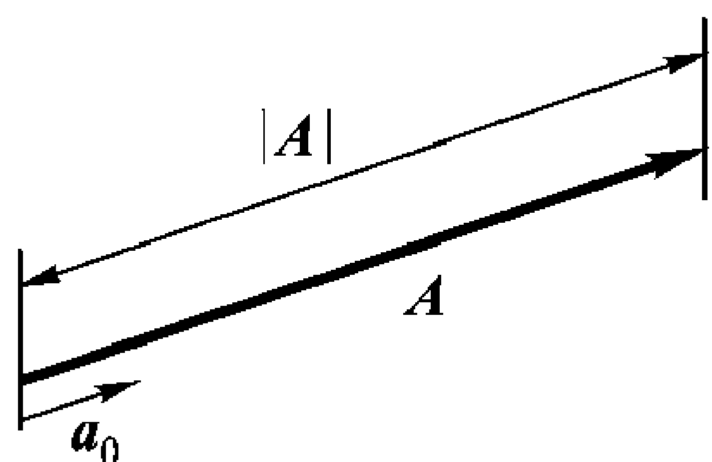


图 1 – 17 矢量 $\boldsymbol{A}$ 的有向线段表示

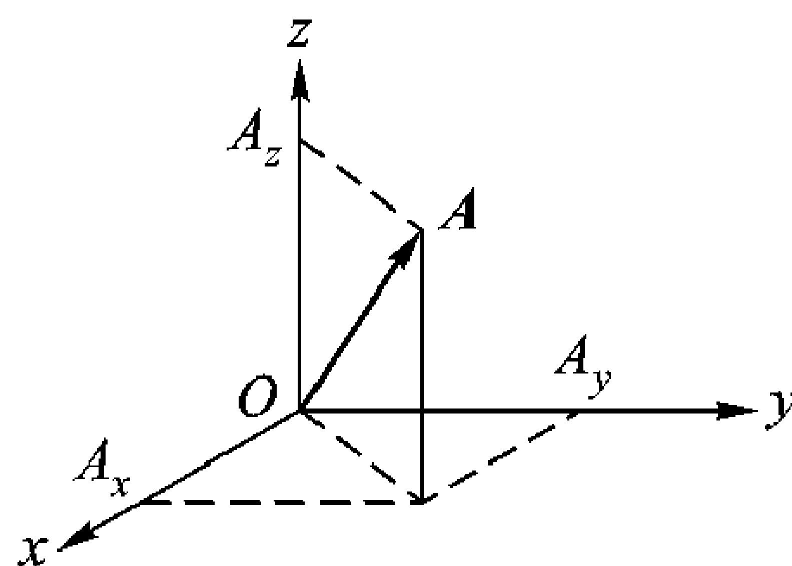


图 1 – 18 矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系中的表示

如果矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的大小与方向与空间位置无关，叫做常矢量。与此对应，如果矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小或方向，只要其中有一个与空间位置有关就叫做变矢量。这里“常”与“变”仅对空间坐标而言。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 通过加法运算定义一个新的矢量 $\boldsymbol{C}$，有

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \tag{1.6.2}$$

如果矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 构成平行四边形的两边，则平行四边形的对角线就是矢量 $\boldsymbol{C}$，这就是矢量加法的平行四边形法则，见图 1－19（a）。

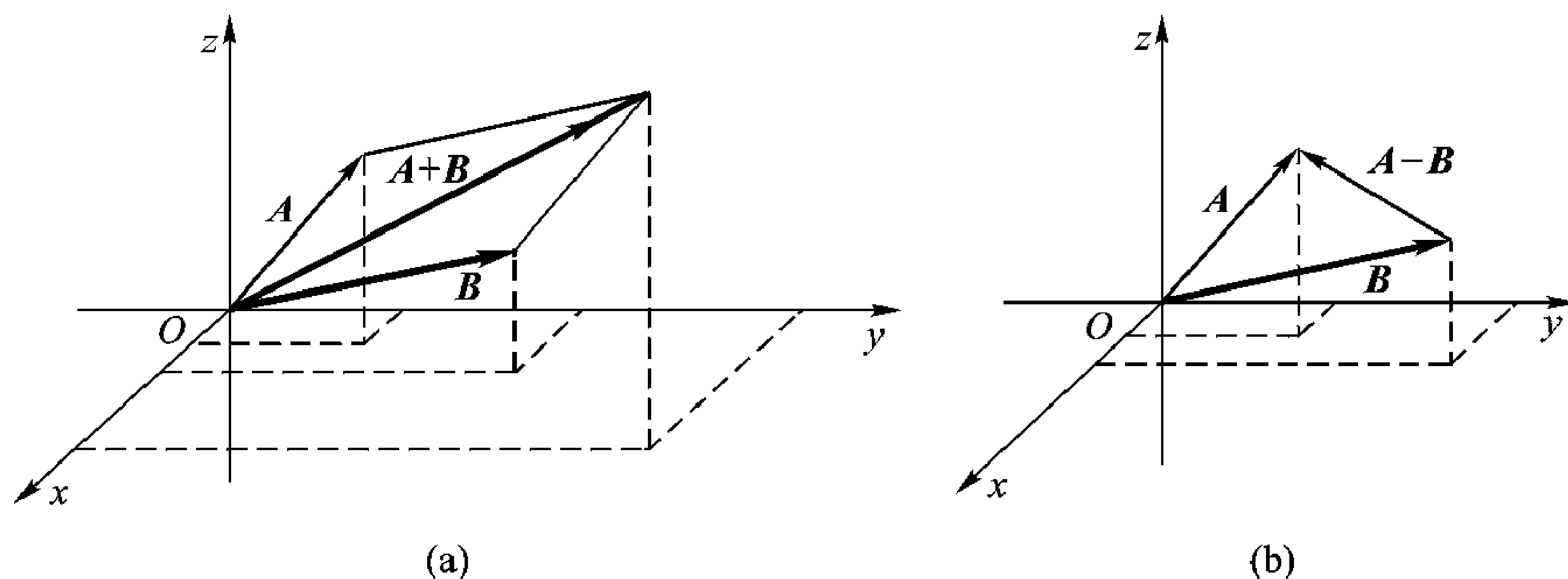


图 1－19　矢量加法、减法运算的平行四边形法则

（a）两矢量相加 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$　（b）两矢量相减 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的减法运算 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 定义为 $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$。矢量 $-\boldsymbol{B}$ 的大小与矢量 $\boldsymbol{B}$ 的大小相等，但方向相反。所以矢量

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}) \tag{1.6.3}$$

也可用平行四边形法则得到，见图 1－19（b）。

两矢量相乘，有标积（或点积）与矢积（或叉积）之分。两矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的标积为一标量 C，其定义是

$$C = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |A||B|\cos\theta \tag{1.6.4}$$

θ 是矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 间夹角，见图 1－20（a）。

两矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的矢积为一新的矢量 $\boldsymbol{D}$，有

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{n}_0|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{1.6.5}$$

其模为

$$|\boldsymbol{D}| = |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{1.6.6}$$

而 $\boldsymbol{D}$ 的方向由单位矢量 $\boldsymbol{n}_0$ 表示，$\boldsymbol{n}_0$ 与 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 构成右手螺旋关系[见图 1－20（a）]，即如果右手四指从 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$，则大拇指方向就是 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向。所以 $\boldsymbol{D}$ 垂直于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 构成的平面。式（1.6.5）中 θ 定义为从矢量 $\boldsymbol{A}$ 到 $\boldsymbol{B}$ 的夹角，见图 1－20（b）。

根据两矢量标积、矢积的定义，标积满足交换律，矢积则不然，即

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.6.7}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} \tag{1.6.8}$$

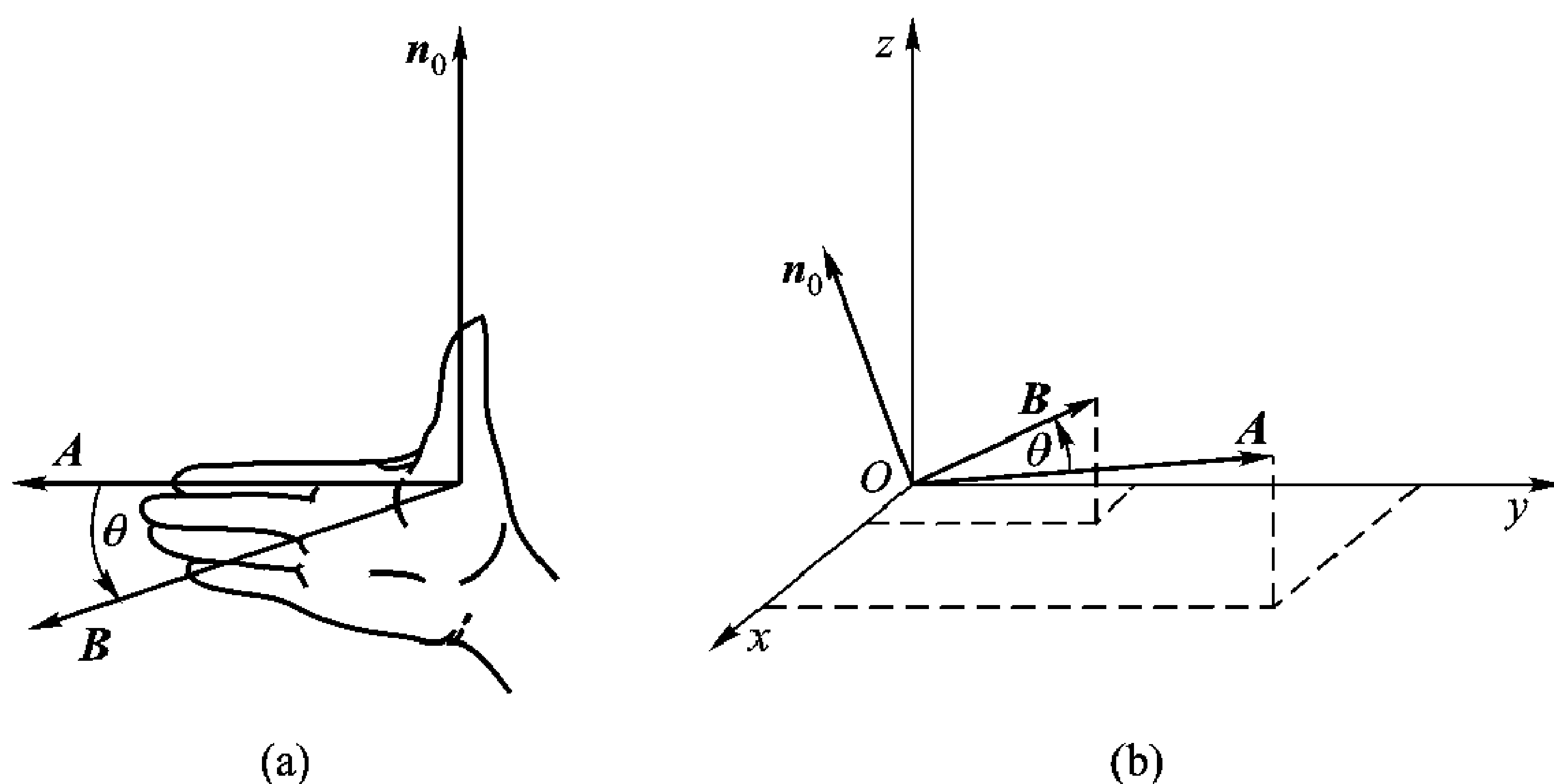


图 1－20 两矢量的积

(a) 右手螺旋关系 (b) $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ 是平行于 $\boldsymbol{n}_0$ 的矢量

矢量场可以是时间坐标和空间坐标的函数。不随时间变化的场叫静态场，静止电荷激发的静电场就是静态场。随时间变化的场叫时变场。随时间变化的电荷或电流激发的电磁场就是时变场。不随空间位置变化的场叫均匀场，反之就是不均匀场。

场量的空间位置在确定的坐标系中用矢径 $\boldsymbol{r}$ 表示，模 $|\boldsymbol{r}|$ 表示从坐标原点到场量所在点的距离，$\boldsymbol{r}$ 的方向即从坐标系原点到场量所在点连线离开原点的方向。如此，随时间、空间变化的场量，如电场强度 $\boldsymbol{E}$、磁场强度 $\boldsymbol{H}$，可表示为 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$、$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$。

当需要与所研究场点的空间坐标区分时，激发场的源(如电荷密度 ρ 与电流密度 $\boldsymbol{J}$)的空间位置常用上标带撇的矢径 $\boldsymbol{r}'$ 表示。因此随时间、空间变化的场源 ρ、$\boldsymbol{J}$ 可表示为 $\rho(\boldsymbol{r}', t)$，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t)$。从源点指向所研究场点的矢量用 $\boldsymbol{R}$ 表示，见图 1－21，有

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$$

$\boldsymbol{R}$ 叫作距离矢量，其模 $|\boldsymbol{R}| = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ 表示源所在点到所研究场点的距离。

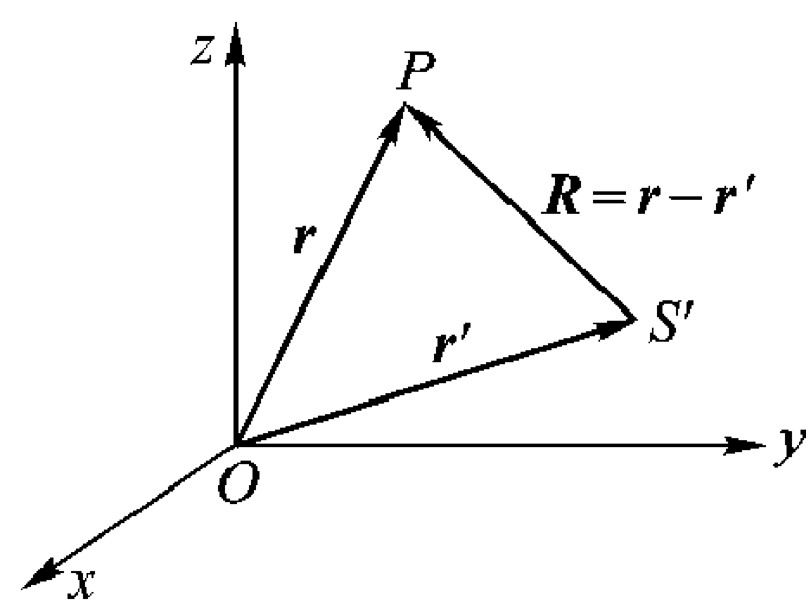


图 1－21 场点与源点的表示

在直角坐标系中，表示场量空间位置的矢径 $\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{x}_0 + y\boldsymbol{y}_0 + z\boldsymbol{z}_0 \tag{1.6.9}$$

$\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$、$\boldsymbol{z}_0$ 分别为坐标轴 x、y、z 增加方向的单位矢量，且是常矢量，三者彼此垂直，即正交，故具有性质

$$\boldsymbol{x}_0 \cdot \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}_0 \cdot \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{z}_0 = 1 \tag{1.6.10}$$

$$\boldsymbol{x}_0 \cdot \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{y}_0 \cdot \boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{x}_0 = 0 \tag{1.6.11}$$

以及

$$\boldsymbol{x}_0 \times \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{z}_0, \quad \boldsymbol{y}_0 \times \boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y}_0 \tag{1.6.12}$$

矢径 $\boldsymbol{r}$ 的模为

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.6.13}$$

在直角坐标系中，场矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示成

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A_x(\boldsymbol{r})\boldsymbol{x}_0 + A_y(\boldsymbol{r})\boldsymbol{y}_0 + A_z(\boldsymbol{r})\boldsymbol{z}_0 \tag{1.6.14a}$$

或

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = A_x(x, y, z)\boldsymbol{x}_0 + A_y(x, y, z)\boldsymbol{y}_0 + A_z(x, y, z)\boldsymbol{z}_0 \tag{1.6.14b}$$

并简记为

$$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{x}_0 + A_y\boldsymbol{y}_0 + A_z\boldsymbol{z}_0 \tag{1.6.14c}$$

式中 A_x、A_y、A_z 为矢量$\boldsymbol{A}$ 在 x、y、z 轴上的投影，见图 1－18。因为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 x 轴、y 轴、z 轴上投影分别为 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}_0 = A_x$，$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{y}_0 = A_y$，$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{z}_0 = A_z$。$A_x$、$A_y$、$A_z$ 都是空间位置$\boldsymbol{r}$ 的函数。

设矢量 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B} = B_x\boldsymbol{x}_0 + B_y\boldsymbol{y}_0 + B_z\boldsymbol{z}_0$$

则根据两矢量标积与矢积的定义，矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 在直角坐标系中的标积、矢积分别为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{x}_0 + A_y\boldsymbol{y}_0 + A_z\boldsymbol{z}_0) \cdot (B_x\boldsymbol{x}_0 + B_y\boldsymbol{y}_0 + B_z\boldsymbol{z}_0) \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{aligned} \tag{1.6.15}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{x}_0 + A_y\boldsymbol{y}_0 + A_z\boldsymbol{z}_0) \times (B_x\boldsymbol{x}_0 + B_y\boldsymbol{y}_0 + B_z\boldsymbol{z}_0) \\ &= \boldsymbol{x}_0(A_yB_z - A_zB_y) + \boldsymbol{y}_0(A_zB_x - A_xB_z) + \boldsymbol{z}_0(A_xB_y - A_yB_x) \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.6.16}$$

两矢量乘积运算除了标积和矢积外，在物理问题中还可能碰到两种矢量的直接相乘

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\boldsymbol{C}}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{x}_0 + A_y\boldsymbol{y}_0 + A_z\boldsymbol{z}_0)(B_x\boldsymbol{x}_0 + B_y\boldsymbol{y}_0 + B_z\boldsymbol{z}_0) \\ &= A_xB_x\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0 + A_xB_y\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0 + A_xB_z\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{z}_0 \\ &\quad + A_yB_x\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}_0 + A_yB_y\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}_0 + A_yB_z\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0 \\ &\quad + A_zB_x\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0 + A_zB_y\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{y}_0 + A_zB_z\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{z}_0 \end{aligned} \tag{1.6.17}$$

称$\overline{\overline{\boldsymbol{C}}}$为并矢。所以在三维空间，标量用 1 个元素表示，矢量用 3 个元素表示，而并矢就要用 9 个元素表示。

并矢的一次标积为$\overline{\overline{A}}\cdot\overline{\overline{B}}$，其运算法则是夹在中间的两个单位矢量按标积运算。如

$$\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0$$

$$\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}_0=0$$

并矢的二次标积$\overline{\overline{A}}:\overline{\overline{B}}$，其运算法则是夹在中间的两个单位矢量先按标积运算，剩下的两边的两个单位矢量再进行一次标积运算。如

$$\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0:\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_0=1$$

$$\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0:\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{y}_0=0$$

在各向异性介质中引入并矢后，麦克斯韦方程组表达式就很简洁。

1.6.2　标量场的等值面与梯度

为直观地研究标量场 Φ 的分布状况，常常需要考察场中 Φ 数值相同点的几何分布，即

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\Phi(x,y,z)=C\quad(C\text{ 为常数})\tag{1.6.18}$$

此式在几何上一般表示一个曲面，称为标量场的等值面。例如温度场的等值面，就是相同温度的点组成的等温面；电位场的等值面就是电位相同的点组成的等位面。显然，通过标量场的每一点都有一个等值面，且一个点只在一个等值面上。

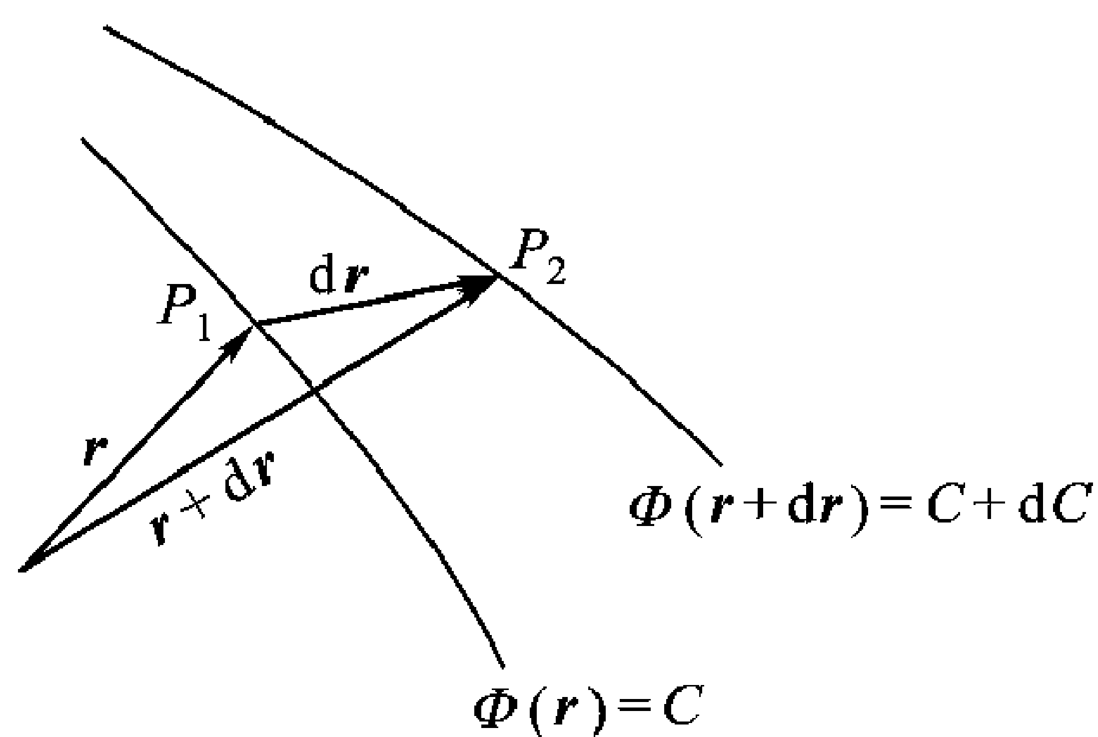


图1-22　梯度定义

如图1-22，设 P_1 为电位等值面(即等位面)$\Phi(\boldsymbol{r})=C$ 上的一点，P_2 为等位面 $\Phi(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r})=C+\mathrm{d}C$ 上的一点，C 为常数，dC 为一微小增量，d$\boldsymbol{r}$ 由 P_1 指向 P_2，则 dC/dr 当 d$r\to0$ 时的极限就是 dr 方向的方向导数，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathrm{d}x\boldsymbol{x}_0+\mathrm{d}y\boldsymbol{y}_0+\mathrm{d}z\boldsymbol{z}_0\tag{1.6.19}$$

当$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$很小时

$$\mathrm{d}\Phi=\Phi(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r})-\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathrm{d}z\tag{1.6.20}$$

如果我们定义一个算符∇，有

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\tag{1.6.21}$$

算符∇是一个微分运算符号，但同时又要当作矢量看待。可读作“del”，叫做梯度算符(gradient operator)或哈密尔顿算符。按照算符∇的这一定义，$\nabla\ \Phi$就是

$$\nabla \Phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\Phi=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0 \qquad (1.6.22)$$

利用$\nabla \Phi$的这一定义，式(1.6.20)右边可表示为

$$\mathrm{d}\Phi=\Phi(\boldsymbol{r}+\mathrm{d}\boldsymbol{r})-\Phi(\boldsymbol{r})=\nabla \Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad (1.6.23)$$

因为

$$\begin{aligned}\nabla \Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\cdot(\mathrm{d}x\boldsymbol{x}_0+\mathrm{d}y\boldsymbol{y}_0+\mathrm{d}z\boldsymbol{z}_0)\\&=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

式(1.6.22)定义的$\nabla \Phi$叫做标量场Φ的梯度 **grad** Φ，即

$$\mathbf{grad}\ \Phi=\nabla \Phi$$

那么，标量场梯度$\nabla \Phi$的物理意义是什么呢？

式(1.6.22)表明$\nabla \Phi$是一个矢量，如果$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$沿等位面$\Phi(\boldsymbol{r})=C$，或$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$与等位面$\Phi(\boldsymbol{r})=C$相切，此时$\mathrm{d}\Phi=0$，即

$$\mathrm{d}\Phi=\nabla \Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$$

因为$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$与等位面相切，所以$\nabla \Phi$的方向与等位面的法线方向重合。等位面的法线方向是场变化最陡的方向。所以梯度$\nabla \Phi$的方向就是电位Φ变化最陡的方向。

设$\nabla \Phi$与$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$的夹角为θ，则

$$\mathrm{d}\Phi=|\nabla \Phi||\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\cos\theta$$

当$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$与等位面法线重合时，$\theta=0$，$\mathrm{d}\Phi$最大，此时

$$|\nabla \Phi|=\left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}\right|_{r\text{在等位面法线方向}}$$

归纳起来，电位$\Phi(x,y,z)$的梯度$\nabla \Phi$是一个矢量，方向为电位变化最陡的方向，大小为电位变化最大方向的变化率。

标量场Φ的梯度$\nabla \Phi$充分描述了标量场Φ在空间变化的特征。标量场空间任一点(x, y, z)沿任一方向的变化率(即方向导数)是不一样的。最大变化率(即最大方向导数)的方向就是梯度$\nabla \Phi$的方向，最大变化率(即最大方向导数)就是梯度$\nabla \Phi$的大小。梯度$\nabla \Phi$在任一方向$\boldsymbol{l}_0$的投影$(\nabla \Phi\cdot\boldsymbol{l}_0)$就是该方向的变化率(即该方向的方向导数)。因此梯度$\nabla \Phi$是描述标量场Φ随空间变化特性非常好的一个物理量。

例 1－6 设标量函数$T=x^2+y^2z$，求沿$\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{x}_0+3\boldsymbol{y}_0-2\boldsymbol{z}_0$方向在$(1,-1,2)$点的方向导数$\mathrm{d}T/\mathrm{d}l$。

解： 函数T的梯度为

$$\nabla T=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)(x^2+y^2z)=2x\boldsymbol{x}_0+2zy\boldsymbol{y}_0+y^2\boldsymbol{z}_0$$

$\boldsymbol{l}$ 方向单位矢量

$$\boldsymbol{l}_0=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=\frac{2\boldsymbol{x}_0+3\boldsymbol{y}_0-2\boldsymbol{z}_0}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=\frac{2\boldsymbol{x}_0+3\boldsymbol{y}_0-2\boldsymbol{z}_0}{\sqrt{17}}$$

所以沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l}=\nabla T\cdot\boldsymbol{l}_0=(2x\boldsymbol{x}_0+2yz\boldsymbol{y}_0+y^2\boldsymbol{z}_0)\cdot\left(\frac{2\boldsymbol{x}_0+3\boldsymbol{y}_0-2\boldsymbol{z}_0}{\sqrt{17}}\right)=\frac{4x+6yz-2y^2}{\sqrt{17}}$$

在点(1，-1,2)

$$\left.\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}l}\right|_{(1,-1,2)}=\frac{4-12-2}{\sqrt{17}}=\frac{-10}{\sqrt{17}}$$

1.6.3 矢量场的通量与散度

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向曲面 S 的曲面积分

$$\psi=\int_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\tag{1.6.24}$$

称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 向正侧穿过曲面 S 的通量。

见图 1-23，设 M 为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的一点，$\boldsymbol{n}_0$ 为过 M 点曲面 S 法线方向的单位矢量，则 $\boldsymbol{n}_0$ 正方向的一侧定义为曲面正侧。有向面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向与法线 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向一致，大小为元面积 $\mathrm{d}S$。在直角坐标系中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}S_x\boldsymbol{x}_0+\mathrm{d}S_y\boldsymbol{y}_0+\mathrm{d}S_z\boldsymbol{z}_0\tag{1.6.25}$$

$\mathrm{d}S_x$、$\mathrm{d}S_y$、$\mathrm{d}S_z$ 分别为 $\mathrm{d}S$ 在 $y-z$ 坐标面，$x-z$ 坐标面以及 $x-y$ 坐标面的投影，因为 $\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0$，所以通量 ψ 亦可写成

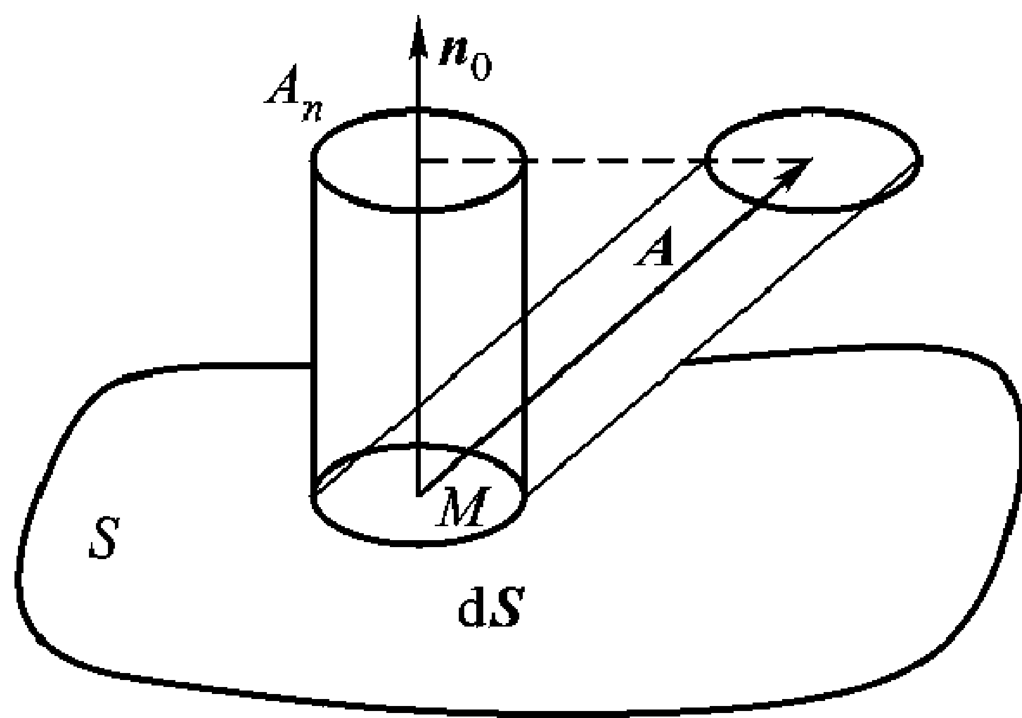


图 1-23 通量表示

$$\psi=\int_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S(A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0)\cdot(\mathrm{d}S_x\boldsymbol{x}_0+\mathrm{d}S_y\boldsymbol{y}_0+\mathrm{d}S_z\boldsymbol{z}_0)$$
$$=\int_S(A_x\mathrm{d}S_x+A_y\mathrm{d}S_y+A_z\mathrm{d}S_z)$$

如定义 A_n为矢量 $\boldsymbol{A}$ 在法线 $\boldsymbol{n}_0$ 方向投影，那么 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=A_\mathrm{n}\mathrm{d}S$，如果把 $\boldsymbol{A}$ 理解为流体的流速，那么 $A_\mathrm{n}\mathrm{d}S$ 就表示穿过 $\mathrm{d}S$ 的流量，这就是我们把式(1.6.24)的积分称为通量的原因。

如果 S 是一个闭曲面，并取其外侧为正侧，则 $\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 表示 A 从闭曲面流出的通量。对于流体而言，当通量为正时，表示有净流量流出，说明存在着流体的源。当通量为负时，表示有净的流量流入，说明存在着流体的负源。当

通量为零时，表示流入与流出的流量相等，说明体积内正负源的总和为零。

定义空间某一点通量的体密度的极限为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在该点的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$，则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} \tag{1.6.26}$$

ΔV 为闭曲面 ΔS 包围的体积。所以 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ 是一个标量。“div”读作“divergence”。

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$（或通量体密度）的物理意义是什么呢？见图 1－24(a)，设元体积 ΔV 为一立方体，边长为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$，其体积 $\Delta V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。通量 $\oint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 计算可在立方体的 6 个侧面上进行。

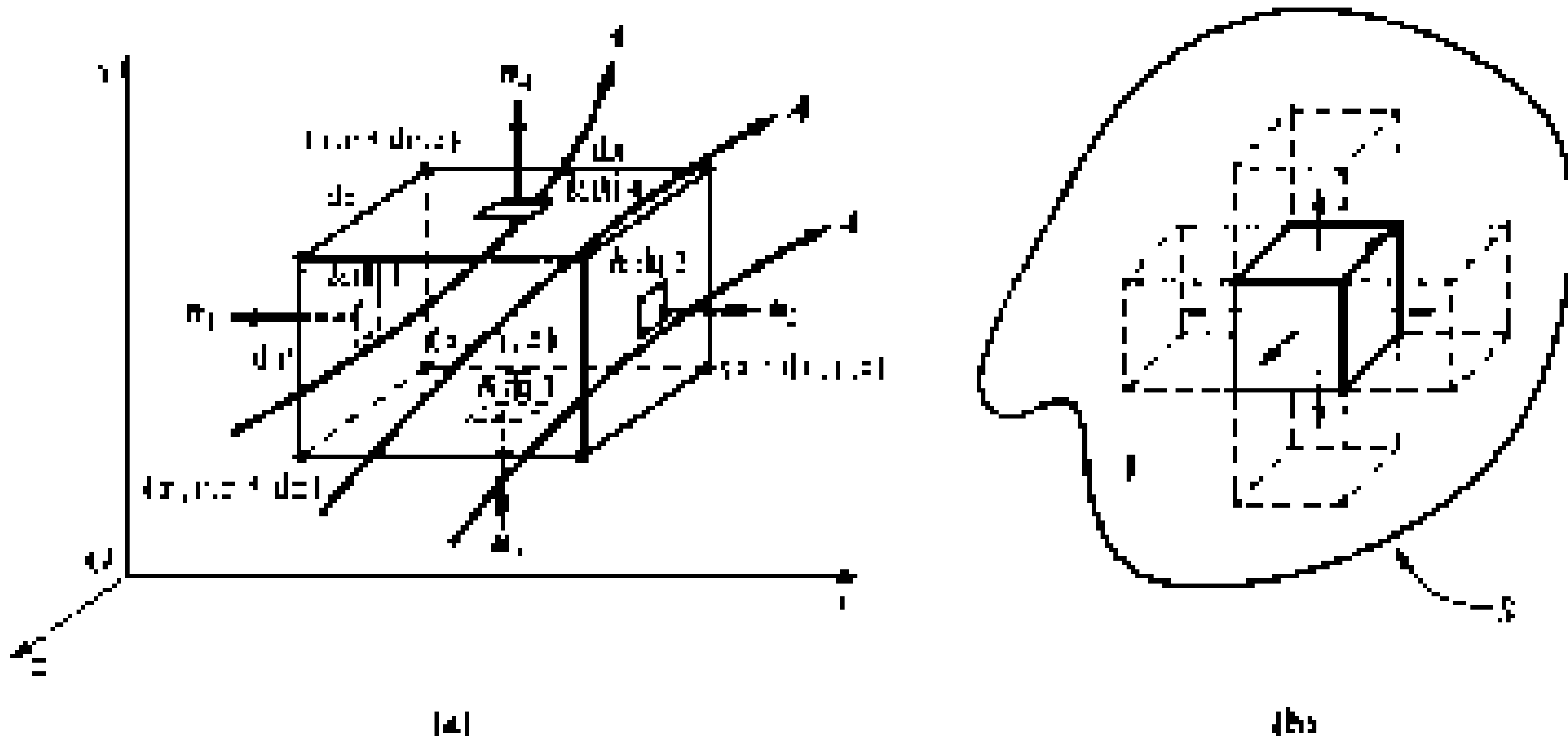


图 1－24　矢量场的散度

(a) 矢量场散度在一个体积元上的计算　(b) 散度定理

在 $x=x_0$ 与 $x_0+\mathrm{d}x$ 两个侧面，A_y、A_z 分量对积分没有贡献，只需考虑 A_x 分量；而在 $y=y_0$ 与 $y_0+\mathrm{d}y$ 两个侧面，A_x、A_z 两个分量对积分没有贡献，只需考虑 A_y 分量；在 $z=z_0$ 与 $z_0+\mathrm{d}z$ 两个侧面，A_x、A_y 分量对积分没有贡献，只需考虑 A_z 分量。先计算 $x=x_0$ 与 $x=x_0+\mathrm{d}x$ 两个侧面的积分 $\int\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$。因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向为侧面法线的方向，由体积内部指向体积外，所以对于 $x=x_0$ 平面，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{x}_0$，而在 $x=x_0+\mathrm{d}x$ 侧面，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\mathrm{d}y\mathrm{d}z\boldsymbol{x}_0$。由此得到

$$\begin{aligned}\int_{\Delta S(x=x_0)+\Delta S(x=x_0+\mathrm{d}x)}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_{\Delta S(x=x_0)}(A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0)\cdot(-\boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &\quad+\int_{\Delta S(x=x_0+\mathrm{d}x)}(A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0)\cdot(\boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &=\int_{\Delta S(x=x_0)}-A_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\int_{\Delta S(x=x_0+\mathrm{d}x)}A_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

假定 dy、dz 很小，在 $dydz$ 小面积内，A_x 为常数，可拿到积分号外，由此得到

$$\int_{\Delta S(x=x_0)+\Delta S(x=x_0+dx)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \left(A_x\Big|_{x=x+dx} - A_x\Big|_{x=x_0}\right)dydz$$

所以此时

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_{\Delta S(x=x_0)+\Delta S(x=x_0+dx)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} &= \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\left(A_x\Big|_{x=x_0+dx} - A_x\Big|_{x=x_0}\right)dydz}{dxdydz}\\ &= \lim_{dx\to 0}\frac{A_x\Big|_{x=x_0+dx} - A_x\Big|_{x=x_0}}{dx}\\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x}\end{aligned}\tag{1.6.27}$$

同理，在 $y=y_0$ 与 y_0+dy 两个侧面

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_{\Delta S(y=y_0)+\Delta S(y=y_0+dy)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \frac{\partial A_y}{\partial y}\tag{1.6.28}$$

在 $z=z_0$ 与 z_0+dz 两个侧面

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\int_{\Delta S(z=z_0)+\Delta S(z=z_0+dz)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \frac{\partial A_z}{\partial z}\tag{1.6.29}$$

所以

$$\text{div}\,\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\tag{1.6.30}$$

根据式(1.6.21)定义的算符 ∇，式(1.6.30)右边又可记为 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$，因为按算符 ∇ 的定义有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\cdot(A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0) = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

所以

$$\text{div}\boldsymbol{A} = \nabla\cdot\boldsymbol{A}\tag{1.6.31}$$

严格地说，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 不能作为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度定义。$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$ 与 $\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}}{\Delta V}$ 等价，是散度的又一种定义。$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 可以看作是 $\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$ 的一种表示。算符 ∇ 在 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 中起到矢量的作用，但 ∇ 又与一般的矢量不同，因为 $\boldsymbol{A}\cdot\nabla$ 是什么，还没有人定义过。

对于由 N 个体积元 ΔV 构成的体积 V [见图 1－24(b)]，由式(1.6.26)、(1.6.31)得到

$$\sum_N \left(\oint_{\Delta S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right) = \sum_N (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \Delta V$$

当 $N \to \infty$，$\Delta V \to \mathrm{d}V$，上式求和变成积分。因为除了包围体积 V 的闭曲面 S 外，所有相邻体积元交界面上 $\oint_{\Delta S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 相互抵消，这样我们就得到

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \mathrm{d}V \tag{1.6.32}$$

式(1.6.32)就是著名的散度定理。它表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿闭曲面的面积分 $\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ (或矢量场 A 流出闭合曲面 S 的通量)等于矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 的体积分，积分域 V 为 S 包围的体积。

如果要求梯度的散度，就要进行"$\nabla \cdot \nabla$"的运算，$\nabla \cdot \nabla$ 记作 ∇^2，叫作拉普拉斯算子，在直角坐标下，按算符 ∇ 的定义有

$$\nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.6.33}$$

所以标量场 Φ 梯度的散度为

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{grad}\ \Phi) &= \nabla \cdot \nabla\ \Phi \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right) \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2\ \Phi \end{aligned} \tag{1.6.34}$$

例 1－7　求 $\boldsymbol{E} = 3x^2\boldsymbol{x}_0 + 2z\boldsymbol{y}_0 + x^2 z\boldsymbol{z}_0$ 在(2，－2，0)点的散度。

解：$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2z) + \frac{\partial}{\partial z}x^2 z = 6x + 0 + x^2 = x^2 + 6x$

在(2，－2，0)点

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}\Big|_{(2,\,-2,\,0)} = 16$$

1.6.4　矢量场的环量与旋度

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在有向闭合曲线上的线积分

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1.6.35}$$

定义为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向闭合曲线 l 的环量。

在直角坐标系中

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}x\boldsymbol{x}_0 + \mathrm{d}y\boldsymbol{y}_0 + \mathrm{d}z\boldsymbol{z}_0 \tag{1.6.36}$$

dx、dy、dz 分别为 $d\boldsymbol{l}$ 在 x、y、z 轴上的投影。所以环量可写成

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint (A_x \boldsymbol{x}_0 + A_y \boldsymbol{y}_0 + A_z \boldsymbol{z}_0) \cdot (dx\boldsymbol{x}_0 + dy\boldsymbol{y}_0 + dz\boldsymbol{z}_0)$$

$$= \oint_l (A_x dx + A_y dy + A_z dz) \tag{1.6.37}$$

如图1－25，设 M 为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的一点，在 M 点处取定一个方向 $\boldsymbol{n}_0$，过 M 点作一微小曲面 ΔS，其法线方向与 $\boldsymbol{n}_0$ 一致。ΔS 的周界为 Δl。$\boldsymbol{n}_0$ 和 Δl 构成右手螺旋关系，也就是说，如果右手大拇指方向与曲面 ΔS 的法线方向（即 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向）一致，则右手四指方向就是线积分路径 l 的方向。

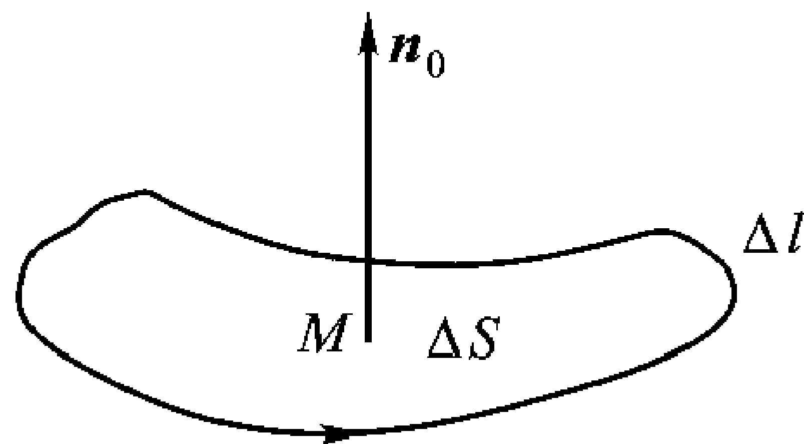


图1－25　环量面密度

若在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿正 Δl 方向的环量 $\Delta\Gamma$ 与面积 ΔS 之比在 M 点处保持以 $\boldsymbol{n}_0$ 为法线方向条件下，以任意方式缩向 M 点时，其极限

$$\lim_{\substack{\Delta S \to M \\ (\text{或} \Delta S \to 0)}} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} = \lim_{\substack{\Delta S \to M \\ (\text{或} \Delta S \to 0)}} \frac{\oint_{\Delta l} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{1.6.38}$$

存在，则称它为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}_0$ 的环量面密度。从环量面密度的定义可知，它是一个与方向有关的量。空间给定点有无数个方向，每一个方向对应一个环量面密度。

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 **Curl** $\boldsymbol{A}$ 定义为

$$(\mathbf{Curl}\ \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}_0 = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_{\Delta l} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}}{\Delta S} \tag{1.6.39}$$

这就是说，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 **Curl** $\boldsymbol{A}$ 在空间某一点给定方向的投影就是该方向的环量面密度。这跟标量场中梯度和方向导数之间的关系类似，梯度在某一方向投影就是该方向的方向导数。当 $\boldsymbol{n}_0$的方向与 **Curl** $\boldsymbol{A}$ 的方向一致时，得到最大的环量面密度。

按式(1.6.39)的定义，**Curl**$\boldsymbol{A}$ 在 x 方向投影（或矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在 x 方向的环量面密度）为

$$(\mathbf{Curl}\ \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x}_0 = \lim_{\Delta S_x \to 0} \frac{\oint_{\Delta l_{yz}} \boldsymbol{A}_{yz} \cdot d\boldsymbol{l}_{yz}}{\Delta S_x} \tag{1.6.40}$$

式中，$\boldsymbol{A}_{yz} = A_y \boldsymbol{y}_0 + A_z \boldsymbol{z}_0$，$d\boldsymbol{l}_{yz} = dy\boldsymbol{y}_0 + dz\boldsymbol{z}_0$，$\Delta S_x$ 为 $y-z$ 坐标面上的面积元，Δl_{yz}则为包围面积元 ΔS_x 的闭合曲线。因为当面积元的法线方向与 x 轴重合时，面积元 ΔS 落在 $y-z$ 平面，矢量场的 A_x 分量对线积分没有贡献。为了进

一步理解式(1.6.40)所包含的意义，参看图 1－26 (a)，设 ΔS_x 为边长 Δy、Δz 构成的矩形，即 $\Delta S_x=\Delta y\Delta z$，$\Delta l_{yz}$ 为矩形路径 $\overline{ABCD}$，在 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 边上只有 A_y 分量对积分有贡献，在 $\overline{DA}$、$\overline{BC}$ 边上只有 A_z 分量对积分有贡献，所以

$$\int_{\Delta l_{yz}} \boldsymbol{A}_{yz}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz} = \int_{\overline{ABCD}} \left[A_y\big|_{\text{on}\overline{AB}}\mathrm{d}y + A_z\big|_{\text{on}\overline{BC}}\mathrm{d}z + \left(-A_y\big|_{\text{on}\overline{CD}}\mathrm{d}y\right) + \left(-A_z\big|_{\text{on}\overline{DA}}\mathrm{d}z\right)\right]$$

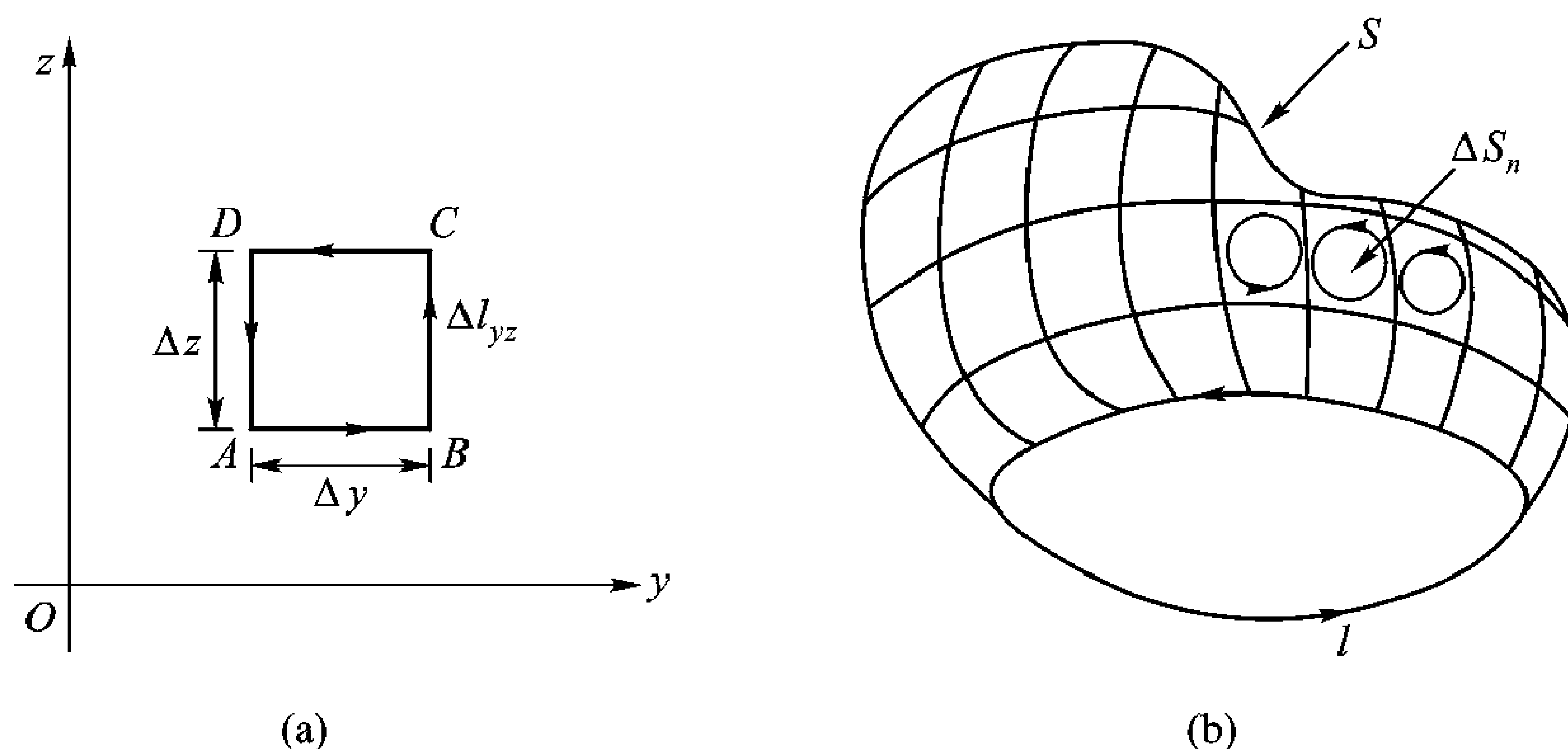


图 1－26　矢量场的旋度

(a) 矢量场旋度在一个面积元上的计算　(b) 旋度定义

当矩形 $ABCD$ 趋于无穷小时，边长 Δy、Δz 也趋于无穷小，此时可认为在 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 上 A_y 为常数，在 $\overline{DA}$、$\overline{BC}$ 上 A_z 为常数，A_y、A_z 可移到积分号外，故得到

$$\int_{\Delta l_{yz}} \boldsymbol{A}_{yz}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz} = \left(A_y\big|_{\text{on}\overline{AB}}\right)\Delta y - \left(A_y\big|_{\text{on}\overline{CD}}\right)\Delta y + \left(A_z\big|_{\text{on}\overline{BC}}\right)\Delta z - \left(A_z\big|_{\text{on}\overline{DA}}\right)\Delta z$$

所以

$$\begin{aligned}
&(\textbf{Curl}\ \boldsymbol{A})\cdot \boldsymbol{x}_0 \\
&= \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\int_{\Delta l_{yz}} \boldsymbol{A}_{yz}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{yz}}{\Delta S_x} \\
&= \lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\left[\frac{\left(A_y\big|_{\text{on}\overline{AB}}\right)\Delta y - \left(A_y\big|_{\text{on}\overline{CD}}\right)\Delta y + \left(A_z\big|_{\text{on}\overline{BC}}\right)\Delta z - \left(A_z\big|_{\text{on}\overline{DA}}\right)\Delta z}{\Delta y\Delta z}\right] \\
&= \lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta z\to 0}}\left(\frac{A_z\big|_{\text{on}\overline{BC}} - A_z\big|_{\text{on}\overline{DA}}}{\Delta y} - \frac{A_y\big|_{\text{on}\overline{CD}} - A_y\big|_{\text{on}\overline{AB}}}{\Delta z}\right) \\
&= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}
\end{aligned} \tag{1.6.41}$$

同理，定义 $\boldsymbol{A}$ 的旋度在 y 方向投影 $(\textbf{Curl}\ \boldsymbol{A})\cdot \boldsymbol{y}_0$ 为

$$(\mathbf{Curl}\ \boldsymbol{A})\cdot \boldsymbol{y}_0=\lim_{\Delta S_y\to 0}\frac{\int_{\Delta l_{xz}}\boldsymbol{A}_{xz}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{xz}}{\Delta S_y}=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\tag{1.6.42}$$

定义 $\boldsymbol{A}$ 的旋度在 z 方向投影 $(\mathbf{Curl}\ \boldsymbol{A})\cdot z_0$ 为

$$(\mathbf{Curl}\ \boldsymbol{A})\cdot \boldsymbol{z}_0=\lim_{\Delta S_z\to 0}\frac{\int_{\Delta l_{xy}}\boldsymbol{A}_{xy}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}_{xy}}{\Delta S_z}=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\tag{1.6.43}$$

式(1.6.41~1.6.43)表示 **Curl** $\boldsymbol{A}$ 矢量在 x、y、z 方向的3个分量，故 **Curl** $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{Curl}\boldsymbol{A}&=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{x}_0+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{y}_0+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{z}_0\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x}_0&\boldsymbol{y}_0&\boldsymbol{z}_0\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\A_x&A_y&A_z\end{vmatrix}\end{aligned}\tag{1.6.44}$$

如果应用式(1.6.21)表示的算子 ∇，那么式(1.6.44)可记为 $\nabla\times\boldsymbol{A}$，因为

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\times(A_x\boldsymbol{x}_0+A_y\boldsymbol{y}_0+A_z\boldsymbol{z}_0)\\&=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{x}_0+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{y}_0+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{z}_0\end{aligned}$$

所以 $\nabla\times\boldsymbol{A}=\mathbf{Curl}\ \boldsymbol{A}$。

式(1.6.39)与式(1.6.44)定义的矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度等价，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 严格地说不能作为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度的定义，它是 **Curl*A*** 的一种书写形式，但给旋度的运算带来很大方便。

对于有限面积 S [见图1-26(b)]，如果将 S 分成无限多小矩形面积元 ΔS_n 之和，当 ΔS_n 足够小时，式(1.6.39)可表示为

$$\sum_n(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}_0\Delta S_n=\sum_n\oint_{\Delta l_n}\boldsymbol{A}_n\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_n$$

上式左边即 $(\nabla\times\boldsymbol{A})$ 穿过面积 S 总的通量

$$\sum_n(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}_0\Delta S_n=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

而右边 n 个线积分，除了包围面积 S 的周边 l 以外，所有相邻面积元交界线的线积分都抵消，故有

$$\sum_n\oint_{\Delta l_n}\boldsymbol{A}_n\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}_n=\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

由此得到

$$\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\tag{1.6.45}$$

这就是著名的斯托克斯定理，它表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿闭曲线 l 的线积分（或环量）等于 $\boldsymbol{A}$ 的旋度（$\nabla\times\boldsymbol{A}$）穿过闭曲线 l 所包围面积 S 的总的通量。

例 1－8　已知 $\boldsymbol{A}=\dfrac{x\boldsymbol{x}_0+y\boldsymbol{y}_0}{x+y}$，求点（1，0，0）处的旋度及该点沿 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{z}_0+\boldsymbol{y}_0$ 的环量面密度。

解：
$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_0\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x/(x+y) & y/(x+y) & 0\end{vmatrix}=\frac{x-y}{(x+y)^2}\boldsymbol{z}_0$$

在（1，0，0）处
$$\nabla\times\boldsymbol{A}\Big|_{(1,0,0)}=\boldsymbol{z}_0$$

$\boldsymbol{l}$ 方向的单位矢量 $\boldsymbol{l}_0=\dfrac{\boldsymbol{z}_0+\boldsymbol{y}_0}{\sqrt{2}}$，故沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的环量面密度为
$$(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{l}_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

1.6.5　矢量运算的几个恒等关系

根据 1.6 节关于梯度、散度、旋度及拉普拉斯算子 ∇^2 的定义，可得以下矢量运算的恒等关系

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}\tag{1.6.46}$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0\tag{1.6.47}$$
$$\nabla\times(\nabla\Phi)=0\tag{1.6.48}$$
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\tag{1.6.49}$$
$$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi+\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}\tag{1.6.50}$$
$$\nabla\times(\Phi\boldsymbol{A})=\nabla\Phi\times\boldsymbol{A}+\Phi\nabla\times\boldsymbol{A}\tag{1.6.51}$$

例 1－9　在直角坐标系下证明式（1.6.46）。

解： 等式左边按矢量运算规则可写为

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla\times\left[\boldsymbol{x}_0\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{y}_0\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{z}_0\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right]$$
$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_0\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right) & \left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right) & \left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\end{vmatrix}$$
$$=\boldsymbol{x}_0\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)$$

$$-\boldsymbol{y}_0\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial z}\right)+\boldsymbol{z}_0\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}\right)$$

$$=\boldsymbol{x}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2 A_x\right)+\boldsymbol{y}_0\left(\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2 \boldsymbol{A}_y\right)+$$

$$\boldsymbol{z}_0\left(\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2 A_z\right)$$

$$=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

从恒等关系式(1.6.47)、(1.6.48)可知，旋度的散度等于零，而梯度的旋度等于零。1.6.6节对矢量场的讨论就用到了这些性质。

例1-10 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{x}_0+y\boldsymbol{y}_0+z\boldsymbol{z}_0$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明：

(1) $\nabla r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$； (2) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$； (3) $\nabla\cdot\nabla r=\nabla^2 r=\frac{2}{r}$；

(4) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$； (5) $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$； (6) $\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r}=\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(r)$。

解：因为 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{x}_0+y\boldsymbol{y}_0+z\boldsymbol{z}_0$，所以 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$\nabla r=\frac{\partial r}{\partial x}\boldsymbol{x}_0+\frac{\partial r}{\partial y}\boldsymbol{y}_0+\frac{\partial r}{\partial z}\boldsymbol{z}_0=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3$$

$$\nabla\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{x}_0 & \boldsymbol{y}_0 & \boldsymbol{z}_0\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=0$$

$$\nabla\frac{1}{r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right)\nabla r=-\frac{1}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\nabla\cdot\nabla r=\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{r}}{r}+\boldsymbol{r}\cdot\nabla\frac{1}{r}=\frac{3}{r}-\boldsymbol{r}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{3}{r}-\frac{1}{r}=\frac{2}{r}$$

$$\nabla^2\frac{1}{r}=\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r}=\nabla\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=-\left(\frac{\nabla\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}+\boldsymbol{r}\cdot\nabla\frac{1}{r^3}\right)$$

$$=-\left(\frac{3}{r^3}+\boldsymbol{r}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r^3}\right)\nabla r\right)=-\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\right)=0\qquad(\text{当 } r\neq 0\text{ 时})$$

上式当 $r\neq0$ 时成立，但不能确定 $\nabla^2\frac{1}{r}$ 在 $r=0$ 点的值，为此计算

$$\int_V\nabla^2\frac{1}{r}\mathrm{d}V=\int_V\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r}\mathrm{d}V=\int_S\nabla\frac{1}{r}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S=-\int_S\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S$$

如果积分区域不包括 $r=0$ 的原点，其积分为零。如果包括 $r=0$ 的原点，则

$$\int_V\nabla^2\frac{1}{r}=-\int_S\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S=-\int_S\frac{\mathrm{d}S_r}{r^2}=-\int_S\mathrm{d}\Omega=-4\pi$$

式中，$\mathrm{d}S_r$ 是包围积分区域 V 的曲面上面积元 $\mathrm{d}S$ 在半径为 r 的球面上的投影，

$d\Omega$ 是面积元 dS 对球心所张立体角。

根据 δ 函数的定义

$$\int_V \delta(r)\,dV = \begin{cases} 1 & (0 \in V) \\ 0 & (0 \notin V) \end{cases}$$

故得到 $-4\pi\int_V \delta(\boldsymbol{r})\,dV = -4\pi$，与前面的结果比较，可得

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$$

1.6.6　矢量场的分类与亥姆霍兹定理

根据前面对矢量场散度、旋度的讨论，矢量场的分类如下文所述。

若矢量场 $\boldsymbol{A}_1$ 的旋度恒为零，即 $\nabla \times \boldsymbol{A}_1 = 0$，称其为无旋场。无旋场可以表示为一个标量场 Φ 的负梯度，即

$$\boldsymbol{A}_1 = -\nabla\Phi \tag{1.6.52}$$

因为根据式(1.6.48)梯度的旋度等于零，即

$$\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$$

我们称 Φ 为 $\boldsymbol{A}_1$ 的势函数,并称能有上式表示的矢量场为有势场。无旋场也是有势场。利用斯托克斯定理可以得出无旋场在任意闭曲线上的环量恒为零,即

$$\oint_l \boldsymbol{A}_1 \cdot d\boldsymbol{l} = 0 \tag{1.6.53}$$

满足上式的矢量场叫保守场，无旋场也是保守场。由上式可知，保守场中场量的线积分(见图 1-27)与路径无关，即

$$\int_{l_1} \boldsymbol{A}_1 \cdot d\boldsymbol{l}_1 = \int_{l_2} \boldsymbol{A}_1 \cdot d\boldsymbol{l}_2 \tag{1.6.54}$$

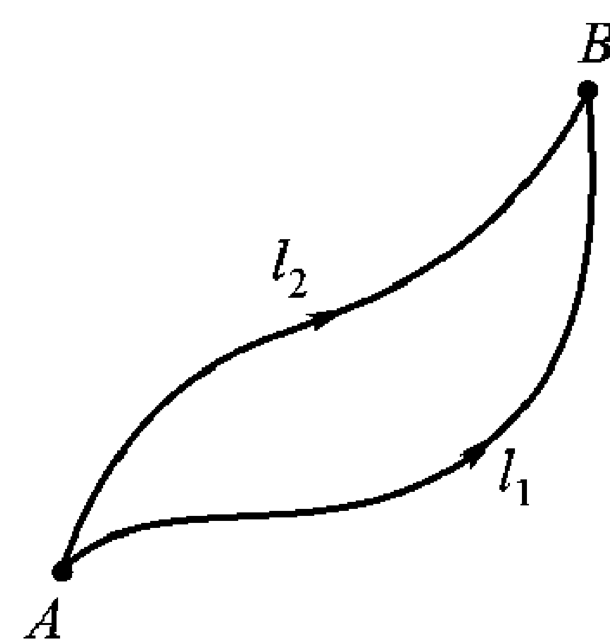


图 1-27　B 与 A 之间的线积分

若 $\boldsymbol{A}_2$ 的散度恒为零，则称此矢量场为管形场，也称为无源场(此处是指散度源)。

无源场总能表示为另一个矢量场的旋度，即

$$\boldsymbol{A}_2 = \nabla \times \boldsymbol{F} \tag{1.6.55}$$

因为根据式(1.6.47)旋度的散度等于零。

若在给定区域，矢量场的散度、旋度恒为零，则称此矢量场为调和场。调和场是指既无旋又无源的矢量场。

式(1.6.52)、(1.6.55)表示的关系以后还会讨论。

一个矢量场的性质由激发场的源来确定。源有两个，一个是散度源(也叫通量源)，另一个叫旋度源(也叫涡旋源)。那么反过来，若已知一个矢量场的

散度和旋度，能否惟一确定该矢量场？答案是肯定的，这就是亥姆霍兹定理。

亥姆霍兹定理：如果在体积 V 内矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度和旋度已知，在 V 的边界 S 上 $\boldsymbol{A}$ 的值也已知，则在 V 内任意一点 $\boldsymbol{A}$ 的值能惟一确定。

这一定理的证明略去。据此定理，可以将任一矢量场 $\boldsymbol{A}$ 分解为一个无旋场与一个无源场之和，即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2 \tag{1.6.56}$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是无旋场，$\boldsymbol{A}_2$ 是无源（散度源）场。

1.6.7 格林定理

格林（Green）定理给出了一空间区域中的场与该区域边界上场的关系。它是电磁场中常用到的一个重要定理。

1. 标量格林定理

若任意两个标量场 Φ 及 Ψ 在空间区域 V 中具有连续的二阶偏导数，则标量场 Φ 及 Ψ 满足下列等式：

$$\int_V(\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi+\Psi\nabla^2\Phi)\,\mathrm{d}V=\oint_S\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}S \tag{1.6.57}$$

$$\int_V(\Psi\nabla^2\Phi-\Phi\nabla^2\Psi)\,\mathrm{d}V=\oint_S\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{1.6.58}$$

式中 S 为包围区域 V 的封闭面，n 为封闭面 S 的正法线方向，指向区域 V 外。式（1.6.57）称为第一标量格林定理，式（1.6.58）称为第二标量格林定理。为了证明标量格林定理成立，由标量场 Φ 及 Ψ 构成矢量场 $\Psi\nabla\Phi$，利用散度定理，得

$$\int_V\nabla\cdot(\Psi\nabla\Phi)\,\mathrm{d}V=\oint_S\Psi\nabla\Phi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

根据散度的运算规则，上式中体积分的被积函数为

$$\nabla\cdot(\Psi\nabla\Phi)=\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi+\Psi\nabla^2\Phi$$

代入就可得式（1.6.57）。交换 Φ 及 Ψ 的位置，式（1.6.57）又可写为

$$\int_V(\nabla\Psi\cdot\nabla\Phi+\Phi\nabla^2\Psi)\,\mathrm{d}V=\oint_S\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

上式与式（1.6.57）相减，即可得式（1.6.58）。

2. 矢量格林定理

若任意两个矢量场 $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{Q}$ 在空间区域 V 中具有连续的二阶偏导数，则矢量场 $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{Q}$ 满足下列等式：

$$\int_V[(\nabla\times\boldsymbol{P})\cdot(\nabla\times\boldsymbol{Q})-\boldsymbol{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{Q}]\,\mathrm{d}V=\oint_S(\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.6.59}$$

$$\int_V [\boldsymbol{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{Q}]\mathrm{d}V=\oint_S(\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q}\times\nabla\times\boldsymbol{P})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.6.60}$$

式(1.6.59)及(1.6.60)分别称为第一、二矢量格林定理。矢量格林定理的证明可先利用矢量场 $\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{Q}$ 构成的另外两个矢量场 $\boldsymbol{P}\times\nabla\times\boldsymbol{Q}$ 及 $\boldsymbol{Q}\times\nabla\times\boldsymbol{P}$，然后将它们代入散度定理，并应用矢量恒等式

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}$$

按证明标量格林定理的方法进行即可。

从格林定理可以看出，它与散度定理类似，反映了两个场的体积分和面积分的关系，从而表示区域内的场与区域边界上的场之间的关系。利用格林定理，可由一种已知的场通过积分求另一种未知场。

例 1-11　在区域 V 中 $\nabla^2\Phi=0$，在区域 V 的封闭边界面 S 上 Φ 及 $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ 已知。求区域 V 中任一点的 $\Phi(\boldsymbol{r})$。

解：令

$$G=\frac{1}{4\pi R}=\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{1.6.61}$$

如图 1-28，取包围点 $\boldsymbol{r}$、半径为 a 的圆球面 S_a，在曲面 S 和曲面 S_a 所围的区域 V 中

$$\nabla^2\Phi=0 \tag{1.6.62}$$

$$\nabla^2 G=0 \tag{1.6.63}$$

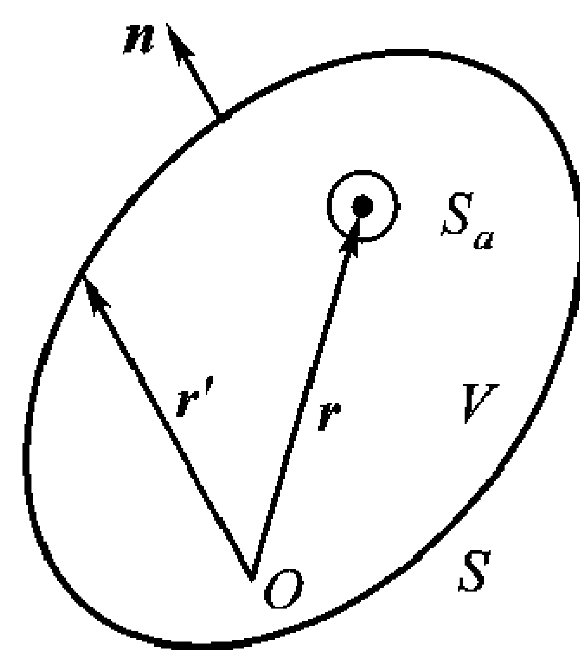


图 1-28　格林定理

利用标量第二格林定理和以上两式，标量场 Φ 与 G 满足

$$\int_V(G\nabla^2\Phi-\Phi\nabla^2G)\mathrm{d}V=\oint_S\left(G\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}S+\oint_{S_a}\left(G\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=0 \tag{1.6.64}$$

其中

$$\oint_{S_a}G\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}S=G(a)\oint_{S_a}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}S=G(a)\int_{V_a}\nabla^2\Phi\mathrm{d}V=0 \tag{1.6.65}$$

$$\oint_{S_a}\Phi\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}S=\oint_{S_a}\Phi\left(\frac{\partial}{\partial R}\frac{1}{4\pi R}\right)\mathrm{d}S=-\frac{1}{4\pi a^2}\oint_{S_a}\Phi\mathrm{d}S \tag{1.6.66}$$

$$\lim_{a\to0}\frac{1}{4\pi a^2}\int_{S_a}\Phi\mathrm{d}S=\Phi(\boldsymbol{r}) \tag{1.6.67}$$

由式(1.6.65)、(1.6.66)和式(1.6.64)得

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\oint_S\left(G\frac{\partial\Phi}{\partial n}-\Phi\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

1.7　正交坐标系

表示场量的空间位置首先要选好参照坐标系。常用的坐标系有直角坐标系、圆柱坐标系与球坐标系。这些坐标系中坐标轴之间彼此正交，故称为正交坐标系。当我们所研究的电磁系统边界面与坐标等于常数的面一致时，对电磁问题进行研究就方便得多。因为实际工程中遇到的边界面以平面、柱面、球面最多，所以这 3 种坐标系应用最广。前面的讨论都是在直角坐标系中进行的，本小节重点讨论圆柱坐标系与球坐标系以及直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系三者之间关系。

1.7.1　圆柱坐标系

图 1 – 29 所示的是圆柱坐标系，表示场量空间位置的 3 个坐标为 (ρ, φ, z)，坐标轴 ρ 为矢径 $\boldsymbol{r}$ 在 $x-y$ 平面的投影，φ 是从 x 轴计算的方位角，z 跟直角坐标系中 z 轴一致。(ρ, φ, z) 的变化范围为：$0 \leqslant \rho < \infty$，$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ 以及 $-\infty < z < \infty$。3 个坐标轴增加方向单位矢量 $(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{z}_0)$ 亦示于图中。它们在 $\rho=\rho_1$ 的圆柱面、垂直于 $x-y$ 面的半平面 $\varphi=\varphi_1$ 以及 $z=z_1$ 的水平面的交点上。$\boldsymbol{\rho}_0$ 是沿半径 ρ 向外的方向，$\boldsymbol{\varphi}_0$ 的方向在水平面内与圆柱面相切，$\boldsymbol{z}_0$ 则是垂直方向。

注意：在直角坐标系中，单位矢量 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$、$\boldsymbol{z}_0$ 都是常矢量，在圆柱坐标

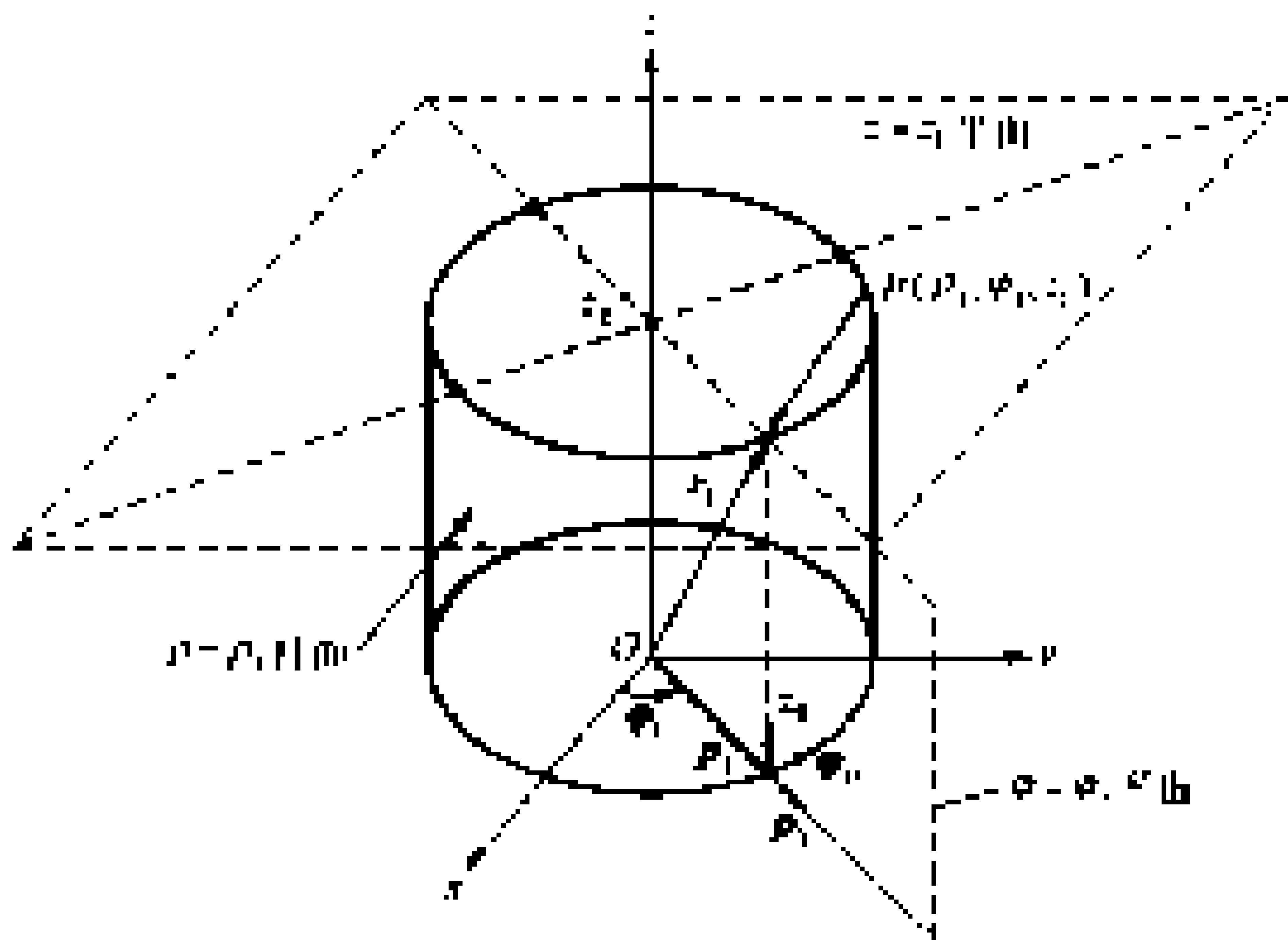


图 1 – 29　点 $P\ (\rho_1, \varphi_1, z_1)$ 在柱坐标系中的表示

系中，在矢量指向上仅 z_0 是常矢量，$\boldsymbol{\rho}_0$，$\boldsymbol{\varphi}_0$ 的指向都是方位角 φ 的函数，即

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{\rho}_0(\varphi),\quad \boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0(\varphi),\quad z = 常矢量 \tag{1.7.1}$$

在柱坐标系中矢径 $\boldsymbol{r}$（见图 1－28）表示为

$$\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{\rho}_0 + z z_0 \tag{1.7.2}$$

$\boldsymbol{\rho}_0$，$\boldsymbol{\varphi}_0$，z_0 三者彼此也正交，故具有性质

$$\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 = z_0 \cdot z_0 = 1 \tag{1.7.3}$$

$$\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0 \cdot z_0 = z_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0 = 0 \tag{1.7.4}$$

$$\boldsymbol{\rho}_0 \times \boldsymbol{\varphi}_0 = z_0,\quad \boldsymbol{\varphi}_0 \times z_0 = \boldsymbol{\rho}_0,\quad z_0 \times \boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0 \tag{1.7.5}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 在圆柱坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{A} = A_\rho\boldsymbol{\rho}_0 + A_\varphi\boldsymbol{\varphi}_0 + A_z z_0 \tag{1.7.6}$$

$\boldsymbol{A}$ 的模为

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_\rho^2 + A_\varphi^2 + A_z^2} \tag{1.7.7}$$

如图 1－30，柱坐标系中微分体积元中 3 个边长为

$$\mathrm{d}l_\rho = \mathrm{d}\rho,\quad \mathrm{d}l_\varphi = \rho\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}l_z = \mathrm{d}z \tag{1.7.8}$$

所以微分长度元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{\rho}_0\mathrm{d}\rho + \boldsymbol{\varphi}_0\rho\mathrm{d}\varphi + z_0\mathrm{d}z \tag{1.7.9}$$

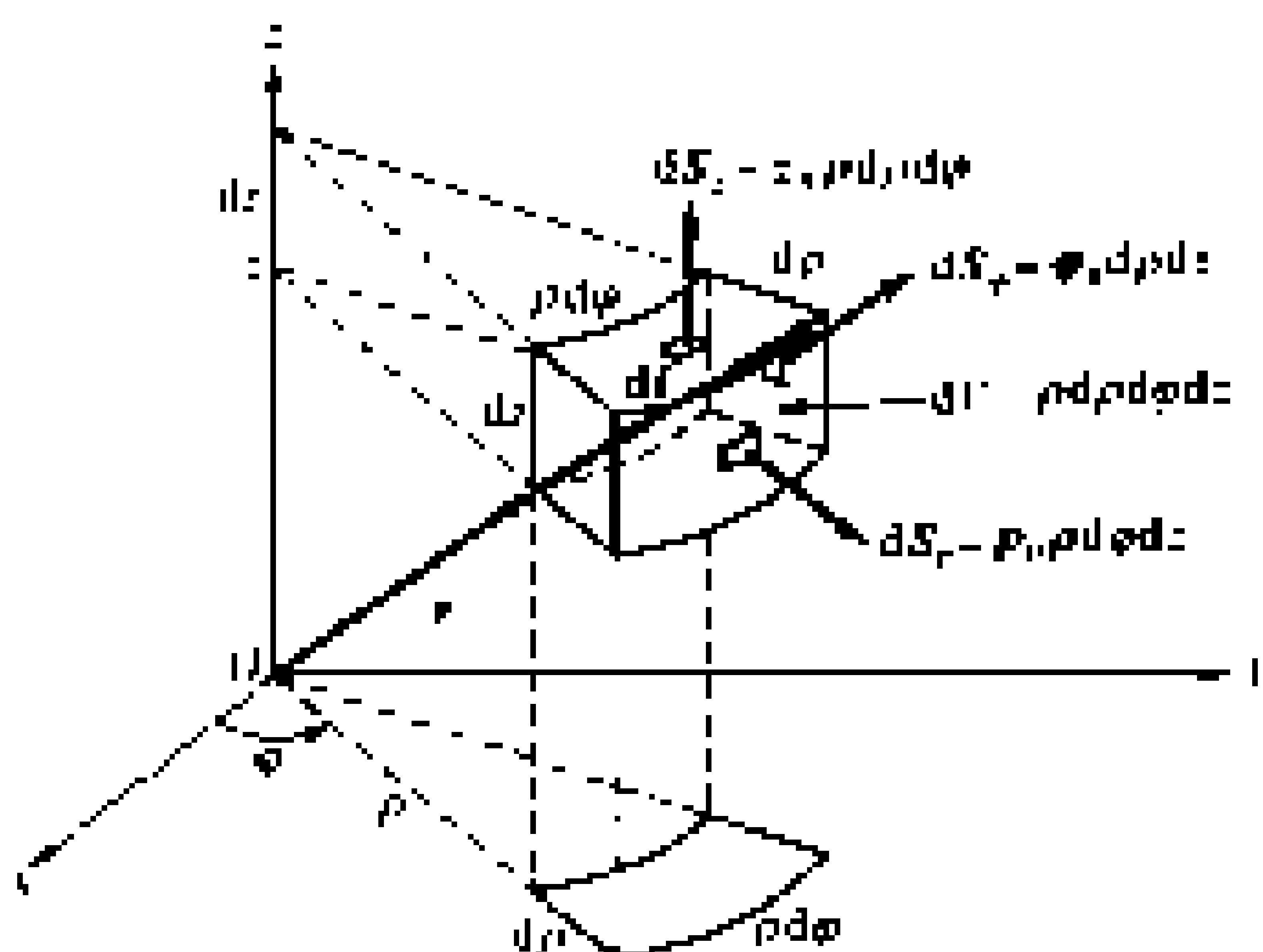


图 1－30　柱坐标系中微分体积元与面积元

而 3 个坐标面上的面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\rho$，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\varphi$，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_z$ 分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\rho = \boldsymbol{\rho}_0\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z \quad (\varphi - z\ 柱面) \tag{1.7.10}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\varphi = \boldsymbol{\varphi}_0\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z \quad (\rho - z\ 平面) \tag{1.7.11}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_z = z_0\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho \quad (\rho - \varphi\ 平面) \tag{1.7.12}$$

微分体积元 $\mathrm{d}V$ 则为

$$\mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \tag{1.7.13}$$

1.7.2　球坐标系

球坐标系中表示场量空间位置的3个坐标是(r,θ,φ)，见图1-31。

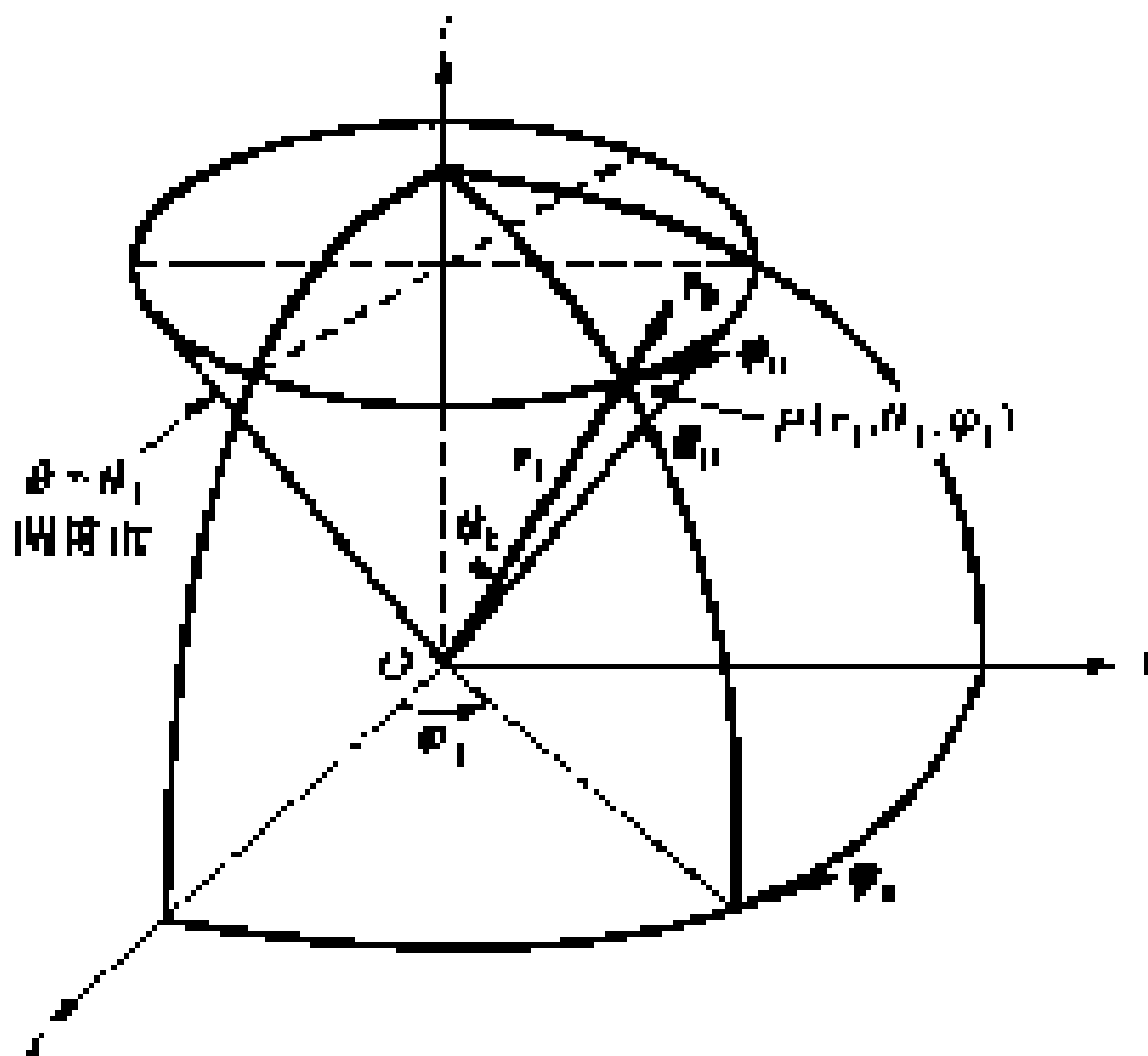


图1-31　点 P 在球坐标系中的坐标

坐标 r 等于常数的面是以原点为圆心的球面，θ 从 z 轴起计算，θ 等于常数的面是一个圆锥面，顶点在原点。方位角 φ 与柱坐标系中相同，φ 从 x 轴起计算。φ 等于常数的平面是垂直于 $x-y$ 的半平面。坐标 r，θ，φ 的变化范围为：$0\leqslant r<\infty$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$。在这3个坐标面的交点，同时也标出了3个坐标轴增加方向的单位矢量 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{\theta}_0$、$\boldsymbol{\varphi}_0$。

$\boldsymbol{\varphi}_0$ 是变矢量，因为它与柱坐标系单位矢量 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 是同一回事。$\boldsymbol{r}_0$ 明显地是变矢量，因为同在一片蓝天下，天顶方向各不同。$\boldsymbol{\theta}_0$ 的性质如何？这就要分析一下正南方向有无绝对意义。观察一下地球仪上的经线，如东经120°子午线，它形状是个半圆。南北方向就是子午线的切线方向，而圆上的切线方向处处皆不同。所以正南方向无绝对意义，说明 $\boldsymbol{\theta}_0$ 也是一个变矢量。由此得到

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0(\theta,\varphi),\quad \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}_0(\theta,\varphi),\quad \boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0(\varphi) \tag{1.7.14}$$

表示场空间位置的矢径 $\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{r}_0 \tag{1.7.15}$$

r 为坐标原点到欲研究场量所在点的距离。

单位矢量 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{\theta}_0$、$\boldsymbol{\varphi}_0$ 三者也正交，具有以下性质：

$$\boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 = 1 \tag{1.7.16}$$

$$\boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\theta}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0 \cdot \boldsymbol{r}_0 = 0 \tag{1.7.17}$$

$$\boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \boldsymbol{\theta}_0 \times \boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{r}_0, \quad \boldsymbol{\varphi}_0 \times \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{\theta}_0 \tag{1.7.18}$$

球坐标系中任一矢量 $\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r}_0 A_r + \boldsymbol{\theta}_0 A_\theta + \boldsymbol{\varphi}_0 A_\varphi \tag{1.7.19}$$

$\boldsymbol{A}$ 的模为

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_r^2 + A_\theta^2 + A_\varphi^2} \tag{1.7.20}$$

球坐标系中微分体积元(见图 1-32)的 3 个边长分别为

$$\mathrm{d}l_r = \mathrm{d}r, \quad \mathrm{d}l_\theta = r\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}l_\varphi = r\sin\theta\mathrm{d}\varphi \tag{1.7.21}$$

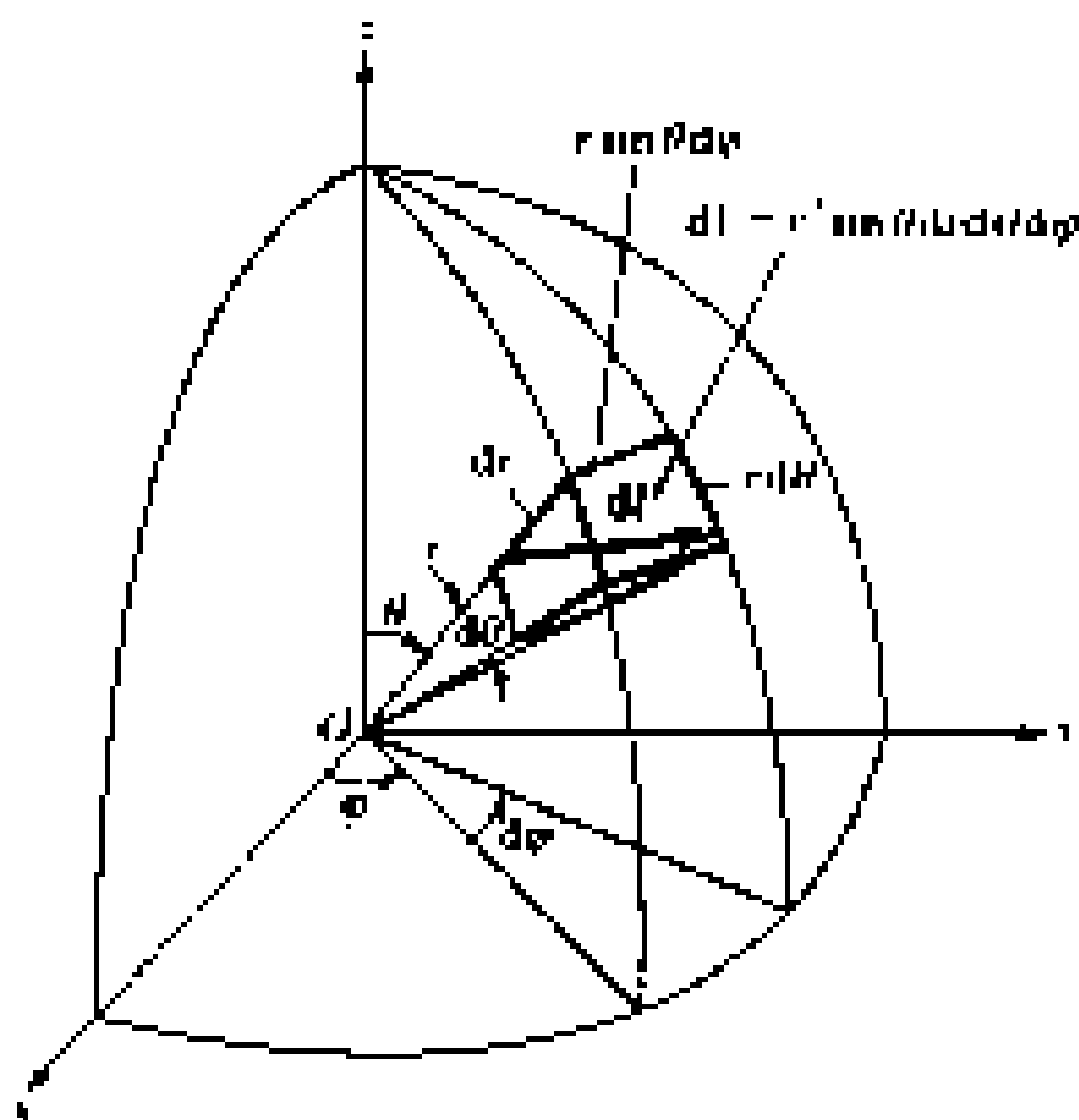


图 1-32 球坐标系中微分体积元

所以球坐标中微分长度元、微分面积元、微分体积元分别为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_0 \mathrm{d}r + \boldsymbol{\theta}_0 r\mathrm{d}\theta + \boldsymbol{\varphi}_0 r\sin\theta\mathrm{d}\varphi \tag{1.7.22}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_r = \boldsymbol{r}_0 r^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \quad (\theta - \varphi \text{ 球面}) \tag{1.7.23}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\theta = \boldsymbol{\theta}_0 r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \quad (r - \varphi \text{ 锥面}) \tag{1.7.24}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}_\varphi = \boldsymbol{\varphi}_0 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \quad (r - \theta \text{ 平面}) \tag{1.7.25}$$

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{1.7.26}$$

球坐标系中球面上的面积元 $\mathrm{d}S_r$ 对球心所张立体角 $\mathrm{d}\Omega$ 定义为

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S_r}{r^2} \tag{1.7.27}$$

整个球面对球心所张立体角 Ω 为

$$\Omega = \int \frac{\mathrm{d}S_r}{r^2} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi \tag{1.7.28}$$

1.7.3　坐标变换

同一矢量 $\boldsymbol{A}$ 在3个坐标系中有不同的表达式(1.6.14)、(1.7.6)、(1.7.19)。因为它们表示同一矢量，所以其坐标相互间可以转换。

由图1－29所示的圆柱坐标系与直角坐标系的几何关系可知，空间任一点 P 在直角坐标系中坐标 (x,y,z) 与圆柱坐标系中坐标 (ρ,φ,z) 的关系是：坐标 z 在两坐标系中相等，以及

$$\begin{cases} z = z & (1.7.29)\\ x = \rho\cos\varphi & (1.7.30)\\ y = \rho\sin\varphi & (1.7.31)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} & (1.7.32)\\ \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} & (1.7.33)\end{cases}$$

图1－31所示的球坐标系与直角坐标系关系是

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi & (1.7.34) \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad (1.7.34)\\ y = r\sin\theta\sin\varphi & (1.7.35) \quad \theta = \arctan\rho/z \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2} \quad (1.7.35)\\ z = r\cos\theta & (1.7.36) \quad \varphi = \arctan\dfrac{y}{x} \quad (1.7.36)\end{cases}$$

球坐标系坐标 (r,θ,φ) 与圆柱坐标系中坐标 (ρ,φ,z) 的关系是：方位角 φ 在两坐标系中相等以及

$$\begin{cases} \varphi = \varphi & (1.7.37)\\ z = r\cos\theta & (1.7.38)\\ \rho = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{z^2+\rho^2} & (1.7.39)\\ \theta = \arctan\dfrac{\rho}{z} & (1.7.40)\end{cases}$$

表1－6给出了3种坐标系下的坐标变换关系。

下面利用坐标变换关系研究同一矢量在不同坐标系中的表示，并通过直角坐标系中矢量 $\boldsymbol{A}_{\text{rec}}$ 变换到柱坐标中矢量 $\boldsymbol{A}_{\text{cyl}}$ 的例子说明。

设在直角坐标系中矢量

$$\boldsymbol{A}_{\text{rec}} = \boldsymbol{x}_0A_x + \boldsymbol{y}_0A_y + \boldsymbol{z}_0A_z = \boldsymbol{x}_0x^2y + \boldsymbol{y}_0y^2z + \boldsymbol{z}_0x^2z$$

该矢量在柱坐标中表达式为

表 1－6　三种坐标系下的坐标变换关系

变　　换	坐 标 变 量	单 位 矢 量	矢 量 分 量
直角坐标→ 圆柱坐标	$\rho = \sqrt[+]{x^2 + y^2}$ $\varphi = \arctan(y/x)$ $z = z$	$\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{x}_0\cos\varphi + \boldsymbol{y}_0\sin\varphi$ $\boldsymbol{\varphi}_0 = -\boldsymbol{x}_0\sin\varphi + \boldsymbol{y}_0\cos\varphi$ $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}_0$	$A_\rho = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi$ $A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$ $A_z = A_z$
圆柱坐标→ 直角坐标	$x = \rho\cos\varphi$ $y = \rho\sin\varphi$ $z = z$	$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\rho}_0\cos\varphi - \varphi_0\sin\varphi$ $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{\rho}_0\sin\varphi + \varphi_0\cos\varphi$ $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}_0$	$A_x = A_\rho\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi$ $A_y = A_\rho\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi$ $A_z = A_z$
直角坐标→ 球坐标	$r = \sqrt[+]{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \arctan\left[\sqrt[+]{x^2 + y^2}/z\right]$ $\varphi = \arctan(y/x)$	$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{x}_0\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{y}_0\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{z}_0\cos\theta$ $\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{x}_0\cos\theta\cos\varphi + \boldsymbol{y}_0\cos\theta\sin\varphi - \boldsymbol{z}_0\sin\theta$ $\varphi_0 = -\boldsymbol{x}_0\sin\varphi + \boldsymbol{y}_0\cos\varphi$	$A_r = A_x\sin\theta\cos\varphi + A_y\sin\theta\sin\varphi + A_z\cos\theta$ $A_\theta = A_x\cos\theta\cos\varphi + A_y\cos\theta\sin\varphi - A_z\sin\theta$ $A_\varphi = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$
球坐标→ 直角坐标	$x = r\sin\theta\cos\varphi$ $y = r\sin\theta\sin\varphi$ $z = r\cos\theta$	$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{r}_0\sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{\theta}_0\cos\theta\cos\varphi - \boldsymbol{\varphi}_0\sin\varphi$ $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{r}_0\sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{\theta}_0\cos\theta\sin\varphi + \boldsymbol{\varphi}_0\cos\varphi$ $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{r}_0\cos\theta - \boldsymbol{\theta}_0\sin\theta$	$A_x = A_r\sin\theta\cos\varphi + A_\theta\cos\theta\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi$ $A_y = A_r\sin\theta\sin\varphi + A_\theta\cos\theta\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi$ $A_z = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta$
圆柱坐标→ 球坐标	$r = \sqrt[+]{\rho^2 + z^2}$ $\theta = \arctan(\rho/z)$ $\varphi = \varphi$	$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{\rho}_0\sin\theta + \boldsymbol{z}_0\cos\theta$ $\boldsymbol{\theta}_0 = \boldsymbol{\rho}_0\cos\theta - \boldsymbol{z}_0\sin\theta$ $\boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0$	$A_r = A_\rho\sin\theta + A_z\cos\theta$ $A_\theta = A_\rho\cos\theta - A_z\sin\theta$ $A_\varphi = A_\varphi$
球坐标→ 圆柱坐标	$\rho = r\sin\theta$ $\varphi = \varphi$ $z = r\cos\theta$	$\boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{r}_0\sin\theta + \boldsymbol{\theta}_0\cos\theta$ $\boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0$ $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{r}_0\cos\theta - \boldsymbol{\theta}_0\sin\theta$	$A_\rho = A_r\sin\theta + A_\theta\cos\theta$ $A_\varphi = A_\varphi$ $A_z = A_r\cos\theta - A_\theta\sin\theta$

$$\boldsymbol{A}_{\text{cyl}} = \boldsymbol{\rho}_0 A_\rho + \boldsymbol{\varphi}_0 A_\varphi + \boldsymbol{z}_0 A_z$$

$\boldsymbol{A}_{\text{rec}}$与 $\boldsymbol{A}_{\text{cyl}}$表示同一矢量，显然有关系 $\boldsymbol{A}_{\text{rec}} = \boldsymbol{A}_{\text{cyl}}$，$\boldsymbol{A}_\rho$是$\boldsymbol{A}_{\text{cyl}}$在 $\boldsymbol{\rho}_0$ 方向投影，故得关系

$$\begin{aligned} A_\rho &= \boldsymbol{A}_{\text{cyl}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 = \boldsymbol{A}_{\text{rec}} \cdot \boldsymbol{\rho}_0 = (\boldsymbol{x}_0 A_x + \boldsymbol{y}_0 A_y + \boldsymbol{z}_0 A_z) \cdot (\boldsymbol{x}_0 \cos\varphi + \boldsymbol{y}_0 \sin\varphi) \\ &= A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} A_\varphi &= \boldsymbol{A}_{\text{rec}} \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 = (\boldsymbol{x}_0 A_x + \boldsymbol{y}_0 A_y + \boldsymbol{z}_0 A_z) \cdot [\boldsymbol{x}_0(-\sin\varphi) + \boldsymbol{y}_0 \cos\varphi] \\ &= -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi \end{aligned}$$

$$A_z = \boldsymbol{A}_{\text{rec}} \cdot \boldsymbol{z}_0 = (\boldsymbol{x}_0 A_x + \boldsymbol{y}_0 A_y + \boldsymbol{z}_0 A_z) \cdot \boldsymbol{z}_0 = A_z$$

将 $A_x = x^2 y$，$A_y = y^2 z$，$A_z = x^2 z$ 代入A_ρ、A_φ、A_z，得到

$$A_\rho = x^2 y \cos\varphi + y^2 z \sin\varphi$$

$$A_\varphi = -x^2 y \sin\varphi + y^2 z \cos\varphi$$

$$A_z = x^2 z$$

将(x, y, z)用(ρ, φ, z)表示，得到

$$\begin{aligned} A_\rho &= (\rho^2 \cos^2\varphi)(\rho \sin\varphi)\cos\varphi + (\rho^2 \sin^2\varphi)(z)\sin\varphi \\ A_\varphi &= -(\rho^2 \cos^2\varphi)(\rho \sin\varphi)(\sin\varphi) + (\rho^2 \sin^2\varphi)(z)\cos\varphi \\ A_z &= (\rho^2 \cos^2\varphi) z \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{\text{cyl}} = \boldsymbol{\rho}_0 & (\rho^3 \cos^3\varphi \sin\varphi + \rho^2 z \sin^3\varphi) \\ & - \boldsymbol{\varphi}_0 (\rho^3 \cos^2\varphi \sin^2\varphi - \rho^2 z \sin^2\varphi \cos\varphi) \\ & + \boldsymbol{z}_0 (\rho^2 \cos^2\varphi) z \end{aligned}$$

1.7.4 坐标单位矢量对空间坐标的偏导数

各坐标系中单位矢量是最简单、最基本的矢量函数。如果是常数矢量，对空间坐标的偏导数当然等于零。直角坐标系中 $\boldsymbol{x}_0$、$\boldsymbol{y}_0$、$\boldsymbol{z}_0$ 是常矢量，对 3 种常用坐标系中 7 个独立坐标变量$(x, y, z, \rho, \varphi, r, \theta)$的偏导数全部等于零，即

$$\frac{\partial(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{z}_0)}{\partial(x, y, z, \rho, \varphi, r, \theta)} = 0 \tag{1.7.41}$$

柱坐标系下，$\boldsymbol{\rho}_0$、$\boldsymbol{\varphi}_0$ 是变矢量，仅是方位角 φ 的函数，因此对 4 个坐标变量(z, ρ, r, θ)的偏导数均为零，即

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\rho}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)}{\partial(z, \rho, r, \theta)} = 0 \tag{1.7.42}$$

同时有

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial \varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_0}{\partial \varphi} = -\boldsymbol{\rho}_0 \tag{1.7.43}$$

式(1.7.43)可以通过作图法很容易得到，如图 1－33 所示。此外我们从几何关系很容易证明

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{\rho}\boldsymbol{\varphi}_0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_0}{\partial x} = \frac{\sin\varphi}{\rho}\boldsymbol{\rho}_0 \\ \frac{\partial \boldsymbol{\rho}_0}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{\rho}\boldsymbol{\varphi}_0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_0}{\partial y} = -\frac{\cos\varphi}{\rho}\boldsymbol{\rho}_0\end{aligned}\right\} \tag{1.7.44}$$

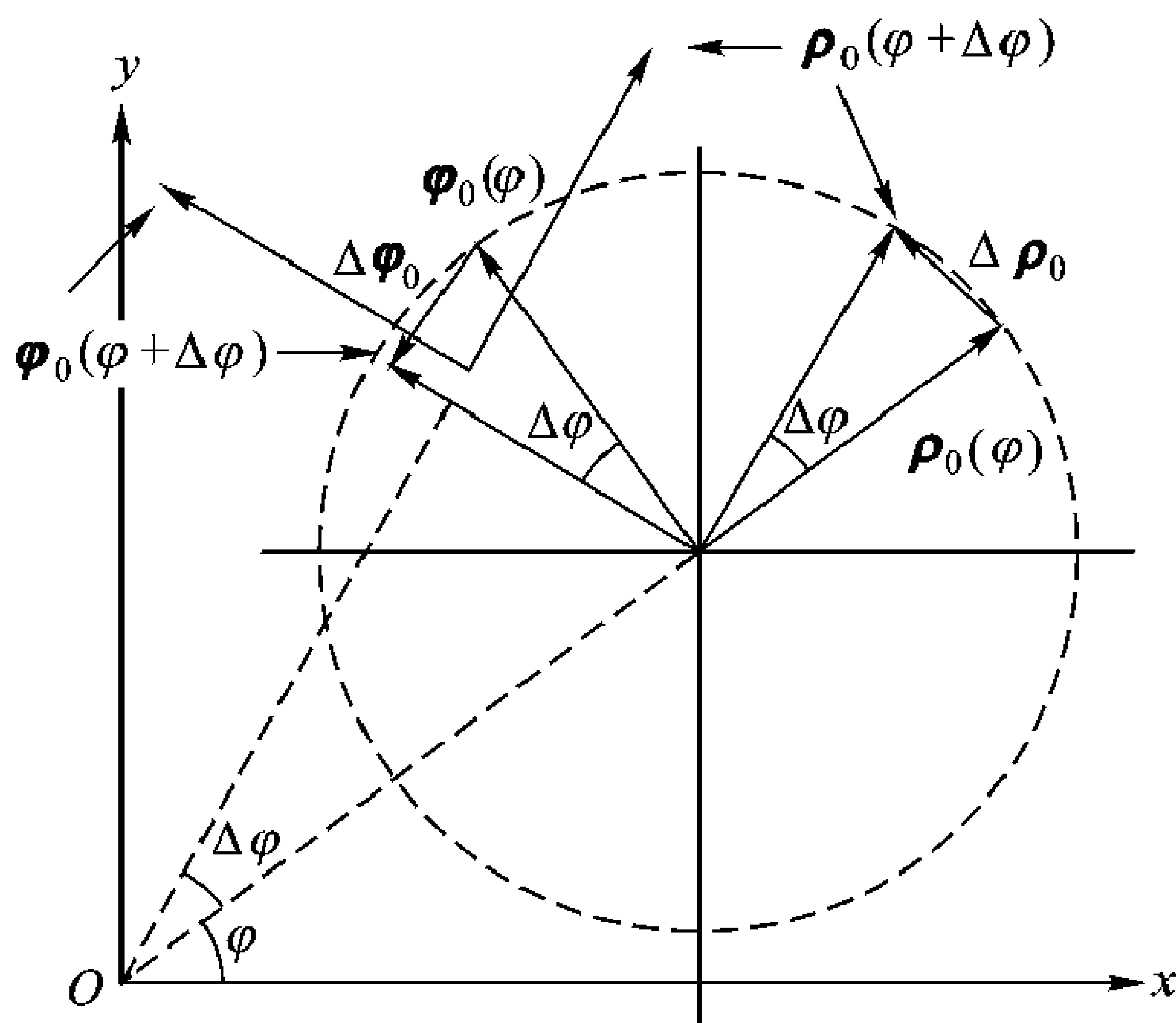


图 1－33　式(1.7.46)的图解

在球坐标下，$\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{\theta}_0$ 依赖于(θ,φ)，因此对坐标变量 r 的偏导数均为 0，即

$$\frac{\partial(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial r} = 0 \tag{1.7.45}$$

通过几何作图很容易得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial \theta} = \boldsymbol{\theta}_0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_0}{\partial \theta} = -\boldsymbol{r}_0 \tag{1.7.46}$$

同时很容易证明

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial \varphi} = \boldsymbol{\varphi}_0 \sin\theta, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\theta}_0}{\partial \varphi} = \varphi_0 \cos\theta \tag{1.7.47}$$

例 1－12　证明式(1.7.50)与式(1.7.46)第二式是相容的。

解：根据$\dfrac{\partial(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})}{\partial u} = \boldsymbol{A}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial u} + \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial u}\times\boldsymbol{B}$ 以及式(1.7.50)，可得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_0}{\partial \varphi} &= \frac{\partial(\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \varphi} \\ &= \boldsymbol{r}_0\times\frac{\partial \boldsymbol{\theta}_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial \varphi}\times\boldsymbol{\theta}_0 \\ &= \boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{\varphi}_0\cos\theta + \boldsymbol{\varphi}_0\sin\theta\times\boldsymbol{\theta}_0 = -\boldsymbol{\theta}_0\cos\theta - \boldsymbol{r}_0\sin\theta \\ &= -\boldsymbol{\rho}_0\end{aligned}$$

此即式(1.7.46)。

1.7.5 梯度、散度和旋度在柱坐标与球坐标系下表达式

前面讨论的梯度、散度和旋度，其定义与所选坐标系无关，因许多问题在柱坐标系、球坐标系下计算更方便，故需要应用柱坐标、球坐标下梯度、散度、旋度的表达式。

在圆柱坐标系下，算子∇可表示为

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial\rho}\boldsymbol{\rho}_0+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\boldsymbol{\varphi}_0+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0 \tag{1.7.48}$$

设矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\rho}_0A_\rho+\boldsymbol{\varphi}_0A_\varphi+\boldsymbol{z}_0A_z$，标量 $\Phi=\Phi(\rho,\varphi,z)$，则

$$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\boldsymbol{\rho}_0+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\boldsymbol{\varphi}_0+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{z}_0 \tag{1.7.49}$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \tag{1.7.50}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.7.51}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\rho}_0 & \rho\boldsymbol{\varphi}_0 & \boldsymbol{z}_0\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix} \tag{1.7.52}$$

在球坐标系下，算子∇为

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{r}_0+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{\theta}_0+\frac{\partial}{r\sin\theta\,\partial\varphi}\boldsymbol{\varphi}_0 \tag{1.7.53}$$

设

$$\boldsymbol{A}=A_r\boldsymbol{r}_0+A_\theta\boldsymbol{\theta}_0+A_\varphi\boldsymbol{\varphi}_0,\quad \Phi=\Phi(r,\theta,\varphi)$$

则

$$\nabla\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\boldsymbol{r}_0+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\boldsymbol{\theta}_0+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\boldsymbol{\varphi}_0 \tag{1.7.54}$$

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \tag{1.7.55}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial(r^2A_r)}{r^2\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right] \tag{1.7.56}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_0 & r\boldsymbol{\theta}_0 & r\sin\theta\boldsymbol{\varphi}_0\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix} \tag{1.7.57}$$

例 1-13 求 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{r}_0(a^3\cos\theta/r^2)-\boldsymbol{\theta}_0(a^3\sin\theta/r^2)$在（$a/2$，0，π）点的散度。

解：在球坐标系中

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{E}&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(E_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(a^3\cos\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{a^3\sin^2\theta}{r^2}\right)\\&=0-\frac{2a^3\cos\theta}{r^3}=-\frac{2a^3\cos\theta}{r^3}\end{aligned}$$

在$(a/2,0,\pi)$点$\nabla\cdot\boldsymbol{E}\big|_{(a/2,0,\pi)}=16$。

例 1-14 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\rho}_0 10\mathrm{e}^{-2\rho}\cos\varphi+\boldsymbol{z}_0 10\sin\varphi$，求$\nabla\times\boldsymbol{A}$在(2,0,3)点值。

解：在柱坐标系中

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{\rho}_0 & \rho\boldsymbol{\varphi}_0 & \boldsymbol{z}_0\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 10\mathrm{e}^{-2\rho}\cos\varphi & 0 & 10\sin\varphi\end{vmatrix}=\boldsymbol{\rho}_0\frac{10\cos\varphi}{\rho}+\boldsymbol{z}_0\frac{10\mathrm{e}^{-2\rho}}{\rho}\sin\varphi$$

在(2,0,3)点$\nabla\times\boldsymbol{A}\big|_{(2,0,3)}=5\boldsymbol{\rho}_0$。

1.8 电荷与电流分布的模型

电荷与电流是激发电磁场的源。电荷与电流怎么表示呢？

1. 体电荷模型与体电荷密度 $\boldsymbol{\rho}_v$（单位为 C/m³）

任何电量 Q 的存储必须占用有限大小的体积 V。体电荷密度 ρ_v 的定义是

$$\boldsymbol{\rho}_v(\boldsymbol{r}',t)=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V}\tag{1.8.1}$$

式中 $\boldsymbol{r}'$是电荷源的坐标，ΔQ 是元体积 ΔV 内包含的电荷。

体积 V'内的总电荷为

$$Q(t)=\int_{V'}\rho_v(\boldsymbol{r}',t)\,\mathrm{d}V'\tag{1.8.2}$$

2. 面电荷模型与面电荷密度 $\boldsymbol{\rho}_s$（单位为 C/m²）

任何有限电量 Q 的存储必须占用有限大小的曲面 S。面电荷密度 ρ_s 的定义是

$$\boldsymbol{\rho}_s(\boldsymbol{r}',t)=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta S}\tag{1.8.3}$$

曲面 S 上总电荷为

$$Q_S(t)=\int_{S'}\rho_s(\boldsymbol{r}',t)\,\mathrm{d}S'\tag{1.8.4}$$

3. 线电荷模型与线电荷密度 $\boldsymbol{\rho_l}$（单位为 C/m）

任何有限电量的存储只占用有限长度的曲线 l 叫线电荷。线电荷密度 ρ_l 的定义是

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} \tag{1.8.5}$$

长度 l 的曲线占有的总电荷为

$$Q_l(t) = \int_{l'} \rho_l(\boldsymbol{r}', t)\, \mathrm{d}l' \tag{1.8.6}$$

4. 点电荷模型与点电荷系

有限电量 Q 可以存储在空间内一个或有限多个点上，点仅占据空间一个位置，无广延性，因此数学意义上的点电荷密度是 $\pm\infty$（C/m^3）。利用 δ 函数，位于 $\boldsymbol{r}_1$ 或(x_1, y_1, z_1)的点电荷可表示为

$$\rho(x', y', z') = q\delta(x' - x_1)\delta(y' - y_1)\delta(z' - z_1) \tag{1.8.7}$$

或

$$\rho(\boldsymbol{r}') = q\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_1) \tag{1.8.8}$$

N 个点电荷模型可表示为

$$\rho(\boldsymbol{r}') = \sum_{n=1}^{N} q_n \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_n) \tag{1.8.9}$$

式中 $\boldsymbol{r}_n$ 表示第 n 个点电荷的空间位置。

5. 体电流密度 $\boldsymbol{J}$ 与体电流元 $\boldsymbol{J}\mathrm{d}V'$

电荷运动导致电流。在气体或真空中电流密度用 $\boldsymbol{J}_v$ 表示，设载流子的体密度为 ρ_v（单位为 C/m^3），漂移速度为 v（m/s），电流密度 $\boldsymbol{J}_v$ 定义为

$$\boldsymbol{J}_v = \rho_v \boldsymbol{v} \tag{1.8.10}$$

注意，体电流密度的量纲不是 A/m^3，而是 A/m^2。

导体中电流密度用 $\boldsymbol{J}_c$ 表示，它与所加电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$\boldsymbol{J}_c = \sigma \boldsymbol{E} \tag{1.8.11}$$

式中 σ 为导体的电导率，单位为西门子每米(S/m)，E 为电场强度，单位为伏每米(V/m)，所以 $\boldsymbol{J}_c$ 的单位也是安培每平方米(A/m^2)。

若已知电流密度 $\boldsymbol{J}$，则穿过曲面 S 的电流强度 $I(t)$为

$$I(t) = \int_S \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}' \tag{1.8.12}$$

所以电流强度不是矢量，而是标量。

6. 面电流密度 $\boldsymbol{J}_s$ 与面电流密度元 $\boldsymbol{J}_s\mathrm{d}\boldsymbol{S}'$

面电流密度 $\boldsymbol{J}_s$ 定义为：载流子的面电流密度元 ρ_s 与载流子漂移速度$\boldsymbol{v}$ 之积

$$\boldsymbol{J}_s = \rho_s \boldsymbol{v} \tag{1.8.13}$$

注意其量纲不是 A/m^2，而是 A/m。

考虑以任一源点 $\boldsymbol{r}'$为中心的面积元 dS'，若此处面电流密度 $\boldsymbol{J}_s$ 不是零矢量，则 $\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r}')dS'$称为面电流元，它的单位是安培米(A•m)。

7. 线电流 I 与电流元 $Id\boldsymbol{l}$

线电流 I 定义为线电荷密度 ρ_l 与线电荷漂移速率 v 之积

$$I = \rho_l v \tag{1.8.14}$$

所以线电流的单位是 A，而不是 A/m，即不存在线电流密度。

本章要点

- 电磁波在自由空间的传播及其遇到障碍物时发生的过程，电磁波通过天线的辐射、接收，电磁波沿波导的定向传播，以及对电磁信号进行加工、处理的各类器件，所有这些都是各类电磁工程应用中必须解决的问题。这些问题构成了本书的大部分内容。
- 从两点电荷间相互作用得出带电体周围存在电场，从两通电导线间相互作用得出通电导线周围存在磁场。如果电荷、电流不随时间变化，电场、磁场也不随时间变化，彼此独立，称为静态场。如果电荷、电流随时间变化，电场、磁场都随时间变化，称为时变场。随时间变化的电场产生磁场，随时间变化的磁场产生电场，时变场的电场和磁场耦合在一起，彼此不独立。
- 即使产生电磁波的源局限在很小的区域内，其相互作用也能以电磁波的形式以光速向外传播。
- 外加电场可以使介质极化，极化介质中的场除了外加电场外，又有因介质极化感生的电场。同样，磁场可以使介质磁化，磁化介质中的场除了外加磁场外，又有因介质磁化感生的磁场。在电场的作用下，荷电粒子的迁移将形成电流。介质的这些电磁特性由本构关系描述，它们是 $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$。
- 波是物质运动的基本形式，并以一定速度运动，有能量。真空中电磁波以光速 3×10^8 m/s 传播，波传播的时间周期性用周期 T 描述，T 的倒数为频率 $f = 1/T$，空间周期性用波长 λ 表示。波的角频率 $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$。频率一般由波源决定。传播常数 k 是波的主要特征参数，由 k 可决定波的波长与波的传播速度：

  $$\lambda = 2\pi/k, \quad v = \omega/k = f\lambda$$

  由于$(T、\omega)$与$(\lambda、k)$等价，故 k 又称空间频率。
- 随时间作简谐变化的标量波可以用一个复数表示，“表示”的物理意义是该复数乘 $e^{j\omega t}$取实部就等于随时间作简谐变化的波。引入波的复数表示后，

对时间的微分、积分运算简化为乘与除的代数运算，乘积量的时间平均值简化为取实部的运算。

- 电磁波谱是一项宝贵的资源，不同波段的电磁波具有不同的传播特性。正是这些特性决定了电磁波的应用。
- 描述电磁运动的场量都是空间和时间的矢量函数。表示场量的空间位置要选好一个坐标系，常用的坐标系有直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系。具体的电磁问题的处理与坐标系的合理选择关系极大，边界面与坐标等于常数的面相重合是选择坐标系的一个重要原则。空间任一点在不同坐标系中的坐标相互间可以转换。
- 只用大小就能表示的一类物理量叫标量，而同时要用大小及方向才能表示的一类物理量叫矢量。场是物质存在的一种形态，但有别于实物粒子，有标量场和矢量场之分。激发电场的电荷密度源 ρ 是标量，激发磁场的电流密度 $\boldsymbol{J}$ 是矢量，表征电磁场特征的物理量——电场强度 $\boldsymbol{E}$、电通量密度(或电位移)$\boldsymbol{D}$、磁感应强度(或磁通量密度)$\boldsymbol{B}$ 及磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 是矢量。
- 标量场 Φ 的性质可用梯度 $\nabla\Phi$ 充分地描述。$\nabla\Phi$ 是矢量，$\nabla\Phi$ 的方向即场变化最大的方向，$\nabla\Phi$ 的模 $|\nabla\Phi|$ 就是场变化最大方向的变化率(即最大方向导数)，$\nabla\Phi$ 在任一方向的投影就是该方向的变化率(即该方向的方向导数)。
- 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的性质可用矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 和旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 充分地描述。

  $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 是标量，表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 通量的体密度。空间给定点 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 大于零，表示从该点矢量 $\boldsymbol{A}$ 有净通量流出，说明该点存在着通量源；$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 小于零，表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 有净的通量流入，说明该点存在着通量的负源；$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 从该点流出的通量等于流入的通量。

  $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 是矢量，$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 在某一给定方向的投影就是该方向的环量面密度。当面积元法线 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向与 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的方向一致时得到最大的环量面密度，所以给定点 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的模就是该点最大的环量面密度，得到最大环量面密度的面元法线方向就是旋度 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 的方向。
- 散度定理与斯托克斯定理将矢量 $\boldsymbol{A}$ 及其所产生的场 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$、$\nabla\times\boldsymbol{A}$ 联系起来。
- 梯度、旋度、散度的定义与所选坐标系无关，在不同坐标系中有不同的表达式。
- 算符 ∇ 是一个微分运算符号，但又能当作一个矢量来用，而它又与一般的矢量不同，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 有意义，但 $\boldsymbol{A}\cdot\nabla$ 就没有人定义过。
- 梯度的散度记为 $\nabla\cdot\nabla$ 或 ∇^2，叫做拉普拉斯算子。
- 激励电磁场的源，电荷密度 ρ 与电流密度 $\boldsymbol{J}$ 的表示，对掌握电磁运动规律很重要。

习题

1.1 设 $\boldsymbol{E}=E_y\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{y}_0 10^{-3}\cos(2\pi\times10^6 t+2\pi\times10^{-2}x)$ V/m，求矢量 $\boldsymbol{E}$ 的方向，波的传播方向，波的幅度，频率 f，相位常数 k，相速 v_p。

1.2 写出以下时谐变量的复数表示(如果可能的话)。

(1) $V(t)=6\cos(\omega t+\pi/4)$　　(2) $I(t)=-8\sin\omega t$

(3) $A(t)=3\sin\omega t-2\cos\omega t$　　(4) $C(t)=6\cos(120\pi t-\pi/2)$

(5) $D(t)=1-\cos\omega t$　　(6) $U(t)=\sin(\omega t+\pi/3)\sin(\omega t+\pi/6)$

1.3 由以下复数写出相应的时谐变量。

(1) $C=1+\mathrm{j}$　　(2) $C=4\exp(\mathrm{j}0.8)$

(3) $C=3\exp(\mathrm{j}\pi/2)+4\exp(\mathrm{j}0.8)$

1.4 假定 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{x}_0+\mathrm{j}\boldsymbol{y}_0+(1+\mathrm{j}2)\boldsymbol{z}_0$，$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{x}_0-(1+2\mathrm{j})\boldsymbol{y}_0+\mathrm{j}\boldsymbol{z}_0$，求：$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^*$，$\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}^*]$。

1.5 计算下列标量场的梯度。

(1) $u=x^2y^2z^2$

(2) $u=2x^2+y^2-z^2$

(3) $u=xy+yz+xz$

(4) $u=x^2+y^2+2xy$

(5) $u=xyz$

1.6 求曲面 $z=x^2+y^2$ 在点(1.1.2)处的法线方向。

1.7 求下列矢量场的散度、旋度。

(1) $\boldsymbol{A}=x^2\boldsymbol{x}_0+y^2\boldsymbol{y}_0+z^2\boldsymbol{z}_0$

(2) $\boldsymbol{A}=(y+z)\boldsymbol{x}_0+(x+z)\boldsymbol{y}_0+(x+y)\boldsymbol{z}_0$

(3) $\boldsymbol{A}=(x+y)\boldsymbol{x}_0+(x^2+y^2)\boldsymbol{y}_0$

(4) $\boldsymbol{A}=5\boldsymbol{x}_0+6yz\boldsymbol{y}_0+x^2\boldsymbol{z}_0$

1.8 求 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 和 $\nabla\times\boldsymbol{A}$：

(1) $\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)=\boldsymbol{\rho}_0\rho^2\cos\varphi+\boldsymbol{\varphi}_0\rho\sin\varphi$；

(2) $\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=\boldsymbol{r}_0 r\sin\theta+\boldsymbol{\theta}_0\dfrac{1}{r}\sin\theta+\boldsymbol{\varphi}_0\dfrac{1}{r^2}\cos\theta$。

1.9 求 z 方向无限长线电流 $\boldsymbol{z}_0 I\delta(x)\delta(y)$ 激发的恒定磁场 $\boldsymbol{H}$ 及其旋度 $\nabla\times\boldsymbol{H}$。

1.10 求球坐标中单位矢量 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{\theta}_0$、$\boldsymbol{\varphi}_0$ 的旋度。

$\nabla\times\boldsymbol{r}_0=0$

$\nabla\times\boldsymbol{\theta}_0=\boldsymbol{\varphi}_0\dfrac{1}{r}$

$\nabla\times\boldsymbol{\varphi}_0=(\boldsymbol{r}_0\cot\theta-\boldsymbol{\theta}_0)/r$

1.11 若矢量场 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{x}_0$，求 $\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的值，其中 S 是由 $x^2+y^2=r^2$，$z=0$，$z=h$ 组成的闭合曲面。

1.12 假定 $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{x}_0 + A_y \boldsymbol{y}_0 + A_z \boldsymbol{z}_0$，$\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{x}_0 + B_y \boldsymbol{y}_0 + B_z \boldsymbol{z}_0$，证明式(1.6.49)是正确的。

1.13 证明式(1.6.50)、(1.6.51)：

$$\nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cdot \nabla \Phi + \nabla \Phi \boldsymbol{A}$$

$$\nabla \times (\Phi \boldsymbol{A}) = \nabla \Phi \times \boldsymbol{A} + \nabla \Phi \times \boldsymbol{A}$$

1.14 证明式(1.6.47)、(1.6.48)：

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$$

1.15 将 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{rec}} = \boldsymbol{x}_0 x + \boldsymbol{y}_0 y + \boldsymbol{z}_0 z$ 变换到 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{cyl}}$ 和 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{sph}}$（下标 rec、cyl、sph 分别表示直角坐标、柱坐标、球坐标中量）。

1.16 将柱坐标中矢量 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{cyl}} = \boldsymbol{\rho}_0 \rho^2 + \boldsymbol{\varphi}_0 \cos\varphi$ 变换到直角坐标、球坐标中矢量 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{rec}}$、$\boldsymbol{A}_{\mathrm{sph}}$。

1.17 导出在直角坐标系与圆柱坐标系中有如下关系：

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

并以 $f(\rho, \varphi) = \rho^2 + \tan\varphi$ 或 $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{y}{x}$ 为例，进行验证。

第 2 章　传输线基本理论与圆图

由平行双导体构成的导引电磁波结构叫做传输线。平行双导线、同轴线和微带线是我们熟知的传输线。如果传输线长度与波长相比很小，那么在不计传输线损耗的情况下，传输线负载端的电压、电流可以认为与源端没有什么差别。但是当频率很高，传输线长度可与波长相比时，即使传输线没有损耗，负载端的电压、电流与源端仍可以差别很大。现代高速数字集成电路频谱的主要分量已进入微波、毫米波，即使几毫米长的封装引线也与波长处于同一量级，用波长来计量可以称之为“长线”。封装引线两端电压、电流由于所谓的“长线效应”而有较大差别，电路设计时必须予以考虑。本章阐述当传输线长度与波长可比拟时，传输线上电压、电流的传播规律。研究传输线基本理论的重要性不仅是因为平行双导线、同轴线和微带线等在电路与网络中得到广泛应用，还在于其他波导，如柱形金属波导、光波导等也可借助传输线理论使其分析得到简化。此外，对于已熟悉电路基本概念的读者，从传输线理论进入电磁场与电磁波一般问题的研究也更容易一些。因为电磁波的一些基本概念，如波的传播，波遇到不均匀处的反射，驻波与功率传输等，通过传输线很容易理解。这就是本书在麦克斯韦方程前先讲授传输线基本理论的原因。

本章 2.1 节先讨论传输线的等效电路模型，然后导出传输线基本方程及其解；2.2 节是本章重点之一，给出描述传输线状态的特征量及其沿传输线的变换；2.3 节为传输功率和效率；传输线圆图在微波技术发展史中是可数的几个里程碑之一，2.4、2.5 节为传输线圆图及其应用，是本章的又一重点；2.6 节讨论阻抗匹配；2.7 节简要讨论耦合传输线；最后 2.8 节简要讨论传输线瞬态响应。

2.1　传输线的等效电路模型与传输线方程及其解

2.1.1　传输线的等效电路模型

传输线在电路中相当于一个二端口网络，一个端口连接信号源，通常叫做输入端，另一个端口连接负载，叫做输出端，如图 2-1。V_g 是信号源，信号可以是数字脉冲串，但本节主要针对随时间作简谐变化的连续波信号。R_g 是信号源的内阻，R_L 是负载。平行双导线、同轴线、微带线是常用的传输线。

图 2－2 给出它们的基本结构及电力线、磁力线的大致分布。就场分布而言，它们的共同点是电磁场都与横截面平行，称为横电磁模（TEM 模）。平行双导线、同轴线在电话网、有线电视网中用得较多，微带线则广泛用于集成电路。



图 2－1 作为电路中二端口网络的传输线

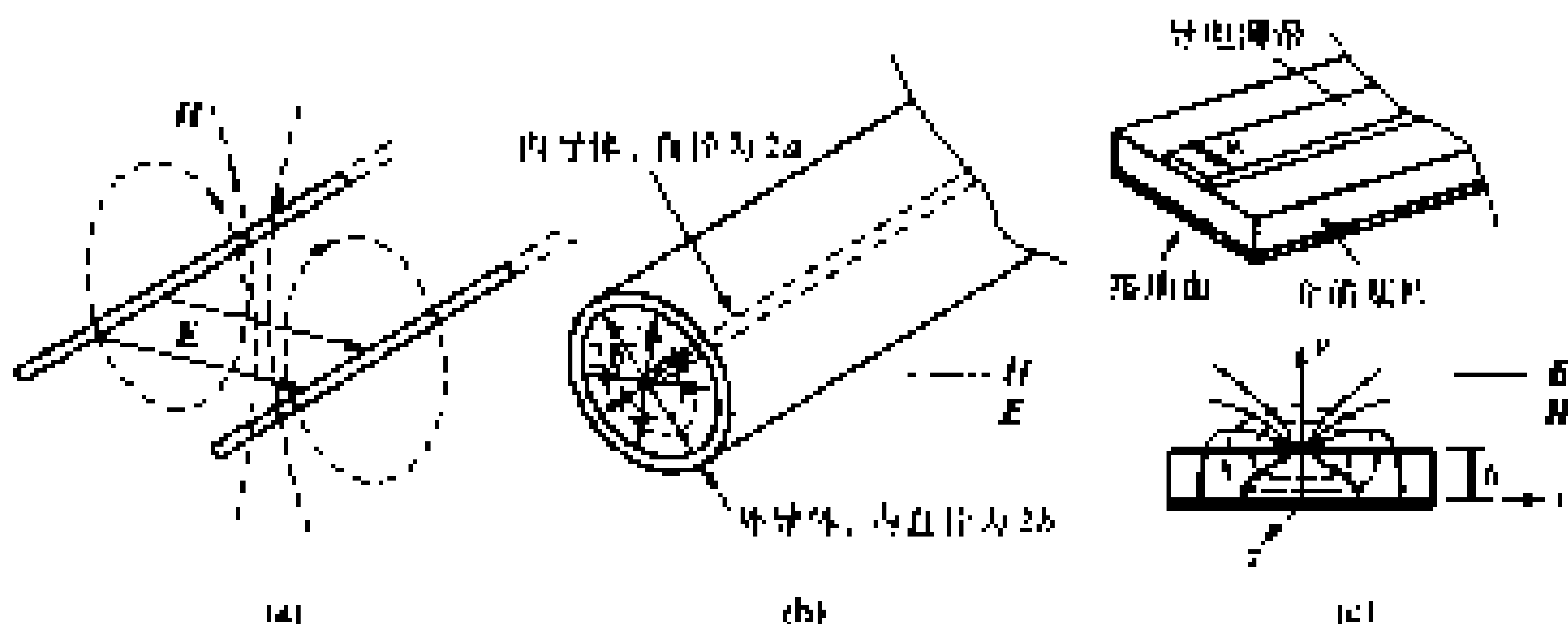


图 2－2 常用传输线

(a) 平行双导线 (b) 同轴线 (c) 微带线

电路原理课程告诉我们，一个复杂的电路可以由电阻、电导、电感和电容等基本元件构成。电阻 R 与电导 G 表示电路损耗。当电流 $I(t)$ 流过电阻 R 时，在电阻 R 两端产生电压降 $V(t)$，而当电压 $V(t)$ 加在电导 G 的两端，就有电流 $I(t)$ 流过电导 G，电压与电流的关系分别为：

$$V(t) = RI(t) \tag{2.1.1}$$

$$I(t) = GV(t) \tag{2.1.2}$$

电感与电容表示电路的储能特性。电感储存磁场能，电容储存电场能。当电感 L 上流过电流 $I(t)$ 时，在电感 L 上产生的压降 $V(t)$ 为

$$V(t) = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.1.3}$$

而当电容器两端加上电压 $V(t)$ 时，流过电容器的电流 $I(t)$ 为

$$I(t) = C\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.1.4}$$

式(2.1.1)～(2.1.4)就是电阻 R、电导 G、电感 L 和电容 C 的一般定义。这就是说任何元件不管其构成物质、几何尺寸有多大差别，只要其上电压、电流呈线性关系就是电阻或电导，而满足式(2.1.3)关系的就是电感，满足式(2.1.4)关系的就是电容。

现在我们仔细考虑一下图 2-2 所示的 3 种传输线，不管它们在结构上有多大差别，还是有共同之处。当电流沿导体流动时，由于构成导体材料的电导率 σ 有限，都会产生欧姆损耗，可用一个串联电阻 R 等效。如果两导体间填充的介质不是完纯介质，电导率 σ 不完全等于零，有少量漏电，会产生漏电损耗，可用一个并联电导 G 表示。导体周围有磁力线，表示有磁场能量的储存，可用一个串联电感 L 等效。而两导体间电力线存在这一事实说明导体间储有电能，可用一并联电容 C 表示。如果定义 R'、G'、L'、C' 分别为传输线单位长度的等效电阻、等效电导、等效电感和等效电容，那么在传输线一小段 Δz 长度内，其等效电阻、电导、电感和电容分别为 $R'\Delta z$、$G'\Delta z$、$L'\Delta z$、$C'\Delta z$，长度为 Δz 的一小段传输线就可用图 2-3 的等效电路表示。

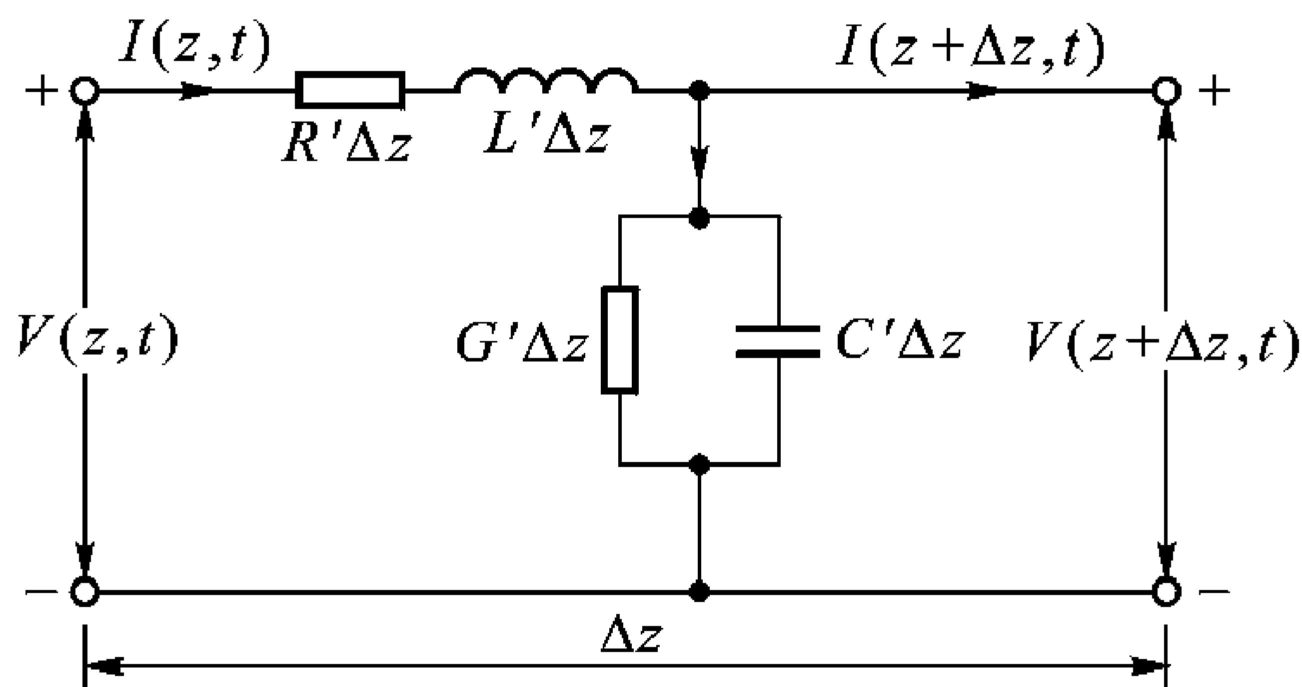


图 2-3　长度为 Δz 的一段传输线的等效电路

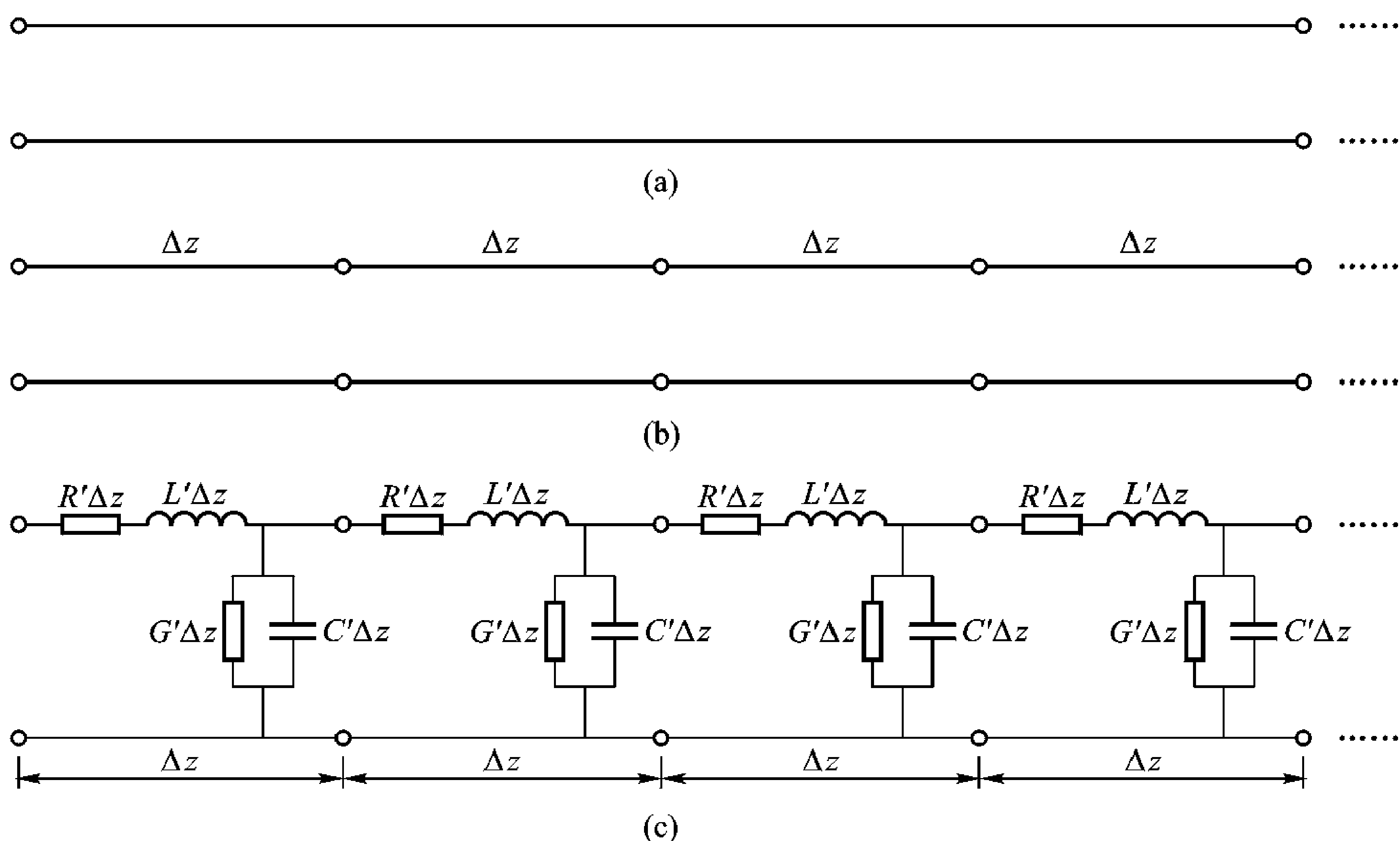


图 2-4　传输线的等效电路模型

(a) 平行双导线　(b) 无限多 Δz 长度传输线的级连　(c) 传输线的等效电路模型

如果将 z 方向广延的传输线[图2－4 (a)]看成无限多 Δz 长度传输线的级连[图2－4 (b)]，而每一段 Δz 长度的传输线又用图2－3所示电路等效，那么 z 方向无限长的传输线就可等效成图2－4 (c)，即用无限多如图2－3这种等效电路级连的网络表示。

因为传输线的损耗、储存的磁能和电能沿传输线都是均匀分布的，传输线的等效电路参数 R'、G'、L'、C' 沿传输线也是均匀分布的，故称它们为分布电路参数，以跟我们在电子线路课程中接触过的集总参数相区别。在集总参数电路中，磁场集总在电感线圈里，电场集总在电容器里，能量集总损耗在电阻、电导上。

单位长度传输线等效电路参数 R'、G'、L'、C' 的具体数值取决于传输线构成材料的物理性质(主要是电磁特性)、几何结构与形状，我们将在以后适当章节分别介绍。有关平行双导线、同轴线的等效电路参数计算公式列于表2－1。

表2－1 平行双导线、同轴线的等效电路参数 R'、G'、L' 和 C'

参　数	同　轴　线	平行双导线	单　位
R'	$\frac{R_S}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$	$\frac{R_S}{\pi a}$	Ω/m
L'	$\frac{\mu}{2\pi}\ln(b/a)$	$\frac{\mu}{\pi}\ln\left[(d/2a)+\sqrt{(d/2a)^2-1}\right]$	H/m
G'	$\frac{2\pi\sigma}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\sigma}{\ln\left[(d/2a)+\sqrt{(d/2a)^2-1}\right]}$	S/m
C'	$\frac{2\pi\varepsilon}{\ln(b/a)}$	$\frac{\pi\varepsilon}{\ln\left[(d/2a)+\sqrt{(d/2a)^2-1}\right]}$	F/m

注：1. 对于同轴线：$2b$ 为外导体内直径，$2a$ 为内导体外径；
2. 对于平行双导线：$2a$ 为导线直径，d 为两导线中心间距；
3. μ、ε、σ 属于填充介质的量，$R_S=\sqrt{\pi f\mu_c/\sigma_c}$，$\mu_c$、$\sigma_c$ 属于导体的量。

2.1.2 传输线方程及其解

根据传输线的等效电路模型，设 $V(z,t)$、$I(z,t)$ 为 z 处的电压、电流，$V(z+\Delta z,t)$、$I(z+\Delta z,t)$ 是 $(z+\Delta z)$ 处的电压、电流(见图2－3)，利用基尔霍夫电压、电流定律，可得

$$V(z,t)-R'\Delta zI(z,t)-L'\Delta z\frac{\partial I(z,t)}{\partial t}-V(z+\Delta z,t)=0 \qquad (2.1.5)$$

$$I(z,t)-G'\Delta zV(z+\Delta z,t)-C'\Delta z\frac{\partial V(z+\Delta z,t)}{\partial t}-I(z+\Delta z,t)=0 \qquad (2.1.6)$$

式(2.1.5)、(2.1.6)除以 Δz，并重新排列得到

$$\frac{V(z+\Delta z,t)-V(z,t)}{\Delta z}=-\left[R'I(z,t)+L'\frac{\partial I(z,t)}{\partial t}\right] \tag{2.1.7}$$

$$\frac{I(z+\Delta z,t)-I(z,t)}{\Delta z}=-\left[G'V(z+\Delta z,t)+C'\frac{\partial V(z+\Delta z,t)}{\partial t}\right] \tag{2.1.8}$$

当 $\Delta z\to 0$，取极限，得到

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z}=-\left[R'I(z,t)+L'\frac{\partial I(z,t)}{\partial t}\right] \tag{2.1.9}$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z}=-\left[G'V(z,t)+C'\frac{\partial V(z,t)}{\partial t}\right] \tag{2.1.10}$$

式(2.1.9)、(2.1.10)就是传输线上电压、电流满足的微分方程，叫做传输线方程。

正如前面所述，本书主要研究随时间作简谐变化的场量。引入简谐变量 $V(z,t)$、$I(z,t)$的复数表示 $V(z)$、$I(z)$，即

$$V(z,t)=\mathrm{Re}[V(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{2.1.11}$$

$$I(z,t)=\mathrm{Re}[I(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{2.1.12}$$

将式(2.1.11)、(2.1.12)代入式(2.1.9)、(2.1.10)就得到复数形式的传输线方程

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z}=-(R'+\mathrm{j}\omega L')I(z) \tag{2.1.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}=-(G'+\mathrm{j}\omega C')V(z) \tag{2.1.14}$$

注意：$V(z)$、$I(z)$不是时间 t 的函数。本章以后对传输线的分析主要从式(2.1.13)和式(2.1.14)出发。为了分析简单起见，先假定平行双导线无损耗，即 $R'=0$，$G'=0$，式(2.1.13)和式(2.1.14)简化为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}\omega L'I \tag{2.1.15}$$

$$\frac{dI}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}\omega C'V \tag{2.1.16}$$

对式(2.1.15)微分一次并将式(2.1.16)代入，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2}=-\omega^2L'C'V$$

定义

$$k=\omega\sqrt{L'C'} \tag{2.1.17}$$

上式成为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+k^2\right)V=0 \tag{2.1.18}$$

其解为

$$V = V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + V^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} \tag{2.1.19}$$

将式(2.1.19)代入式(2.1.15)，同时定义

$$Z_{\mathrm{c}} = \frac{1}{Y_{\mathrm{c}}} = \frac{k}{\omega C'} = \frac{\omega L'}{k} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \tag{2.1.20}$$

得到

$$I = \frac{1}{Z_{\mathrm{c}}}(V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} - V^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}) \tag{2.1.21}$$

式(2.1.19)、(2.1.21)表示的 V、I 都是复数，计及时间变量后

$$V(z,t) = \mathrm{Re}[V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} + V^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}]$$

$$I(z,t) = \mathrm{Re}[(V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} - V^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)})/Z_{\mathrm{c}}]$$

以后为简化书写，将取实部运算的 Re 省略了，上式写成

$$V(z,t) = [V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} + V^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}] \tag{2.1.22}$$

$$I(z,t) = \frac{1}{Z_{\mathrm{c}}}[V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} - V^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}] \tag{2.1.23}$$

式(2.1.22)、(2.1.23)第一项表示 $+z$ 方向传播的波，记为入射波，用上标 i 标记。第二项表示 $-z$ 方向传播的波，记为反射波，用上标 r 标记。k 称为传播常数。波的相速是指波等相位点移动的速度，根据式(1.3.4)，对于入射波，等相位点移动速度为

$$v_{\mathrm{p}}^{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} \tag{2.1.24a}$$

反射波的等相位点移动速度为

$$v_{\mathrm{p}}^{\mathrm{r}} = -\omega/k \tag{2.1.24b}$$

式中负号表示反射波传播方向与入射波相反，即沿 $-z$ 方向传播。

将式(2.1.17)代入式(2.1.24)，得到无损耗线上波的传播速度

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \tag{2.1.25}$$

将表 2-1 中平行双导线、同轴线的 L'、C' 值代入，得到

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{2.1.26}$$

即电磁波沿平行双导线、同轴线传播的相速 v_{p} 等于填充介质中的光速。只要 ε 与频率无关，v_{p} 也与频率无关。电磁波传播速度 v_{p} 与频率无关，叫做无色散。所以只要 ε 与频率无关，平行双导线、同轴线是无色散的。

传输线上波的振荡相位相差 2π 的两点之间距离为波长 λ，根据式(1.3.3)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \tag{2.1.27a}$$

将式(2.1.24a) $k=\dfrac{\omega}{V_{\mathrm{p}}}$代入，又得到

$$\lambda=\frac{v_{\mathrm{p}}}{f}=v_{\mathrm{p}}T \tag{2.1.27b}$$

式中 f 是振荡频率，T 为振荡周期。

比较式(2.1.19)和式(2.1.21)的第一项，Z_{c} 为入射波电压与入射波电流之比，具有阻抗量纲，称为特征阻抗。其倒数 $Y_{\mathrm{c}}=1/Z_{\mathrm{c}}$ 称为特征导纳。比较两式的第二项，反射波电压与反射波电流相位刚好相差 180°。

对于有损耗的情况，如果传播常数 k 与特征阻抗 Z_{c} (或导纳 Y_{c})的定义为

$$\mathrm{j}k=\sqrt{(R'+\mathrm{j}\omega L')(G'+\mathrm{j}\omega C')} \tag{2.1.28}$$

$$Z_{\mathrm{c}}=\frac{1}{Y_{\mathrm{c}}}=\sqrt{\frac{R'+\mathrm{j}\omega L'}{G'+\mathrm{j}\omega C'}} \tag{2.1.29}$$

那么传输线方程式(2.1.13)、(2.1.14)成为

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}kZ_{\mathrm{c}}I(z) \tag{2.1.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}kY_{\mathrm{c}}V(z) \tag{2.1.31}$$

传输线上电压、电流仍取式(2.1.19)、(2.1.21)的形式。但记住此时 k、Z_{c} 均为复数。如将 k 记为

$$k=k_{\mathrm{r}}-\mathrm{j}k_{\mathrm{i}} \tag{2.1.32}$$

计及时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$式(2.1.19)、(2.1.21)可表示为

$$V(z,t)=V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-k_{\mathrm{i}}z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_{\mathrm{r}}z)}+V^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{k_{\mathrm{i}}z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+k_{\mathrm{r}}z)} \tag{2.1.33}$$

$$I(z,t)=\frac{1}{Z_{\mathrm{c}}}\left[V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-k_{\mathrm{i}}z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_{\mathrm{r}}z)}-V^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{k_{\mathrm{i}}z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+k_{\mathrm{r}}z)}\right] \tag{2.1.34}$$

因此，如果传播常数的虚部 $k_{\mathrm{i}}>0$，损耗将使正方向传播的入射波振幅随 z 的增加而衰减，见图 2-5。所以 k_{i} 叫做波的衰减因子或衰减常数，k_{r} 叫相位常数，表示波的传播。波的等相位点传播速度为

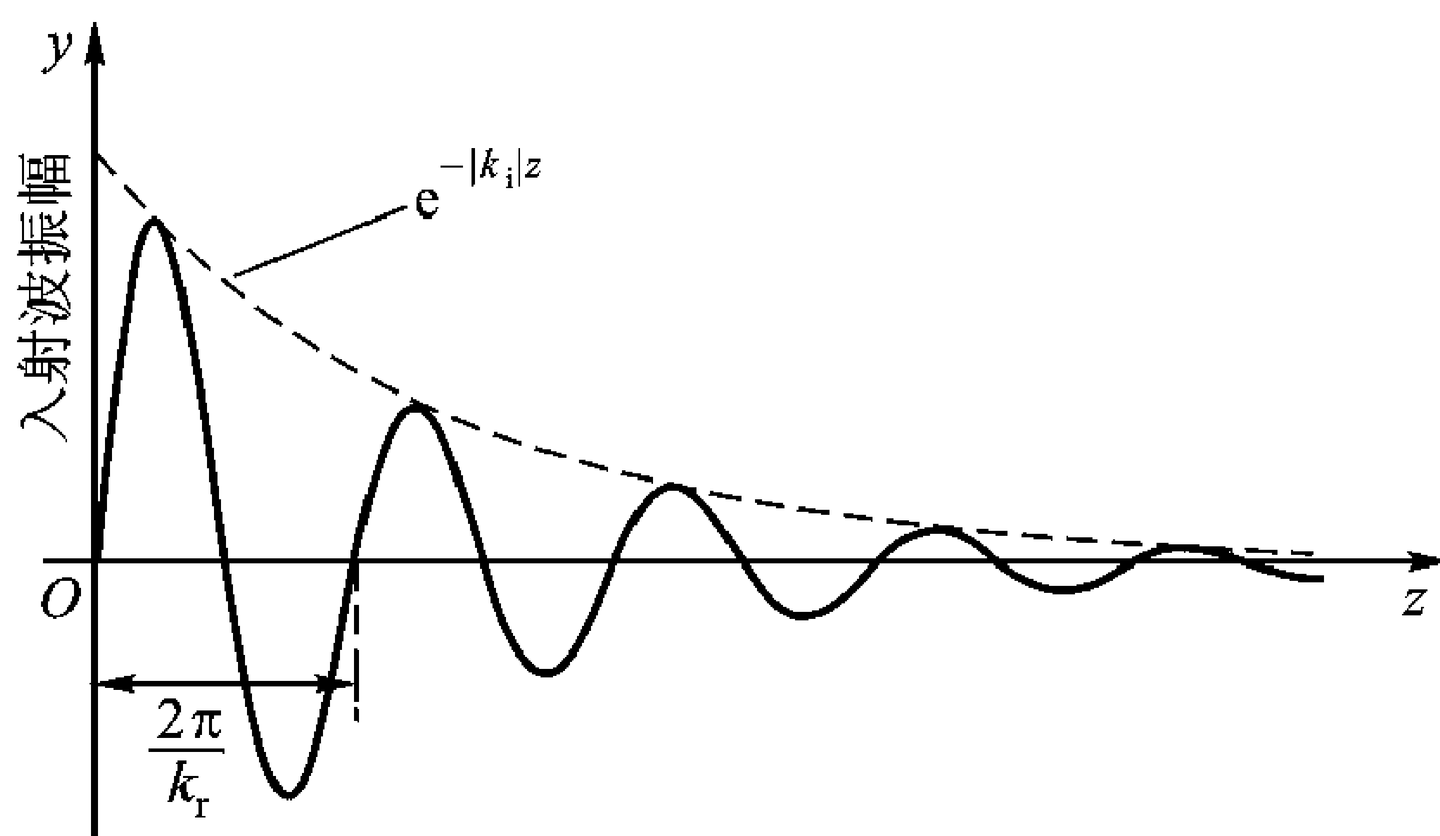


图 2-5 传输线上的衰减波

$$V_p = \omega / k_r \tag{2.1.35}$$

2.1.3 传输线的特征参数

由式(2.1.33)、(2.1.34)可见，传输线上电压、电流的传播可用两个特征参数，即传播常数 k 与特征阻抗 Z_c (或特征导纳 Y_c)表示。根据传输线的等效电路模型[图 2-4 (c)]，一般情况下传输线有 R'、L'、G'、C' 4 个参数。注意当 $R' \neq 0$、$G' \neq 0$ 时，k 与 Z_c 均为复数，每个复数由实部和虚部两部分组成，实际上也是 4 个参数，它们之间的关系由式(2.1.28)、(2.1.29)表示。频率低时，R'、L'、G'、C' 是可测的量，频率高时，则 k、Z_c 是可测的量。本课程研究的各类波导工作频率都比较高，当用传输线等效时，传输线的特征参数用 k、Z_c (或 Y_c)表示较为合适。

平行双导线与同轴线的特征参数 k、Z_c 可按表 2-1 根据式(2.1.28)、(2.1.29)得出。

微带线工作频率较高，其特征参数一般用 k、Z_c 表示。如果微带线导带的宽度 w 与介质厚度 h 之比 w/h 满足条件 $w/h \gg 1$，即微带线的边缘效应忽略不计并可当作平行平板波导处理，则微带线的特征阻抗 Z_c 可近似为

$$Z_c = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h}{w} \tag{2.1.36}$$

传播常数 k 为

$$k = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{v} \tag{2.1.37}$$

v 为介质中光速

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

实际微带线并不满足 $w/h \gg 1$ 的条件，边缘效应不可忽略。此外，由于介质填充的不均匀，微带线中传播的并不是纯 TEM 模，有色散。因此，当 $w/h \gg 1$条件不满足时，对式(2.1.36)、(2.1.37)进行修正是必要的。

考虑边缘效应后，如图 2-1 (c)所示，一部分电力线从导带边缘漏逸出去，其作用等效于降低了填充介质的有效介电常数与增加了导带的宽度。许多学者或根据实验数据或根据严格理论的数值计算结果，对微带线特征参数的计算公式进行修正。根据 Wheeler 和 Schneider 给出的结果，在不计色散、导带有限厚度、损耗以及屏蔽影响的简化情况下，微带线等效特征阻抗 Z_e 可按下式计算

$$Z_e = \frac{\eta_0}{2\pi\sqrt{\varepsilon_{re}}} \ln\left(\frac{8h}{w} + 0.25\frac{w}{h}\right) \quad \left(\frac{w}{h} \leqslant 1\right) \tag{2.1.38a}$$

$$Z_e = \frac{\eta_0}{\sqrt{\varepsilon_{re}}}\left[\frac{w}{h} + 1.393 + 0.67\ln\left(\frac{w}{h} + 1.44\right)\right]^{-1} \quad \left(\frac{w}{h} \geqslant 1\right) \tag{2.1.38b}$$

式中 $\eta_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega$，有效相对介电系数 ε_{re}为

$$\varepsilon_{re} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2}F(w/h) \tag{2.1.39}$$

$$F(w/h) = \begin{cases} (1 + 12h/w)^{-1/2} + 0.04(1 - w/h)^2 & (w/h \leqslant 1) \\ (1 + 12w/h)^{-1/2} & (w/h \geqslant 1) \end{cases}$$

ε_r为基片的相对介电系数。ε_{re}的物理意义是：当微带线等效为平行板波导并为相对介电系数 ε_{re}的介质填充时，该平行平板波导的相速即微带线的相速，由此可计算微带线的传播常数 k 与相速 v_p：

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_e} = \omega\sqrt{\varepsilon_{re}\varepsilon_0\mu_0} = k_0\sqrt{\varepsilon_{re}} \tag{2.1.40}$$

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_e\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{re}\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{re}}} \tag{2.1.41}$$

微带线中传播的波长 λ_g 则为

$$\lambda_g = \frac{v_p}{f} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{re}}f} = \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon_{re}}} \tag{2.1.42}$$

式中 λ 为自由空间波长。

微带线具体设计时，设计初始数据是微带线等效阻抗 Z_e、ε_{re}及介质基片相对介电常数 ε_r，要确定的是微带线相对结构尺寸 w/h，可按下式计算：

当 $Z_e\sqrt{\varepsilon_{re}} \geqslant 89.91$，也就是 $A > 1.52$ 时

$$w/h = \frac{8\exp(A)}{\exp(2A) - 2} \tag{2.1.43a}$$

当 $Z_e\sqrt{\varepsilon_{re}} < 89.91$，也就是 $A < 1.52$ 时有

$$w/h = \frac{2}{\pi}\left\{B - 1 - \ln(2B - 1) + \frac{\varepsilon_r - 1}{2\varepsilon_r}\left[\ln(B - 1) + 0.39 - \frac{0.61}{\varepsilon_r}\right]\right\} \tag{2.1.43b}$$

式中

$$A = \frac{Z_e}{60}\left(\frac{\varepsilon_r + 1}{2}\right)^{1/2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\left(0.23 + \frac{0.11}{\varepsilon_r}\right) \tag{2.1.44a}$$

$$B = \frac{60\pi^2}{Z_e\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{2.1.44b}$$

式(2.1.43)的最大误差不超过1%。

例2-1　已知平行双导线由铜质材料制成，填充介质为空气，其间距 $d = 10$ mm，线径 $2a = 1.6$ mm，求该平行双导线特征阻抗 Z_c。

解：设空气介电系数 $\varepsilon_1 \approx \varepsilon_0$，将表2-1中平行双导线的 L'、C' 代入 Z_c 表

达式

$Z_c=\sqrt{\frac{L'}{C'}}=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ln\left[(d/2a)+\sqrt{(d/2a)^2-1}\right]$，将 μ_0、ε_0、d、a 的具体数值代入，得到 $Z_c=302.3\ \Omega$。

例 2-2　同轴线内导体外径 $a=0.411$ cm，外导体内径 $b=1.143$ cm，填充介质的相对介电系数 $\varepsilon_r=1.5$，$\mu_r=1$，$\sigma_1=0$，求同轴线的特征阻抗 $Z_c=\sqrt{\frac{L'}{C'}}$。

解：根据表 2-1 得到

$$Z_c=\sqrt{\frac{L'}{C'}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{b}{a}=60\sqrt{\frac{1}{1.5}}\ln\frac{1.143/2}{0.411/2}=50.1\ \Omega$$

例 2-3　设微带线 $w/h=5$，基片 $\varepsilon_r=9.7$，$\mu=\mu_0$，按近似公式(2.1.36)与修正公式(2.1.38)计算其特征阻抗 Z_c。

解：按近似公式(2.1.36)

$$Z_c\approx\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{9.7}}\frac{1}{5}=24.2\ \Omega$$

按修正公式(2.1.38b)计算 Z_e，先计算 ε_{re}：

$$F(w/h)=(1+12w/h)^{-1/2}=(1+60)^{-1/2}=0.128$$

$$\varepsilon_{re}=\frac{\varepsilon_r+1}{2}+\frac{\varepsilon_r-1}{2}F(w/h)=5.907$$

$$Z_e=\frac{377}{\sqrt{5.907}}\left[5+1.393+0.67\ln(5+1.44)\right]^{-1}=20.3\ \Omega$$

即边缘效应使微带线特征阻抗变小。

例 2-4　设微带线基片材料的相对介电系数 $\varepsilon_r=10.2$，厚度 $h=1.27$ mm，要求等效阻抗为 50 Ω，试决定微带线宽度 w。

解：将 $\varepsilon_r=10.2$、$Z_e=50\ \Omega$ 代入式(2.1.44)，得到

$$A=\frac{50}{60}\left(\frac{10.2+1}{2}\right)^{1/2}+\frac{10.2-1}{10.2+1}\left(0.23+\frac{0.11}{10.2}\right)=2.169\quad>1.52$$

根据式(2.1.43a)

$$\frac{w}{h}=\frac{8\exp(A)}{\exp(2A)-2}=\frac{8\exp(2.169)}{\exp(2\times2.169)-2}=0.939$$

所以 $w=0.939\times1.27=1.192$ mm。

2.2　描述传输线状态的特征量沿传输线的变换

2.1 节我们用电压 V、电流 I 或电压入射波 $V^i e^{-jkz}$ 与电压反射波 $V^r e^{jkz}$ 描述传输线的状态。本节将阐明传输线的状态还可用反射系数、阻抗(或导纳)、驻

波系数与驻波相位等特征量表述。本节同时研究这些量相互间的关系及其沿传输线的变换。

2.2.1 描述传输线状态的特征量沿传输线变换的关系式

下面讨论如图 2－6 所示的传输线上电压或电流、反射系数、阻抗或导纳沿传输线的变换关系。

1. 电压、电流沿传输线变换关系式

电压 V 和电流 I 可分解为入射波与反射波的叠加，并重写如下：

$$V(z)=V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+V^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} \tag{2.2.1}$$

$$I(z)=\frac{1}{Z_{\mathrm{c}}}(V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-V^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}) \tag{2.2.2}$$

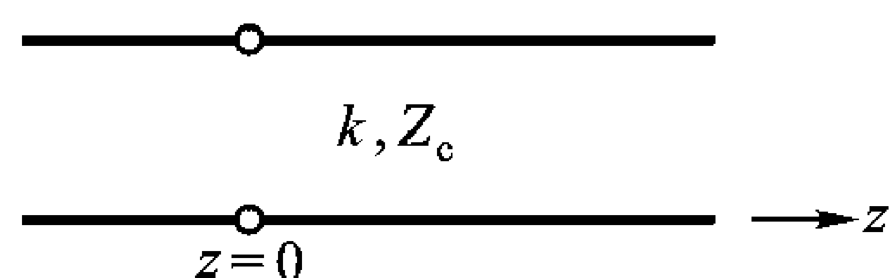


图 2－6 传播常数为 k，特征阻抗为 Z_{c} 的传输线

反之，入射波和反射波也可用电压、电流表示。为此以特征阻抗 Z_{c} 乘式(2.2.2)的两边并与式(2.2.1)相加或相减得到

$$V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\frac{1}{2}[V(z)+Z_{\mathrm{c}}I(z)] \tag{2.2.3}$$

$$V^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}=\frac{1}{2}[V(z)-Z_{\mathrm{c}}I(z)] \tag{2.2.4}$$

在 $z=0$ 处，有

$$V^{\mathrm{i}}=\frac{1}{2}[V(0)+Z_{\mathrm{c}}I(0)] \tag{2.2.5}$$

$$V^{\mathrm{r}}=\frac{1}{2}[V(0)-Z_{\mathrm{c}}I(0)] \tag{2.2.6}$$

将式(2.2.5)、(2.2.6)代入式(2.2.1)、(2.2.2)得到

$$V(z)=V(0)\cos kz-\mathrm{j}Z_{\mathrm{c}}I(0)\sin kz$$

$$I(z)=-\mathrm{j}Y_{\mathrm{c}}V(0)\sin kz+I(0)\cos kz$$

上两式也可写成矩阵表示的形式

$$\begin{bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos kz & -\mathrm{j}Z_{\mathrm{c}}\sin kz \\ -\mathrm{j}Y_{\mathrm{c}}\sin kz & \cos kz \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix} \tag{2.2.7a}$$

或者

$$\begin{bmatrix} V(0) \\ I(0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos kz & \mathrm{j}Z_{\mathrm{c}}\sin kz \\ \mathrm{j}Y_{\mathrm{c}}\sin kz & \cos kz \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V(z) \\ I(z) \end{bmatrix} \tag{2.2.7b}$$

式(2.2.7a)表示已知 $z=0$ 处电压、电流 $V(0)$、$I(0)$ 即可求得传输线任意位置 z 处的电压、电流 $V(z)$、$I(z)$。而式(2.2.7b)表示如果已知传输线任意位置 z 处电压 $V(z)$、电流 $I(z)$，则可求得 $z=0$ 处电压 $V(0)$、电流 $I(0)$。

利用坐标平移变换关系，$z=z_1$、z_2 两平面间电压、电流变换的一般关系为：

$$\begin{bmatrix} V(z_2) \\ I(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k(z_2-z_1) & -\mathrm{j}Z_c\sin k(z_2-z_1) \\ -\mathrm{j}Y_c\sin k(z_2-z_1) & \cos k(z_2-z_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(z_1) \\ I(z_1) \end{bmatrix} \quad (2.2.8a)$$

$$\begin{bmatrix} V(z_1) \\ I(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k(z_2-z_1) & \mathrm{j}Z_c\sin k(z_2-z_1) \\ \mathrm{j}Y_c\sin k(z_2-z_1) & \cos k(z_2-z_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(z_2) \\ I(z_2) \end{bmatrix} \quad (2.2.8b)$$

式(2.2.7)、(2.2.8)就是传输线上电压、电流的变换关系式。

2. 反射系数沿传输线变换关系式

定义反射波电压与入射波电压之比为电压反射系数 Γ_v：

$$\Gamma_v(z) = \frac{V^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}}{V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}} = \frac{V^{\mathrm{r}}}{V^{\mathrm{i}}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2kz} = \Gamma_v(0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2kz} \quad (2.2.9a)$$

或

$$\Gamma_v(0) = \Gamma_v(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2kz} \quad (2.2.9b)$$

式中 $\Gamma_v(0)$ 为 $z=0$ 处电压反射系数。同样利用坐标平移变换关系，$z=z_1$ 与 z_2 两平面间反射系数变换关系为

$$\Gamma_v(z_2) = \Gamma_v(z_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}2k(z_2-z_1)} \quad (2.2.10a)$$

或

$$\Gamma_v(z_1) = \Gamma_v(z_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k(z_2-z_1)} \quad (2.2.10b)$$

式(2.2.9)、(2.2.10)就是电压反射系数沿传输线的变换关系式。

引入电压反射系数 $\Gamma_v(z)$后，式(2.2.1)、(2.2.2)又可表示成

$$V(z) = [1+\Gamma_v(z)]V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \quad (2.2.11)$$

$$I(z) = [1-\Gamma_v(z)]\frac{V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}{Z_c} \quad (2.2.12)$$

由于电流反射波与电压反射波相位相差180°，所以电压反射系数 Γ_v 与电流反射系数 Γ_i 也相差180°。

3. 阻抗或导纳沿传输线变换关系式

定义传输线上电压与电流之比为阻抗 Z，由式(2.2.11)、(2.2.12)得到

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_c\frac{1+\Gamma_v(z)}{1-\Gamma_v(z)} \quad (2.2.13)$$

或者

$$\Gamma_v(z) = \frac{Z(z)-Z_c}{Z(z)+Z_c} \quad (2.2.14)$$

式(2.2.13)表示由反射系数可求出阻抗，而式(2.2.14)表示由阻抗可求出反射系数。式(2.2.13)、(2.2.14)就是传输线上阻抗与反射系数的变换关系。

$z=0$ 处阻抗 $Z(0)$为

$$Z(0)=Z_c\frac{1+\Gamma_v(0)}{1-\Gamma_v(0)}$$

$\Gamma_v(0)$用式(2.2.9b)的$\Gamma_v(z)$表示，$\Gamma_v(z)$又用式(2.2.14)的$Z(z)$表示，则得$z=0$处阻抗$Z(0)$与z处阻抗$Z(z)$关系

$$Z(0)=Z_c\frac{Z(z)+\mathrm{j}Z_c\tan kz}{Z_c+\mathrm{j}Z(z)\tan kz} \tag{2.2.15a}$$

或

$$Z(z)=Z_c\frac{Z(0)-\mathrm{j}Z_c\tan kz}{Z_c-\mathrm{j}Z(0)\tan kz} \tag{2.2.15b}$$

同样利用坐标平移变换关系，$z=z_1$与z_2两平面间阻抗变换关系为

$$Z(z_1)=Z_c\frac{Z(z_2)+\mathrm{j}Z_c\tan k(z_2-z_1)}{Z_c+\mathrm{j}Z(z_2)\tan k(z_2-z_1)} \tag{2.2.16a}$$

或

$$Z(z_2)=Z_c\frac{Z(z_1)-\mathrm{j}Z_c\tan k(z_2-z_1)}{Z_c-\mathrm{j}Z(z_1)\tan k(z_2-z_1)} \tag{2.2.16b}$$

式(2.2.15)、(2.2.16)即传输线上阻抗变换关系式。

对于长度为l的一段传输线，如果定义$z_1=0$为始端，$z_2=l$为终端，则根据式(2.2.16a)始端输入阻抗Z_{in}与终端负载阻抗Z_L关系为

$$Z_{in}=Z_c\frac{Z_L+\mathrm{j}Z_c\tan kl}{Z_c+\mathrm{j}Z_L\tan kl} \tag{2.2.17}$$

如果定义$z_1=0$为终端，$z_2=-l$为始端，则根据式(2.2.16b)，始端输入阻抗Z_{in}与终端负载阻抗Z_L关系也为式(2.2.17)。

当用导纳表示时，不难得到

$$\Gamma_i(z)=\frac{Y(z)-Y_c}{Y(z)+Y_c} \tag{2.2.18}$$

$$Y(z)=Y_c\frac{1+\Gamma_i(z)}{1-\Gamma_i(z)} \tag{2.2.19}$$

$$Y(z_1)=Y_c\frac{Y(z_2)+\mathrm{j}Y_c\tan k(z_2-z_1)}{Y_c+\mathrm{j}Y(z_2)\tan k(z_2-z_1)} \tag{2.2.20a}$$

或

$$Y(z_2)=Y_c\frac{Y(z_1)-\mathrm{j}Y_c\tan k(z_2-z_1)}{Y_c-\mathrm{j}Y(z_2)\tan k(z_2-z_1)} \tag{2.2.20b}$$

利用以上变换关系，只要知道传输线一个截面上的特征量，即可求得任意截面上的特征量。

例 2－5 如图 2－7，一特性阻抗为 50 Ω 的空气填充的同轴线终端接有$Z_{L1}=(50+\mathrm{j}50)\,\Omega$的负载阻抗。在距终端$l_1=2$ cm 处并接一特性阻抗为 75 Ω 的同

轴线，它的终端接有 $Z_{L2}=(75-j75)\Omega$ 的负载，长度 $l_2=3$ cm。已知工作波长 $\lambda=10$ cm，求接点 AA 前 3.5 cm 处传输线始端的输入阻抗，即传输线始端的状态。

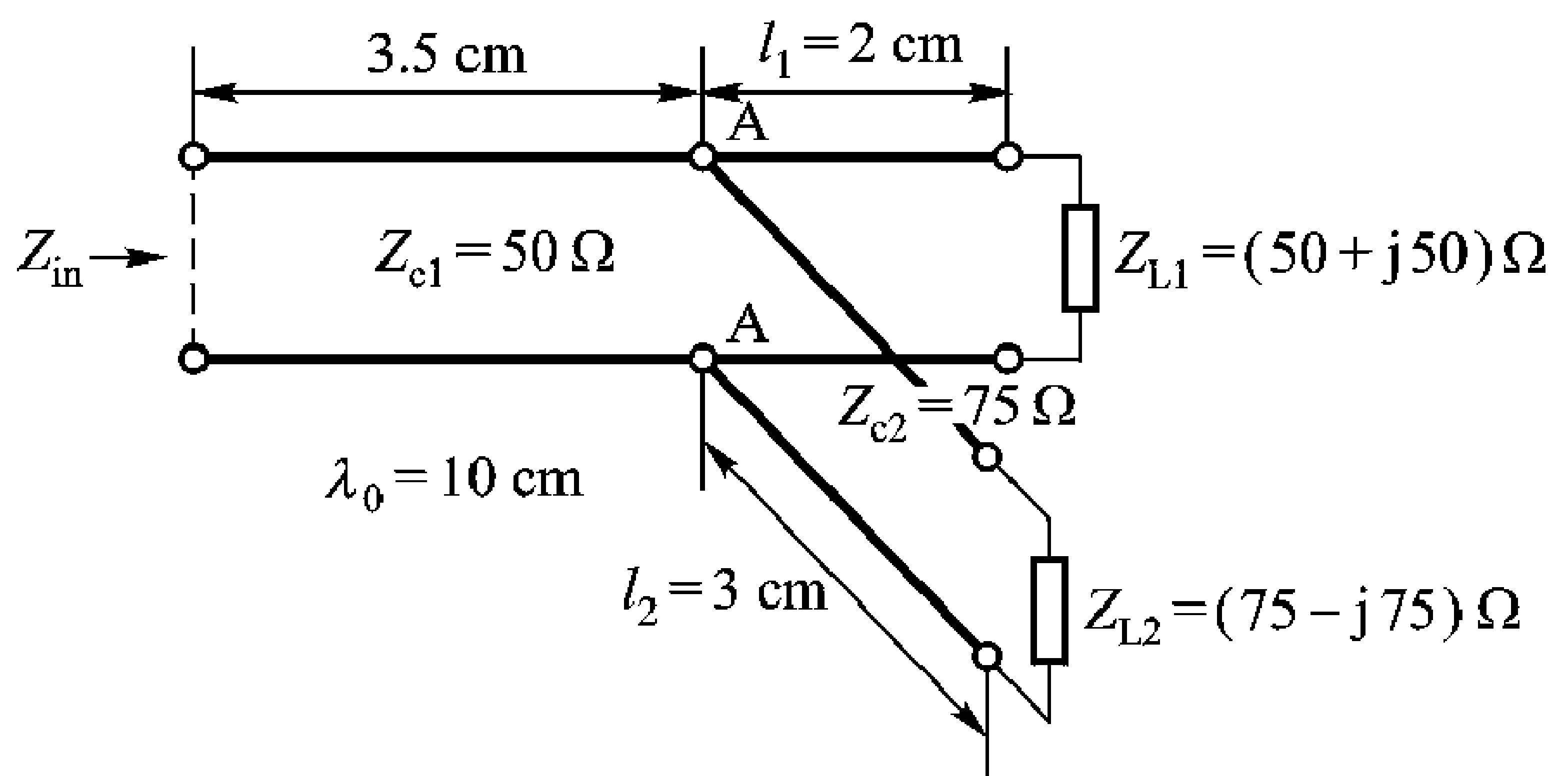


图 2－7　例 2－5 中的并联分支传输线

解：从负载 Z_{L1} 到接点 AA 截面相移 $kl_1=\dfrac{2\pi}{10}\times 2=0.4\pi$，从负载 Z_{L2} 到 AA 截面相移 $kl_2=\dfrac{2\pi}{10}\times 3=0.6\pi$，所以从 Z_{L1} 变换到接入点 AA 的输入阻抗 Z_{A1} 为

$$Z_{A1}=Z_{c1}\frac{Z_{L1}+jZ_{c1}\tan kl_1}{Z_{c1}+jZ_{L1}\tan kl_1}=(38-j42)\Omega$$

从 Z_{L2} 变换到接入点 AA 的输入阻抗 Z_{A2} 为

$$Z_{A2}=Z_{c2}\frac{Z_{L2}+jZ_{c2}\tan kl_2}{Z_{c2}+jZ_{L2}\tan kl_2}=(57+j63)\Omega$$

Z_{A1} 与 Z_{A2} 并联，其并联导纳 Y_A 为

$$Y_A=Y_{A1}+Y_{A2}=\frac{1}{Z_{A1}}+\frac{1}{Z_{A2}}=(0.019\,8+j0.004\,36)\text{S}$$

并联阻抗

$$Z_A=\frac{1}{Y_A}=(48.12-j10.59)\Omega$$

从接入点 AA 到始端相移 $kl_3=\dfrac{2\pi}{10}\times 3.5=0.7\pi$，所以始端输入阻抗 Z_{in} 为

$$Z_{in}=Z_{c1}\frac{Z_A+jZ_{c1}\tan kl_3}{Z_{c1}+jZ_A\tan kl_3}=(61.5+j3.4)\Omega$$

2.2.2　描述传输线状态的特征量沿传输线变换关系的图示

以图 2－8 所示的传播常数为 k、特征阻抗为 Z_c 的传输线为例，如果终端 $z=0$ 处接一负载 $Z_L=R_L+jX_L$，求传输线 $z<0$ 区域描述传输线状态的各特征量沿传输线变换的图示。

1. 反射系数沿传输线变换的图示

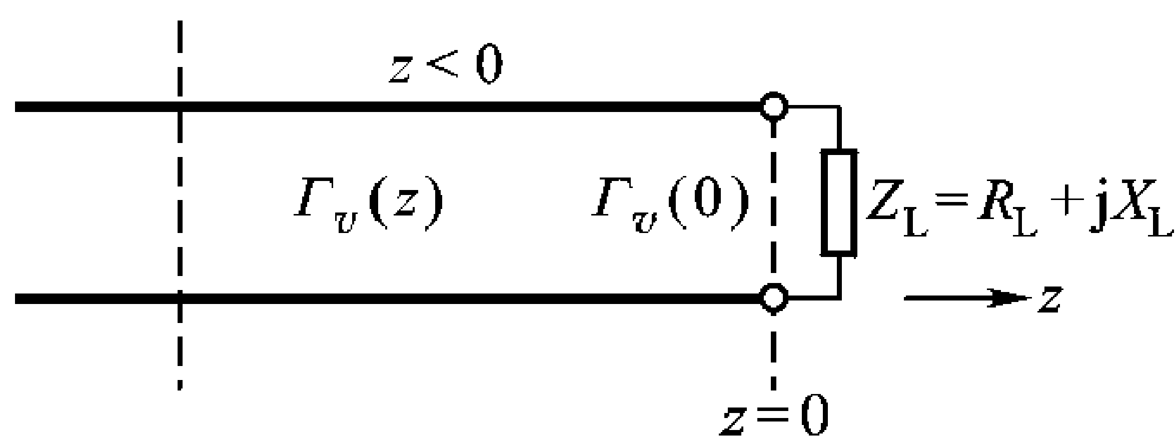


图 2-8　端接负载的传输线

反射系数 Γ_v 的变换最简单。按式(2.2.14)，因为阻抗可以是复数，所以 Γ_v 一般也是复数，终端 $z=0$ 处 $\Gamma_v(0)$ 可表示为

$$\Gamma_v(0)=\frac{Z_L-Z_c}{Z_L+Z_c}=\left|\Gamma_v(0)\right|e^{j\psi(0)} \tag{2.2.21}$$

此处 $\left|\Gamma_v(0)\right|=\left|\frac{Z_L-Z_c}{Z_L+Z_c}\right|=\sqrt{\frac{(R_L-Z_c)^2+X_L^2}{(R_L+Z_c)^2+X_L^2}}<1$

$$\psi(0)=\arctan\frac{2X_LZ_c}{R_L^2+X_L^2-Z_c^2}$$

由变换关系式(2.2.9)可得，$z=-l$ 处反射系数 $\Gamma_v(z=-l)$ 为

$$\Gamma_v(z=-l)=\Gamma_v(0)e^{-j2kl}=\left|\Gamma_v(0)\right|e^{j[\psi(0)-2kl]} \tag{2.2.22}$$

其图解示于图 2-9。式(2.2.22)表示，沿着 $-z$ 方向(或朝振荡源方向)与终端负载距离 l 的增加，反射系数模不变，而相位减小 $2kl$ 的相角。所以对于无耗线，反射系数沿传输线的变换只是相角的变化。在 Γ 复平面上，当阻抗 Z_L 不变时，传输线上的 Γ_v 轨迹是以原点为圆心、半径为 $\left|\Gamma_v(0)\right|$ 的圆，$\left|\Gamma_v(0)\right|\leqslant 1$。$l$ 增加 $\lambda/2$，相位变化重复一次。

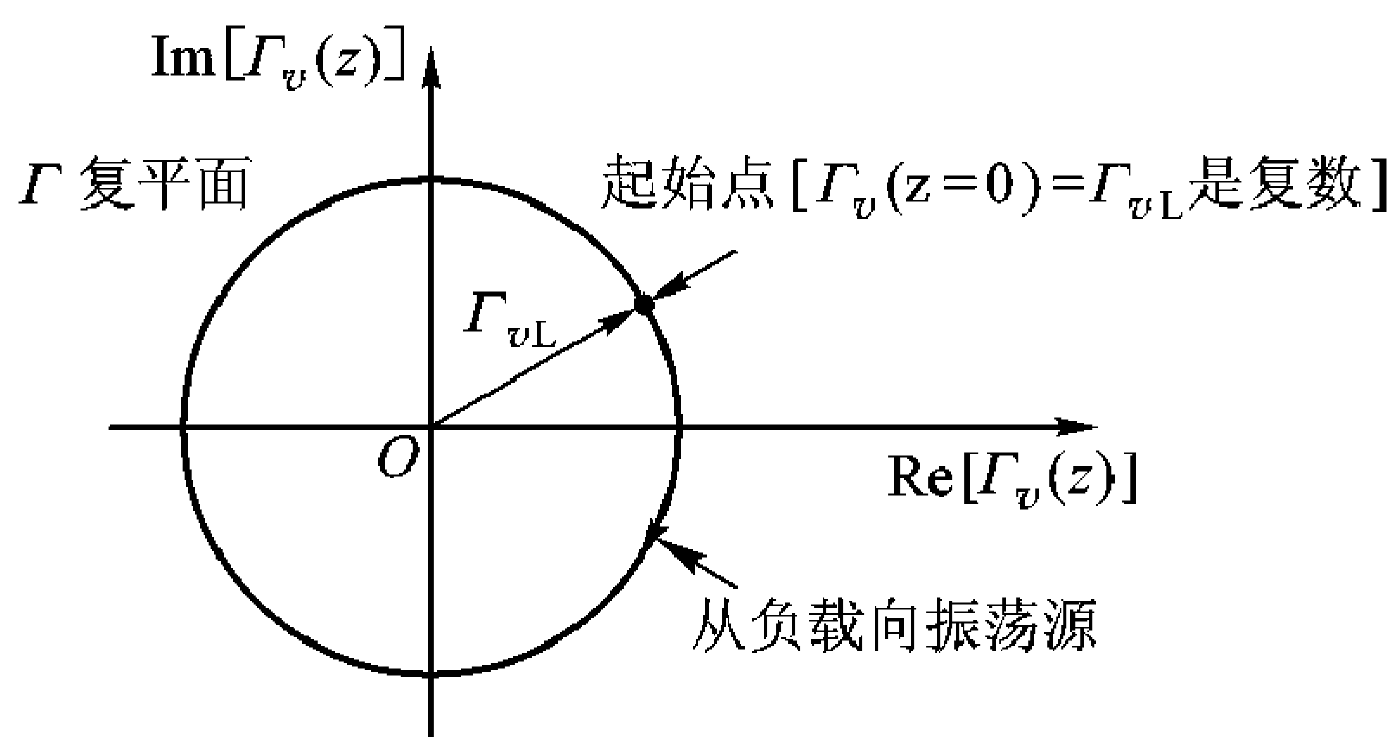


图 2-9　传输线上反射系数的图解

2. 电压、电流沿传输线变换的图示

由式(2.2.11)、(2.2.12)可得 $z=-l$ 处以入射波电压、电流归一化的电压、电流的模分别为

$$\left|\frac{V(z=-l)}{V^i e^{jkl}}\right|=\left|1+\Gamma_v(z=-l)\right|$$

$$\left|\frac{I(z=-l)}{V^i e^{jkl}/Z_c}\right|=\left|1-\Gamma_v(z=-l)\right|$$

如果入射波电压幅度为1 V，则得

$$|V(z=-l)|=|1+\Gamma_v(z=-l)|$$

$$Z_c|I(z=-l)|=|1-\Gamma_v(z=-l)|$$

电压 $V(z)$ 图解示于图2－10。右半径位置，即 $\psi(0)-2kl=-2n\pi$ 时，电压模最大，其最大值

$$V_{max}=1+|\Gamma_v(z=-l)|=1+|\Gamma_v(0)| \tag{2.2.23}$$

左半径位置，即当 $\psi(0)-2kl=-(2n+1)\pi$ 时，电压模最小，其最小值为

$$V_{min}=1-|\Gamma_v(z=-l)|=1-|\Gamma_v(0)| \tag{2.2.24}$$

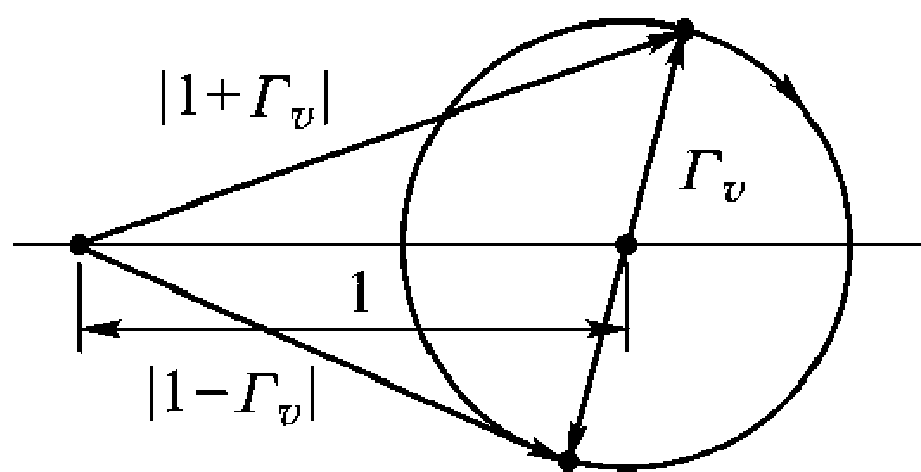


图2－10　传输线上归一化电压、电流模

离开终端 $z=0$ 向振荡源出现的第一个电压腹点位置 d_{max1} 为

$$d_{max1}=\frac{\psi(0)}{2k}=\frac{\psi(0)\lambda}{4\pi} \tag{2.2.25}$$

离开终端 $z=0$ 向振荡源出现的第一个电压节点位置 d_{min1} 为

$$d_{min1}=\frac{\psi(0)\lambda}{4\pi}+\frac{\lambda}{4}=d_{max1}+\frac{\lambda}{4} \tag{2.2.26}$$

同样可决定电流最大波腹、波节位置。电压波腹位置刚好是电流波节位置，电压波节位置正好是电流波腹。电压沿传输线的分布如图2－11。电压的这种分布叫做驻波。

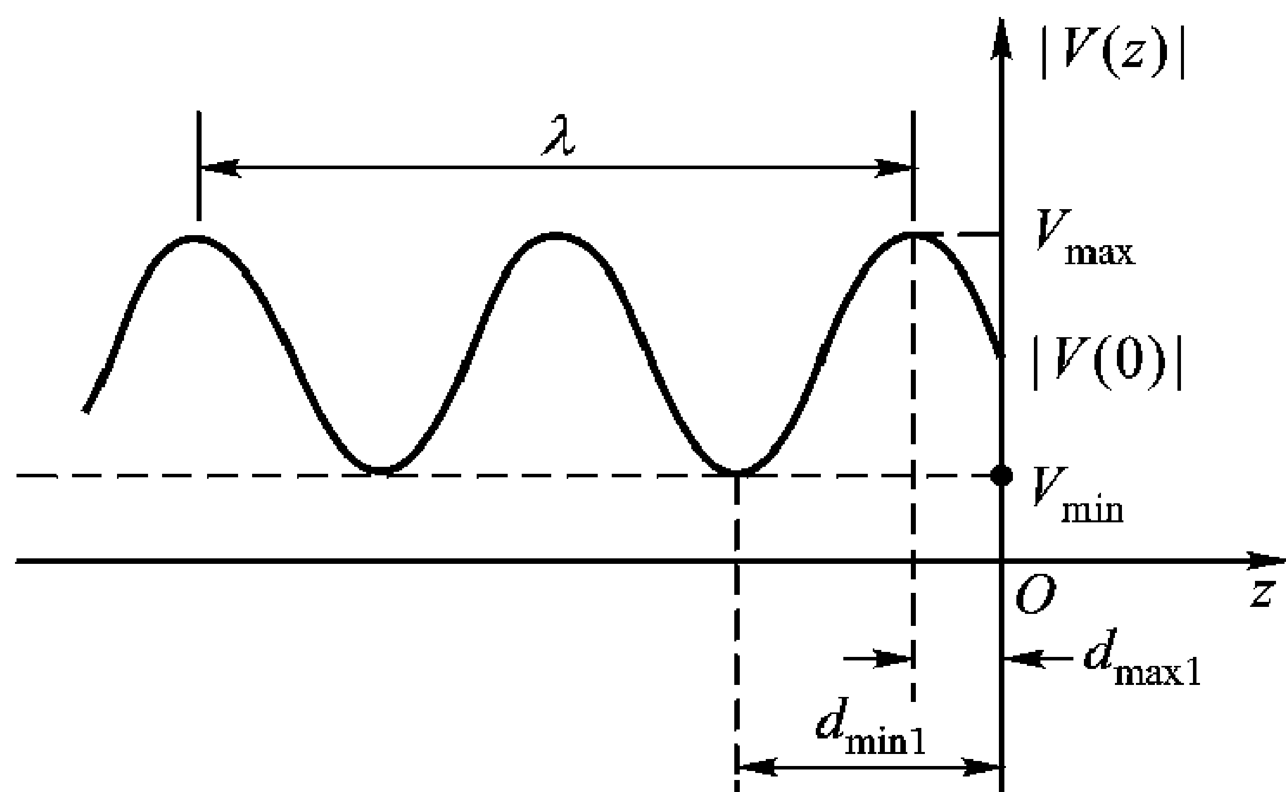


图2－11　传输线上电压沿线分布

定义传输线上电压最大值与最小值之比为驻波系数VSWR，常用 ρ 表示。利用式(2.2.23)、(2.2.24)得到

$$\rho=\frac{V_{max}}{V_{min}}=\frac{1+|\Gamma_v|}{1-|\Gamma_v|} \tag{2.2.27}$$

或

$$|\Gamma_v|=\frac{\rho-1}{\rho+1} \tag{2.2.28}$$

离开终端负载第一个驻波电压节点位置 d_{min1}，如果用波长 λ 归一化，即 $\tilde{d}_{min1}=d_{min1}/\lambda$ 称为驻波相位。驻波相位也可用 $\tilde{d}_{max1}=d_{max1}/\lambda$ 表示。驻波系数

ρ 及驻波最小点位置 $d_{\min1}$（或驻波相位 $d_{\min1}/\lambda$）是描述传输状态的又一特征量。

现在研究几种特殊情况下电压、电流沿传输线的分布。

一是负载开路，$Z_L=\infty$，$|\Gamma_v|=1$，$\psi=0$，代入式(2.2.23)、(2.2.24)、(2.2.26)得到

$$V_{\max}=2$$
$$V_{\min}=0$$
$$d_{\min1}=\lambda/4$$

另一种特殊情况，负载短路 $Z_L=0$，$|\Gamma_v|=1$，$\psi=180°$，此时

$$V_{\max}=2$$
$$V_{\min}=0$$
$$d_{\min1}=0$$

这两种情况下的电压、电流分布称为纯驻波，见图 2－12 (a)和(b)。还有一种情况，负载与传输线匹配，$Z_L=Z_c$，$\Gamma_v=0$，有

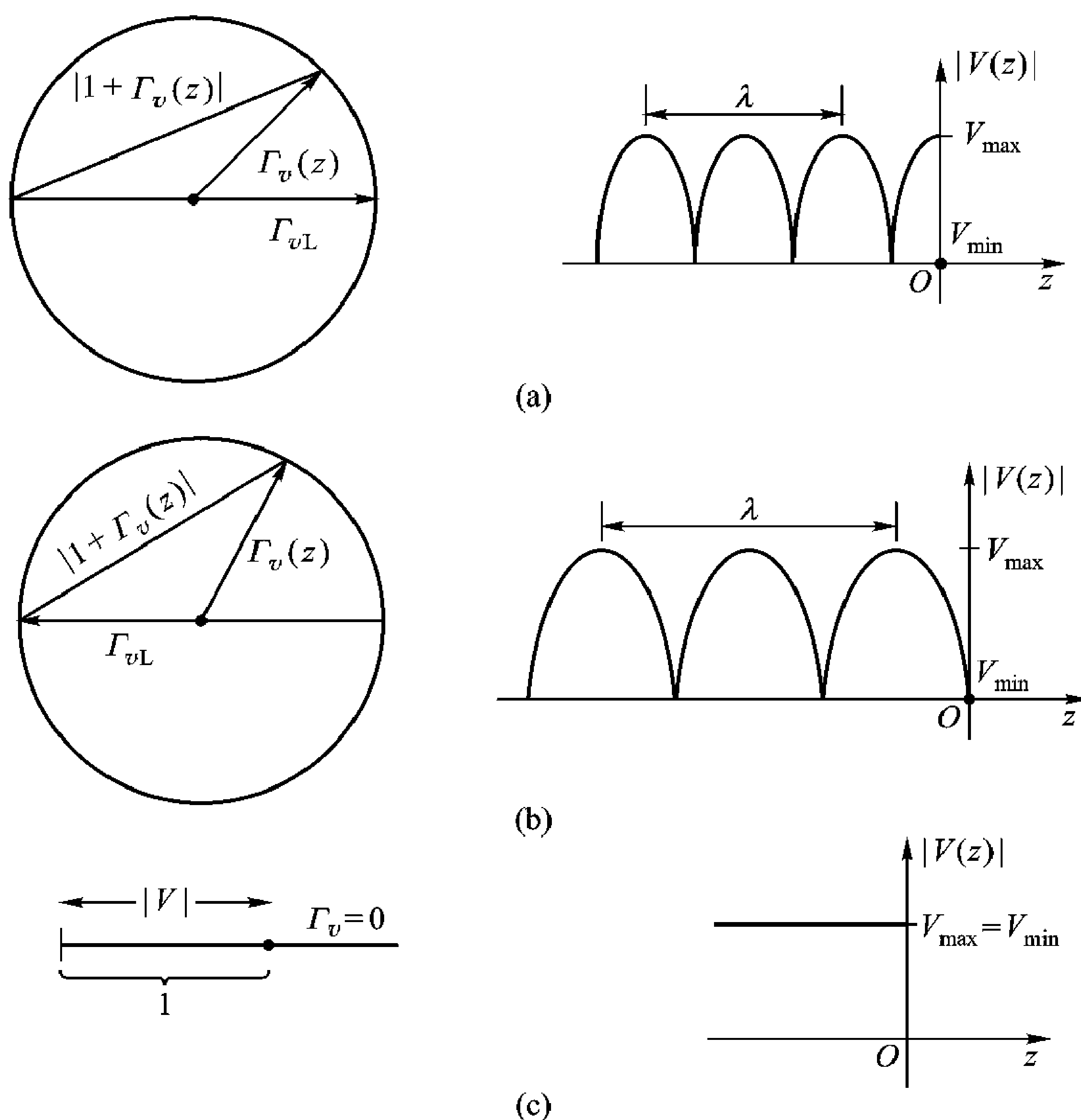


图 2－12　传输线上电压、电流的分布

(a) 负载开路 $Z_L=\infty$　(b) 负载短路 $Z_L=0$　(c) 负载匹配 $Z_L=Z_c$

$$V_{max}=1$$

$$V_{min1}=1$$

电压、电流沿传输线没有变化，这种状态称为行波，见图 2－12（c）。这时传输线上只有入射波，反射波消失。

例 2－6　测得传输线上电压驻波分布如图 2－13，传输线特征阻抗为 50 Ω，求负载阻抗 Z_L。

解：从图 2－13 可得

$$\rho=\frac{8.4}{2.1}=4.0$$

根据式(2.2.28)

$$|\Gamma_{vL}|=0.6$$

电压第一个最小点离开负载距离为 $d_{min1}=0.092\lambda$，根据式(2.2.26)

$$\psi(0)=\frac{4\pi}{\lambda}d_{min1}-\pi=-1.99$$

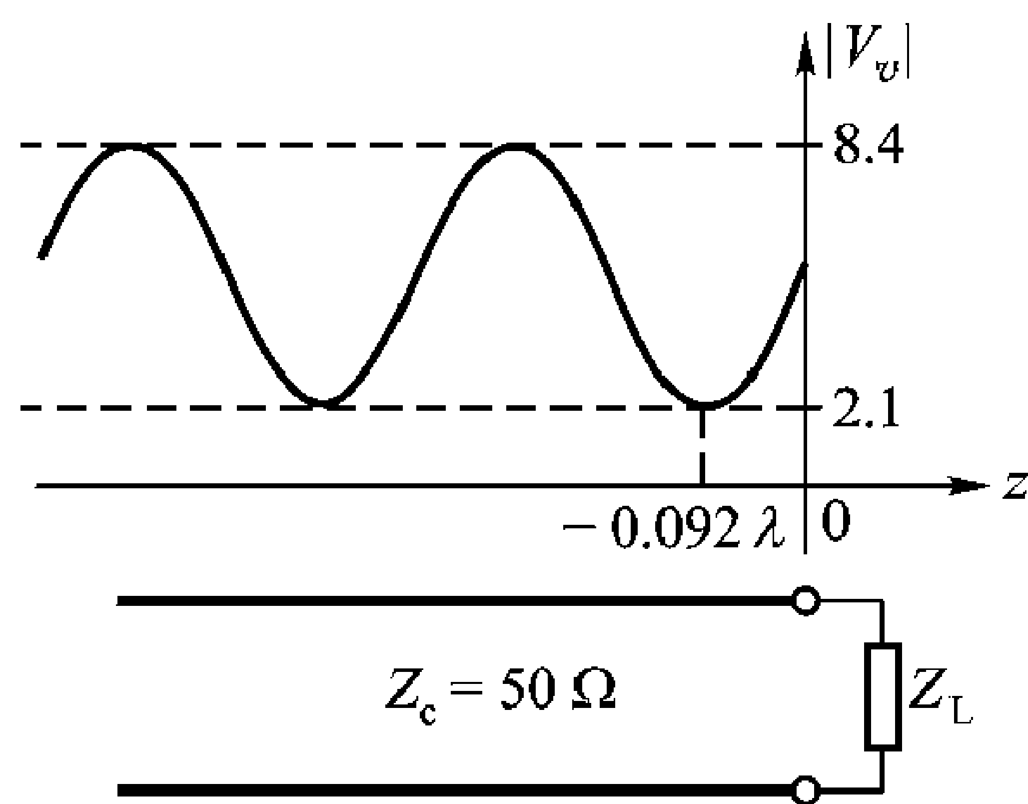


图 2－13　例 2－6 传输线上电压的驻波分布

所以反射系数

$$\Gamma_{vL}=0.6e^{j\psi(0)}=0.6e^{-j1.99}=-0.24-j0.55$$

利用式(2.2.13)得到终端负载 Z_L 为

$$Z_L=Z_c\frac{1+\Gamma_{vL}}{1-\Gamma_{vL}}=50\times\frac{0.76-j0.55}{1.24+j0.55}\ \Omega=(0.348-j0.597)\times 50\ \Omega$$

$$=(17.4-j30)\Omega$$

例 2－7　传输线特征阻抗 $Z_c=50\ \Omega$，终端接负载 $Z_L=(100+j100)\Omega$，试确定以入射波电压 V^ie^{-jkz} 及入射波电流 $I^ie^{-jkz}=\dfrac{V^ie^{-jkz}}{Z_c}$ 归一化的电压 $\left|\dfrac{V}{V^ie^{-jkz}}\right|$ 及归一化电流 $\left|\dfrac{I}{I^ie^{-jkz}}\right|$ 沿传输线的分布。$z=0$ 为负载所在处坐标，见图 2－14（a）。

解：据式(2.2.11)、(2.2.12)，归一化电压 $\left|\dfrac{V}{V^ie^{-jkz}}\right|$、电流 $\left|\dfrac{I}{I^ie^{-jkz}}\right|$ 分别为

$$\left|\frac{V(z)}{V^ie^{-jkz}}\right|=|1+\Gamma_v(z)|$$

$$\left|\frac{I(z)}{I^ie^{-jkz}}\right|=|1-\Gamma_v(z)|$$

而

$$\Gamma_v(z)=\Gamma_v(0)e^{j2kz}=\Gamma_v(0)e^{j4\pi\frac{z}{\lambda}}$$

负载所在位置 $z=0$，反射系数

$$\Gamma_v(0)=\frac{Z_L-Z_c}{Z_L+Z_c}=\frac{50+\mathrm{j}100}{150+\mathrm{j}100}=\frac{1+\mathrm{j}2}{3+\mathrm{j}2}=0.62\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.52}$$

$z=0$ 处归一化电压

$$\left|\frac{V(0)}{V^{\mathrm{i}}}\right|=\left|1+\Gamma_v(0)\right|=\left|1+\frac{1+\mathrm{j}2}{3+\mathrm{j}2}\right|=1.55$$

$z=0$ 处归一化电流

$$\left|\frac{I(0)}{I^{\mathrm{i}}}\right|=\left|1-\Gamma_v(0)\right|=\left|1-\frac{1+\mathrm{j}2}{3+\mathrm{j}2}\right|=0.55$$

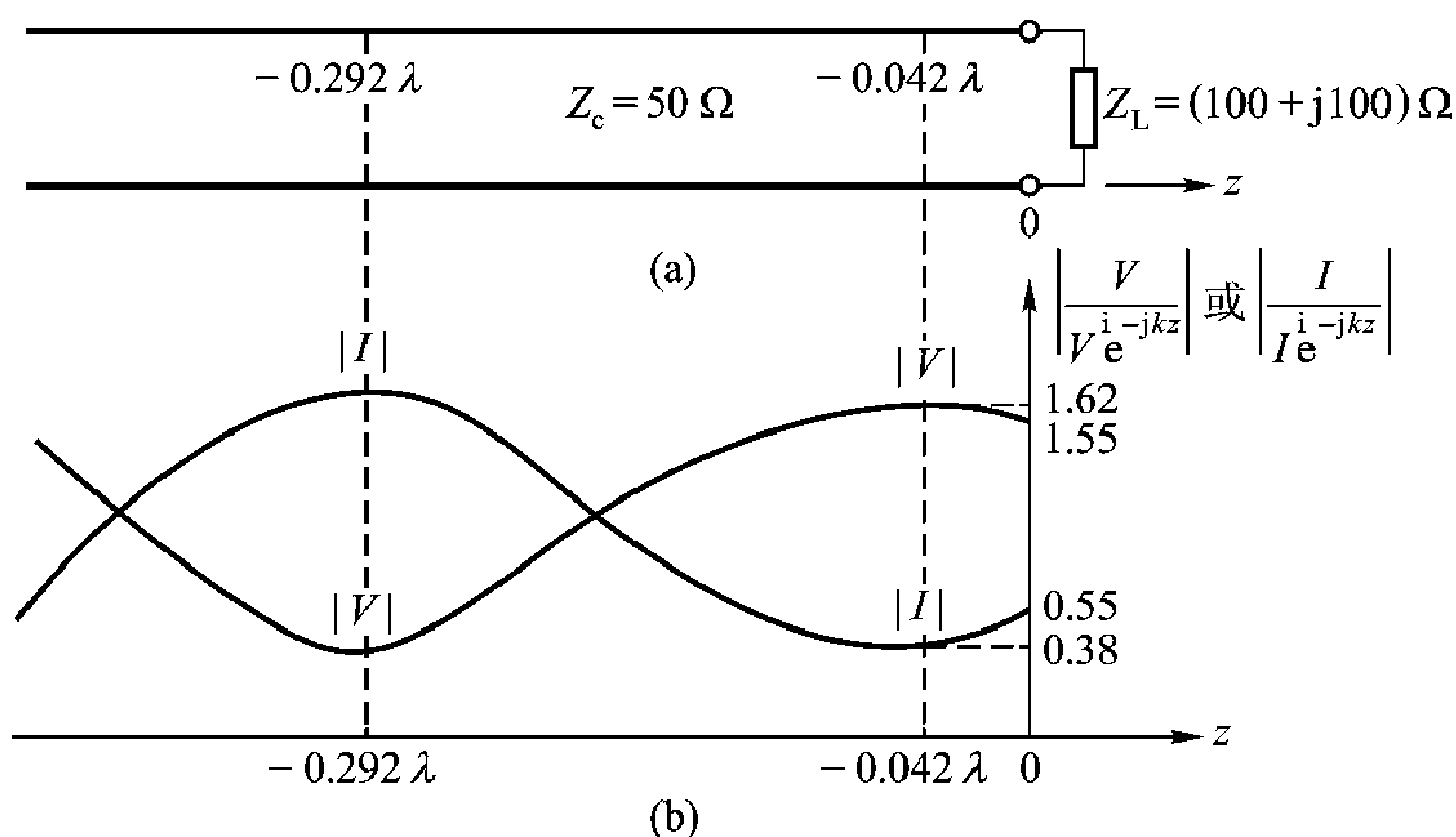


图 2-14　传输线及传输线上的电压、电流分布

(a) 特征阻抗 $Z_c=50\ \Omega$，接负载 $Z_L=(100+\mathrm{j}100)\Omega$ 的传输线

(b) 传输线上归一化电压、电流分布(假定入射波电压 $|V^{\mathrm{i}}|=1\mathrm{V}$)

最大、最小归一化电压 $\left|\frac{V_{\max}}{V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}\right|$、$\left|\frac{V_{\min}}{V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}\right|$ 及其位置 $d_{\max}\big|_V$、$d_{\min}\big|_V$ 为

$$\left|\frac{V_{\max}}{V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}\right|=(1+|\Gamma_v|)=1.62$$

$$\left|\frac{V_{\min}}{V^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}\right|=(1-|\Gamma_v|)=0.38$$

$$d_{\max}\big|_V=\frac{0.52}{4\pi}\lambda=0.042\lambda$$

$$d_{\min}\big|_V=d_{\max}\big|_V+\frac{\lambda}{4}=0.042\lambda+0.25\lambda=0.292\lambda$$

$$\left|\frac{I_{\max}}{I^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}\right|=1+|\Gamma_v|=1.62,\quad d_{\max}\big|_I=d_{\min}\big|_V=0.292\lambda$$

$$\left|\frac{I_{\min}}{I^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}\right|=1-|\Gamma_v|=0.38,\quad d_{\min}\big|_I=d_{\max}\big|_V=0.042\lambda$$

根据上面几个特征位置上归一化电压、电流值，电压、电流沿传输线的大致分布如图2-14(b)，图中传输线长度以波长 λ 归一化。

3. 阻抗(或导纳)沿传输线变换的图示

阻抗或导纳沿传输线的变换，可以直接用式(2.2.16)计算，比较复杂，不易用图解表示，但几种特殊情况下的阻抗沿传输线变换的图示还是很容易得到。

传输线与负载匹配时，$Z_L = Z_c$，$\Gamma_v = 0$，由式(2.2.13)得到 $Z(z) = Z_c$，即传输线任意位置的阻抗等于传输线的特征阻抗。因为传输线与负载匹配时，传输线上只有入射波，电压与电流之比即入射波电压与入射波电流之比，这就是特征阻抗。

对于长度为 l 的一段开路传输线，如坐标原点仍取在负载端(见图2-8)，因为开路端阻抗为无穷大，即 $Z_L = Z(0) = \infty$，代入式(2.2.15b)得到始端 $z = -l$ 处输入阻抗为

$$Z_{in}(z=-l) = \frac{Z_c}{\mathrm{j}\tan kl} = -\mathrm{j}Z_c\cot kl \tag{2.2.29}$$

注意，当 $kl \ll 1$ 时，即相当于低频或传输线长度比波长小得多时

$$Z_{in}(z=-l) \approx \frac{Z_c}{\mathrm{j}kl} = \frac{\sqrt{L/C}}{\mathrm{j}\omega\sqrt{LC}\,l} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega Cl}$$

所以当 $kl \ll 1$ 时，开路传输线相当于一电容。当 $kl = \frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$，…，或 $l = \frac{\lambda}{4}$，$\frac{3}{4}\lambda$，…时，$Z_{in} = 0$，相当于串联 LC 谐振回路。当 $kl = 0$，π，2π，…，或 $l = 0$，$\frac{\lambda}{2}$，λ，…时，$Z_{in} = \infty$，相当于并联 LC 谐振回路。

对于终端短路传输线，$Z_L = Z(0) = 0$，代入式(2.2.15b)得到

$$Z_{in}(z=-l) = \mathrm{j}Z_c\tan kl \tag{2.2.30}$$

当 $kl \ll 1$ 时

$$Z_{in}(z=-l) \approx \mathrm{j}\sqrt{\frac{L}{C}}\omega\sqrt{LC}l = \mathrm{j}\omega Ll$$

所以当 $kl \ll 1$ 时，短路传输线相当于一电感。当 $l = 0$，$\frac{\lambda}{2}$，λ，…时，相当于 LC 串联谐振电路，当 $l = \frac{\lambda}{4}$，$\frac{3}{4}\lambda$，…时，相当于 LC 并联谐振电路。

在终端开路、短路二种情况下输入阻抗随传输线长度 l 的变化见图2-15。

当传输线长度 l 为 $\lambda/4$ 时，$\tan kl = \infty$，代入式(2.2.15b)得到 $\lambda/4$ 传输线的输入阻抗 Z_{in} 为

$$Z_{\text{in}}(z=-\lambda/4)=\frac{Z_{\text{c}}^2}{Z_{\text{L}}} \tag{2.2.31}$$

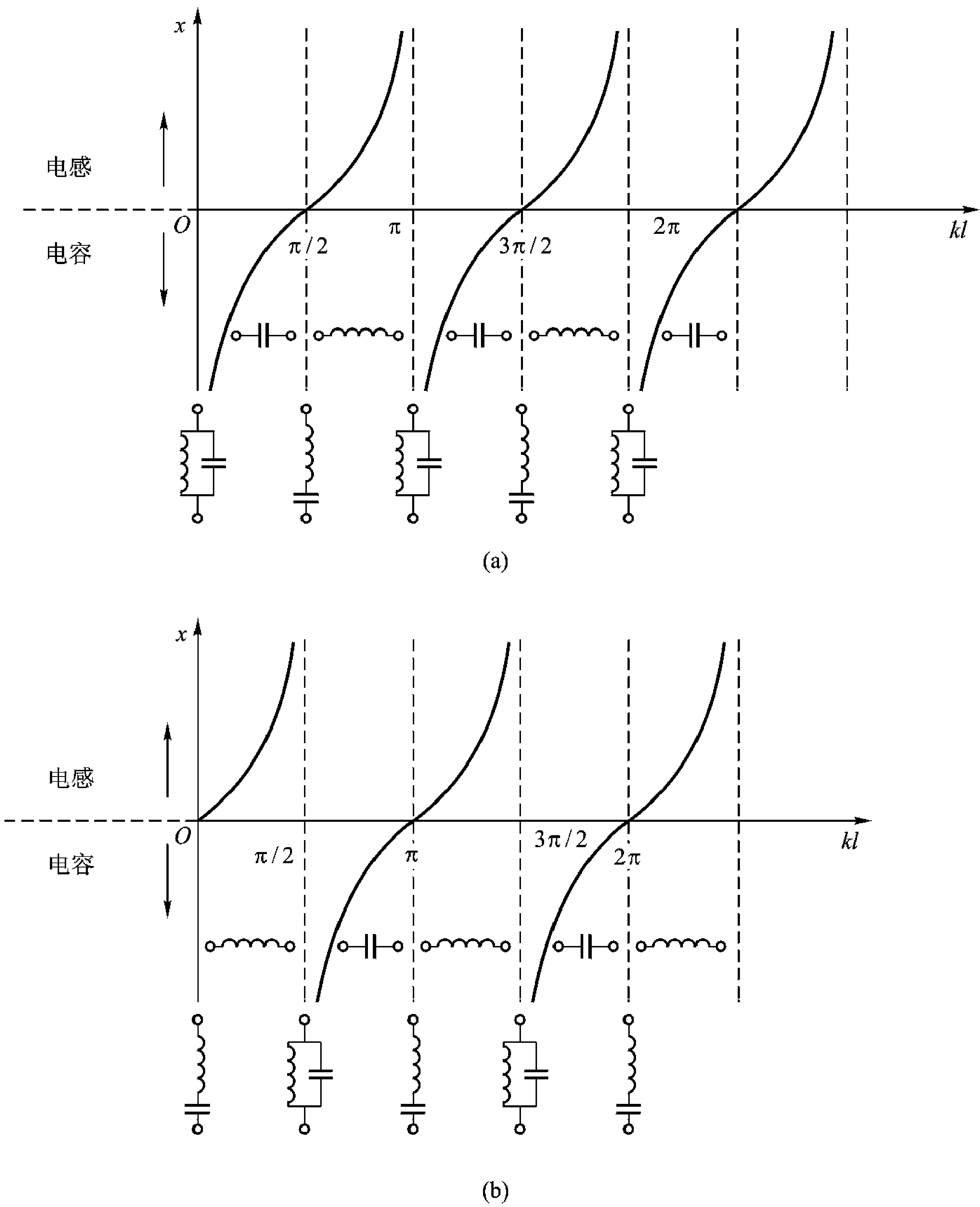


图 2-15 传输线的阻抗变换

(a) 负载开路 (b) 负载短路

即当传输线长度为 $\lambda/4$ 时，输入阻抗 Z_{in}与负载阻抗 Z_{L} 乘积等于传输线特征阻抗的平方。

微带线与平面集成电路工艺兼容，利用开路、短路微带线输入阻抗沿微带

线的变换，可制成分布式微带电路元件。见图2－16，(a)为长度小于$\lambda/4$的开路微带线，可作电路的电容；(b)为长度小于$\lambda/4$的短路微带线，作电路的电感；(c)为$\lambda/4$的开路微带线，作串联谐振电路；(d)为$\lambda/4$的短路微带线，作并联谐振电路。根据式(2.2.31)$\lambda/4$微带线相当于一变压器，可作阻抗变换器，见图2－16(e)。当负载是纯电阻时，即$Z_c=R_L$，如果$\lambda/4$段微带线的设计(主要是宽度w的选择)，使得$Z_{c1}=\sqrt{Z_cR_L}$，即$\lambda/4$段微带线的特征阻抗Z_{c1}等于传输特征阻抗Z_c(一般为纯电阻)与负载电阻R_L乘积的开方，那么$\lambda/4$处输入阻抗$Z_{in}=\frac{Z_{c1}^2}{R_L}=Z_c$，这就是说通过$\lambda/4$微带线的阻抗变换后，实现了阻抗匹配。

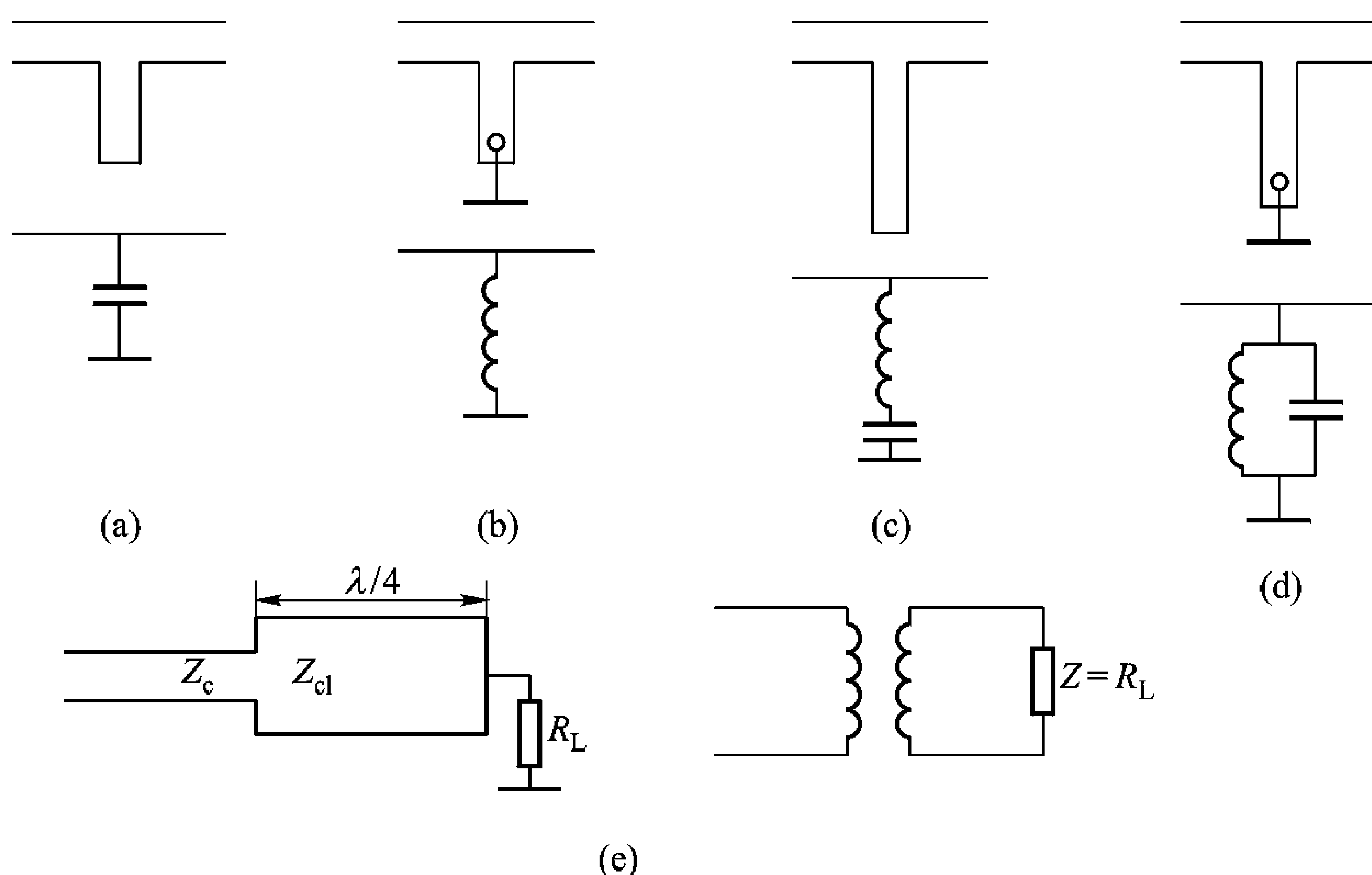


图2－16　微带电路元件

(a) 长度小于$\lambda/4$的开路微带线　(b) 长度小于$\lambda/4$的短路微带线

(c) $\lambda/4$开路微带线　(d) $\lambda/4$短路微带线　(e) $\lambda/4$变换器

开路、短路微带线的这些性质在微带电路设计中得到广泛应用。

例2－8　基于微带线的分布式直流偏置去耦电路示于图2－17(a)，试说明它与图2－17(b)所示的集总式直流偏置去耦电路等效。

解：直流偏置去耦电路其功能对于DC(直流)分量是直通的，对于交流分量是隔离的。图2－17(b)中$C_{低频}$电容量足够大，对低频旁路，而$C_{高频}$对高频分量旁路，因而电源中交变分量不会干扰电路工作。对于高频分量，电感L起扼流作用，因而高频分量不会到电源。频率高时，$C_{高频}$、$L_{高频}$都很小，可用$\lambda/4$开路微带线、短路微带线代替。30 Ω低阻抗$\lambda/4$开路微带线的输入阻抗(容抗)接近零，相当于短路，而100 Ω较高阻抗微带线其一端已被$\lambda/4$开路

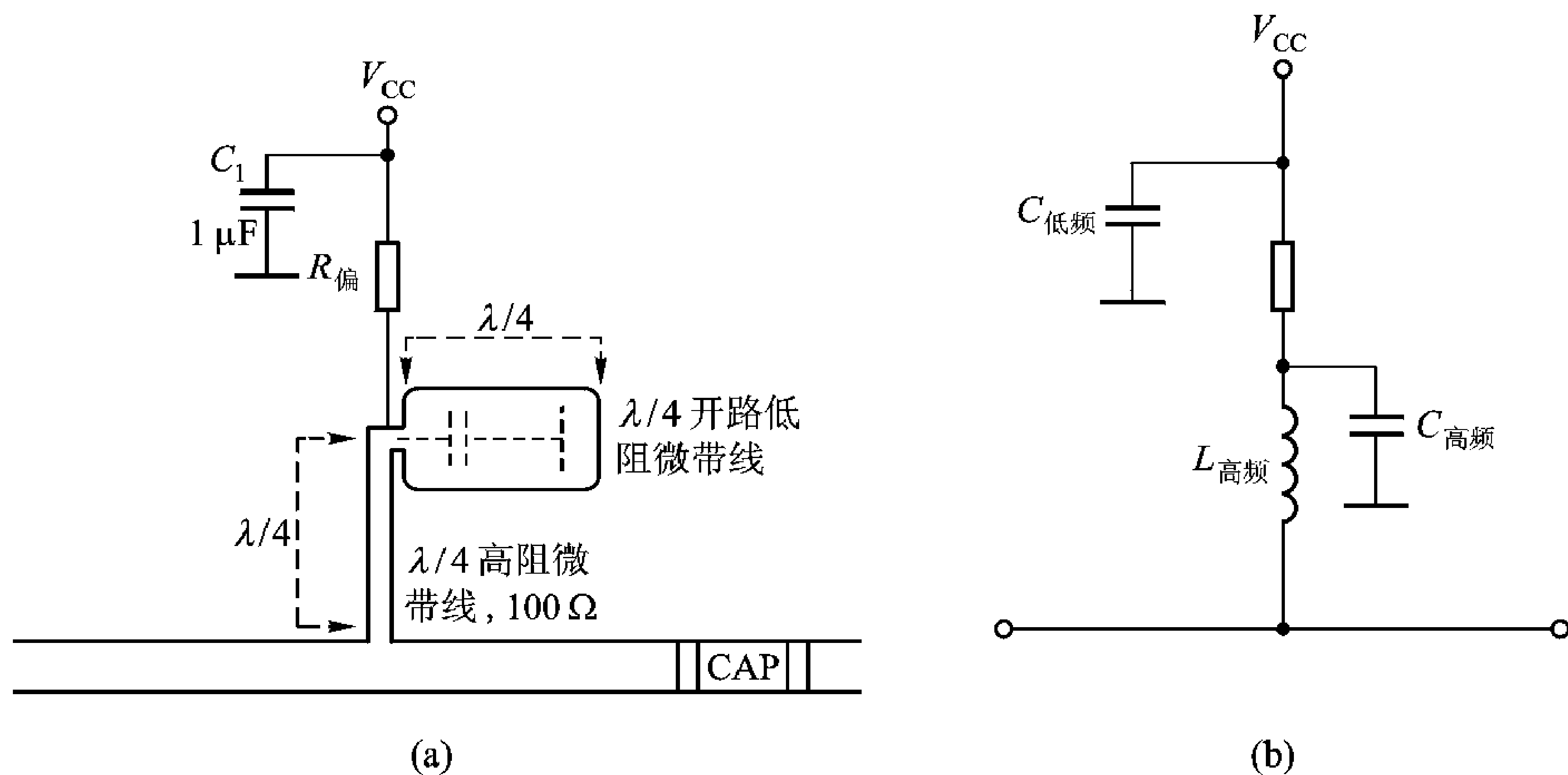


图 2-17　直流偏置去耦电路

(a) 基于微带线的偏置电路　(b) 基于集总元件的偏置电路

微带线短路，从电路主线看，它相当于 $-\lambda/4$ 短路线，其输入阻抗接近无穷大，因而高频分量不会进入电源。

根据本节前面的讨论，我们可以用 5 组特征量描述传输线的状态。低频时我们习惯于用电压、电流描述传输线的状态，高频时则用反射系数 Γ_v 描述传输线的状态最为合适，因为高频时电压、电流没有确切、惟一的定义，且不能直接测量，而反射系数 Γ_v 是可以直接测量的。此外，由反射系数 Γ_v 导出其他特征量也十分方便。现在要问，传输线的状态与哪些因素有关？显然，传输线的状态与其自身的特征参数 k、Z_c 有关，与传输线始端的激励有关。传输线始端的激励可以用激励电压幅度与频率表示。对于指定的传输线，给定的激励，传输线的状态则由终端负载 Z_L 惟一地确定。因为由终端负载 Z_L，利用式(2.2.21)可得到负载处的反射系数 Γ_v $(z=0)$。根据式(2.2.10)可得到传输线任意位置的反射系数 Γ_v (z)。而由 Γ_v 可方便得出描述传输线状态的其他特征量。

2.3　传输功率与传输效率

2.3.1　传输功率

传输线上传输的功率可按下式计算

$$P(z)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[V(z)\cdot I^*(z)] \tag{2.3.1}$$

式中 $V(z)$、$I(z)$ 由入射波、反射波两项构成。引入反射系数后，$V(z)$、$I(z)$ 为式(2.2.11)、式(2.2.12)表示，代入式(2.3.1)得到

$$P(z)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{V^{\mathrm{i}}[1+\Gamma_v(z)]\cdot\frac{V^{\mathrm{i}*}}{Z_{\mathrm{c}}^*}[1-\Gamma_v^*(z)]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{|V^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}^*}-\frac{|V^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}^*}|\Gamma_v(z)|^2+\frac{|V^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}^*}[\Gamma_v(z)-\Gamma_v^*(z)]\right\}$$

对于无损耗传输线，Z_{c} 是实数，则上式第三项等于零。任意一点处电压反射系数的模恒等于 $|\Gamma_v|$，所以无耗传输线上传输功率 $P(z)=P$，不随位置而变，即

$$P=\frac{1}{2}\frac{|V^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}}-\frac{1}{2}\frac{|V^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}}|\Gamma_v|^2=P^{\mathrm{i}}-P^{\mathrm{r}} \tag{2.3.2}$$

式中

$$P^{\mathrm{i}}=\frac{1}{2}\frac{|V^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}} \tag{2.3.3}$$

$$P^{\mathrm{r}}=\frac{1}{2}\frac{|V^{\mathrm{i}}|^2}{Z_{\mathrm{c}}}|\Gamma_v|^2 \tag{2.3.4}$$

分别为传输线 z 处的入射波功率和反射波功率，式(2.3.2)表明，传输线上任一点功率等于入射波功率与反射波功率之差。由式(2.3.3)、(2.3.4)得到

$$\frac{P^{\mathrm{r}}}{P^{\mathrm{i}}}=|\Gamma_v|^2 \tag{2.3.5}$$

所以反射波功率与入射波功率之比等于电压反射系数模之平方，即等于功率反射系数。

例 2-9　平行双导线当终端连接电视机 A 和 B 时，驻波系数 ρ 分别为 5.8 和 1.5。求两种情况下终端反射功率与入射功率之比。

解： 电视机 A 为终端负载时，从式(2.2.28)可得

$$|\Gamma_v|=\frac{5.8-1}{5.8+1}=0.706$$

所以

$$\frac{P^{\mathrm{r}}}{P^{\mathrm{i}}}=|\Gamma_v|^2=0.5$$

当终端负载为电视机 B 时，进行同样运算，可得

$$\frac{P^{\mathrm{r}}}{P^{\mathrm{i}}}=0.04$$

所以电视机 A 作终端负载时，50%的功率被反射回去，而电视机 B 作负载时，只有 4%的功率被反射回去。因此就负载与传输线匹配而言，平行双导线与电视机 B 的匹配比 A 的好。

对于无损传输线，通过线上任一点的传输功率应该是相同的。我们可以取

线上任一点的电压和电流来计算功率。但是为了简便起见，一般都取电压腹点或节点处值计算，因为该处的阻抗为纯电阻，电压与电流同相。如取电压腹点，则得功率为

$$P=\frac{1}{2}|V_{max}|\cdot|I_{min}|=\frac{1}{2}\frac{|V_{max}|^2}{Z_c\rho} \tag{2.3.6}$$

如果取电压节点，则得

$$P=\frac{1}{2}|V_{min}|\cdot|I_{max}|=\frac{1}{2}\frac{Z_c\ |I_{max}|^2}{\rho} \tag{2.3.7}$$

可见，当传输线的耐压一定或能载的电流一定，驻波系数 ρ 越趋近于1，传输功率越大。

在不发生电压击穿条件下，传输线允许传输的最大功率称为传输线的功率容量。据此定义，传输线的功率容量为

$$P_{br}=\frac{1}{2}\frac{|V_{br}|^2}{Z_c} \tag{2.3.8}$$

式中 V_{br}为线间击穿电压。

2.3.2　传输效率

由于传输线总有一定损耗，随着传输距离 z 的增加，传输线上电压、电流幅度不断减小，传输线所传递的功率也不断减小。现以图 2－8 为例，定义传输效率为传输线终端 $z=0$ 处所接负载吸收功率 P_L 与传输线入口 $z=-l$ 处的输入功率 P_{in}之比，用 η 表示，即

$$\eta=\frac{P_L}{P_{in}} \tag{2.3.9}$$

考虑损耗后传输线上电压、电流表示式为式(2.1.33)、(2.1.34)。$z=0$ 处反射系数为

$$\Gamma_v(0)=\frac{V^r}{V^i} \tag{2.3.10}$$

利用式(2.3.10)并根据式(2.1.33)、(2.1.34)得到电压、电流的复数表示

$$V=V^i\left(e^{-k_i z}e^{-jk_r z}+\Gamma_v(0)e^{k_i z}e^{jk_r z}\right) \tag{2.3.11}$$

$$I=\frac{V^i}{Z_c}\left(e^{-k_i z}e^{-jk_r z}-\Gamma_v(0)e^{k_i z}e^{jk_r z}\right) \tag{2.3.12}$$

传输线任一点传输功率为

$$P(z)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[VI^*\right]=\frac{1}{2}\frac{|V^i|^2}{Z_c^*}\left(e^{-2k_i z}-|\Gamma_v(0)|^2e^{2k_i z}\right) \tag{2.3.13}$$

所以 $z=0$ 处负载吸收功率为

$$P_L = P(z=0) = \frac{|V^i|^2}{2Z_c^*}(1 - |\Gamma_v(0)|^2) \tag{2.3.14}$$

$z = -l$ 处输入功率为

$$P_{in} = P(z=-l) = \frac{|V^i|^2}{2Z_c^*}(e^{2k_i l} - |\Gamma_v(0)|^2 e^{-2k_i l}) \tag{2.3.15}$$

所以传输效率为

$$\eta = \frac{1 - |\Gamma_v(0)|^2}{e^{2k_i l} - |\Gamma_v(0)|^2 e^{-2k_i l}} \tag{2.3.16}$$

利用指数函数与双曲函数之间关系，上式变为

$$\eta = \frac{1}{\mathrm{ch}\, 2k_i l + \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\mathrm{sh}\, 2k_i l} \tag{2.3.17}$$

式中 ρ 为负载端驻波系数。

假如传输线损耗很小，或传输线长度很短，满足 $k_i l \ll 1$，则 $\mathrm{ch}\, 2k_i l \approx 1$，$\mathrm{sh}\, 2k_i l \approx 2k_i l$，于是

$$\eta \approx \frac{1}{1 + \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)k_i l} \approx 1 - \left(\frac{1}{\rho} + \rho\right)k_i l \tag{2.3.18}$$

由此可见，(1) ρ 一定时，k_i 越小，l 越短，η 越高；(2) $k_i l$ 一定时，ρ 越接近 1，η 越高。需要指出的是这里所分析的只是线的损耗对传输功率的影响，未考虑反射波的影响。

2.4 传输线圆图

在微波和天线工程中经常遇到阻抗计算和阻抗匹配的问题，例如已知驻波系数或反射系数需要求传输线的输入阻抗，或相反。原则上我们可以利用前面导出的式 (2.2.15)、(2.2.17) 等变换关系式进行计算，但非常麻烦，费时且不直观。利用本节介绍的传输线圆图则很简便，并能满足一般工程应用要求。

以图 2-8 为例，输入阻抗计算可以有两种途径：一是直接用式 (2.2.17)，将终端负载阻抗 Z_L 代入，即可求出始端输入阻抗 $Z_{in}(z=-l)$；另一途径是，先利用阻抗与反射系数变换关系式 (2.2.14) 求出负载端 $z=0$ 处反射系数 $\Gamma_v(0)$，然后利用反射系数变换关系式 (2.2.9a) 求出输入端 $z=-l$ 处反射系数 $\Gamma_v(-l)$，最后再一次利用阻抗与反射系数变换关系式 (2.2.13) 求出 $z=-l$ 处输入阻抗 $Z_{in}(z=-l)$。在后面一种计算步骤中反射系数沿传输线的变换是很方便的，只要在图 2-9 所示的等 $|\Gamma_v(0)|$ 圆上旋转即可。如果利用阻抗与反射系数变换关系在反射系数圆的图上同时能把阻抗以适当方式标出，那么可直

接用这个图由反射系数求阻抗，或由阻抗求反射系数。在反射系数图上表示阻抗最简便的方法就是把阻抗实部 r 及虚部 x 的等值线标出。传输线圆图正是体现这一变换关系的图。它是在一个单位电压反射系数圆内包含着传输线各种特征量，如归一化阻抗、反射系数和驻波系数及其他各种数据的图，能方便地进行传输线的阻抗计算和阻抗匹配。

本节首先讨论传输线圆图的构成，然后举例说明其使用方法。

2.4.1 反射系数圆与阻抗圆图

前面已提过传输线上反射系数变换的轨迹是在反射系数 Γ_v 复平面上的同心圆。反射系数模的最大值为 1，所以传输线上所有可能的反射系数值必须落在半径为 1 的单位圆内，如图 2-18。用反射系数表示阻抗的好处是，传输线所有可能的阻抗（或导纳）值都在一个单位圆内。而如果阻抗或导纳在平面直角坐标系中表示时，阻抗的实部 r，虚部 x 都可趋于无穷大，表示出来很不方便。当然，在平面直角坐标系中等 r、等 x 线是平行于坐标轴的直线，表示起来很方便。现在的问题是如何将直角坐标系中等 r、等 x 线映射到极坐标系的反射系数单位圆内。为此我们利用阻抗与反射系数的变换关系式（2.2.13）

$$Z(z) = Z_c \frac{1+\Gamma_v(z)}{1-\Gamma_v(z)}$$

将 $Z(z)$ 以特征阻抗 Z_c 归一化，即

$$z(z) = \frac{Z(z)}{Z_c} = \frac{1+\Gamma_v(z)}{1-\Gamma_v(z)} \tag{2.4.1}$$

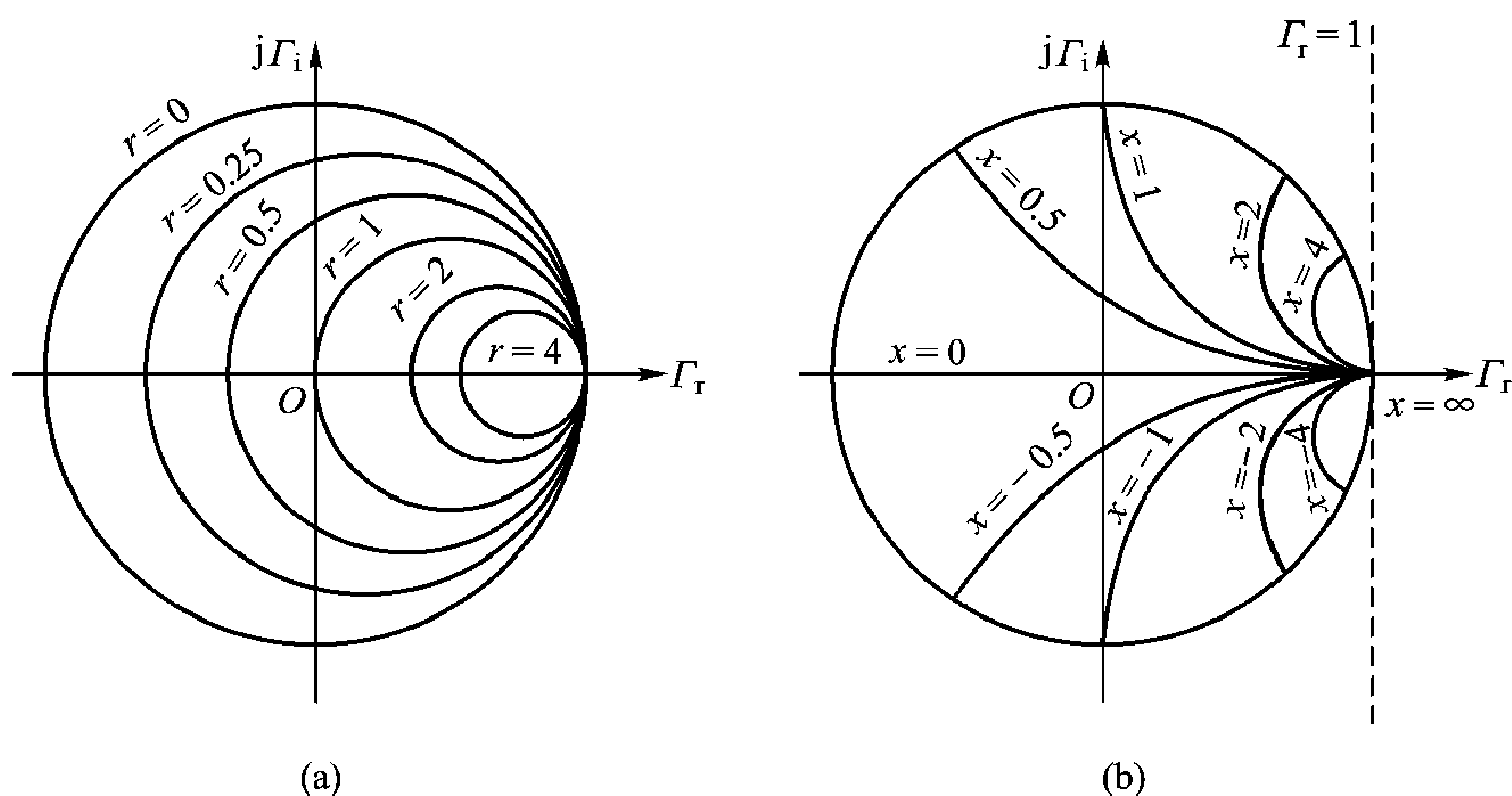


图 2-18 Γ 平面上归一化阻抗圆
(a) 归一化电阻圆 (b) 归一化电抗圆

令归一化阻抗 $z(z)=r+\mathrm{j}x$，r、x 分别为归一化电阻与电抗；反射系数 Γ 用其实部、虚部之和表示，即 $\Gamma=\Gamma_{\mathrm{r}}+\mathrm{j}\Gamma_{\mathrm{i}}$。为了书写方便，本节后面将表示电压反射系数 Γ_v 的下标 v 省去。将 $z(z)$、Γ 代入式(2.4.1)得到

$$r+\mathrm{j}x=\frac{1+\Gamma_{\mathrm{r}}+\mathrm{j}\Gamma_{\mathrm{i}}}{1-\Gamma_{\mathrm{r}}-\mathrm{j}\Gamma_{\mathrm{i}}}=\frac{1-\Gamma_{\mathrm{r}}^2-\Gamma_{\mathrm{i}}^2+\mathrm{j}2\Gamma_{\mathrm{i}}}{(1-\Gamma_{\mathrm{r}})^2+\Gamma_{\mathrm{i}}^2} \tag{2.4.2}$$

上式两边实部、虚部分别相等，得到

$$\left(\Gamma_{\mathrm{r}}-\frac{r}{1+r}\right)^2+\Gamma_{\mathrm{i}}^2=\left(\frac{1}{1+r}\right)^2 \tag{2.4.3}$$

$$(\Gamma_{\mathrm{r}}-1)^2+\left(\Gamma_{\mathrm{i}}-\frac{1}{x}\right)^2=\left(\frac{1}{x}\right)^2 \tag{2.4.4}$$

式(2.4.3)、(2.4.4)就是将直角坐标系等 r、等 x 线映射到反射系数圆上的关系式。

式(2.4.3)是归一化电阻 r 为常数时反射系数 Γ 的矢量轨迹，亦是归一化电阻 r 为常数时归一化阻抗的轨迹。其轨迹为一族圆，圆心坐标为 $[r/(r+1),0]$，半径为 $1/(r+1)$。图 2-18 (a)列出了 $r=0$、1/4、1/2、1、2、4、∞阻抗轨迹。由图可见，所有的圆都通过(1,0)，r 和 $1/r$ 圆与实轴的交点关于圆中心对称。

式(2.4.4)是归一化电抗 x 为常数时反射系数 Γ 的矢量轨迹，亦是归一化电抗 x 为常数时归一化阻抗的轨迹。其轨迹也为一族圆，圆心坐标为 $(1,1/x)$，半径为 $1/x$。图 2-18 (b)列出了 $x=0$，±0.5，±1，±2，±4，∞的阻抗轨迹，由图可见，$\pm x$ 的圆弧关于实轴成镜像对称，x 和 $-1/x$ 圆与 $\Gamma=1$ 的圆交点在直径两端相对应。x 圆和 $1/x$ 圆与 $\Gamma=1$ 的圆交点关于虚轴对称。

将上述归一化电阻圆、归一化电抗圆加到反射系数圆上，就得到完整的阻抗圆图，见图 2-19。

由上述阻抗圆图的构成，阻抗圆图上部分特征点、线、区域的意义解释如下：

(1) 阻抗圆的上半圆内，$x>0$，其电抗为感抗；下半圆内，$x<0$，其电抗为容抗。

(2) 阻抗圆图的实轴 $x=0$，实轴上每一点对应的阻抗都是纯电阻，叫做纯电阻线。

(3) $|\Gamma|=1$ 的圆，$r=0$，其上对应的阻抗都是纯电抗，叫做纯电抗圆。

(4) 实轴左端点，即左实轴与 $|\Gamma|=1$ 的圆的交点，$z=0$，代表阻抗短路点，而右实轴与 $|\Gamma|=1$ 的圆的交点，即右端点，$z=\infty$，代表开路点。圆图中心 $z=1$，$|\Gamma|=0$，$\rho=1$，叫做阻抗匹配点。

(5) 圆图实轴左半径上的点代表电压波节点或电流波腹点，其上数据代表

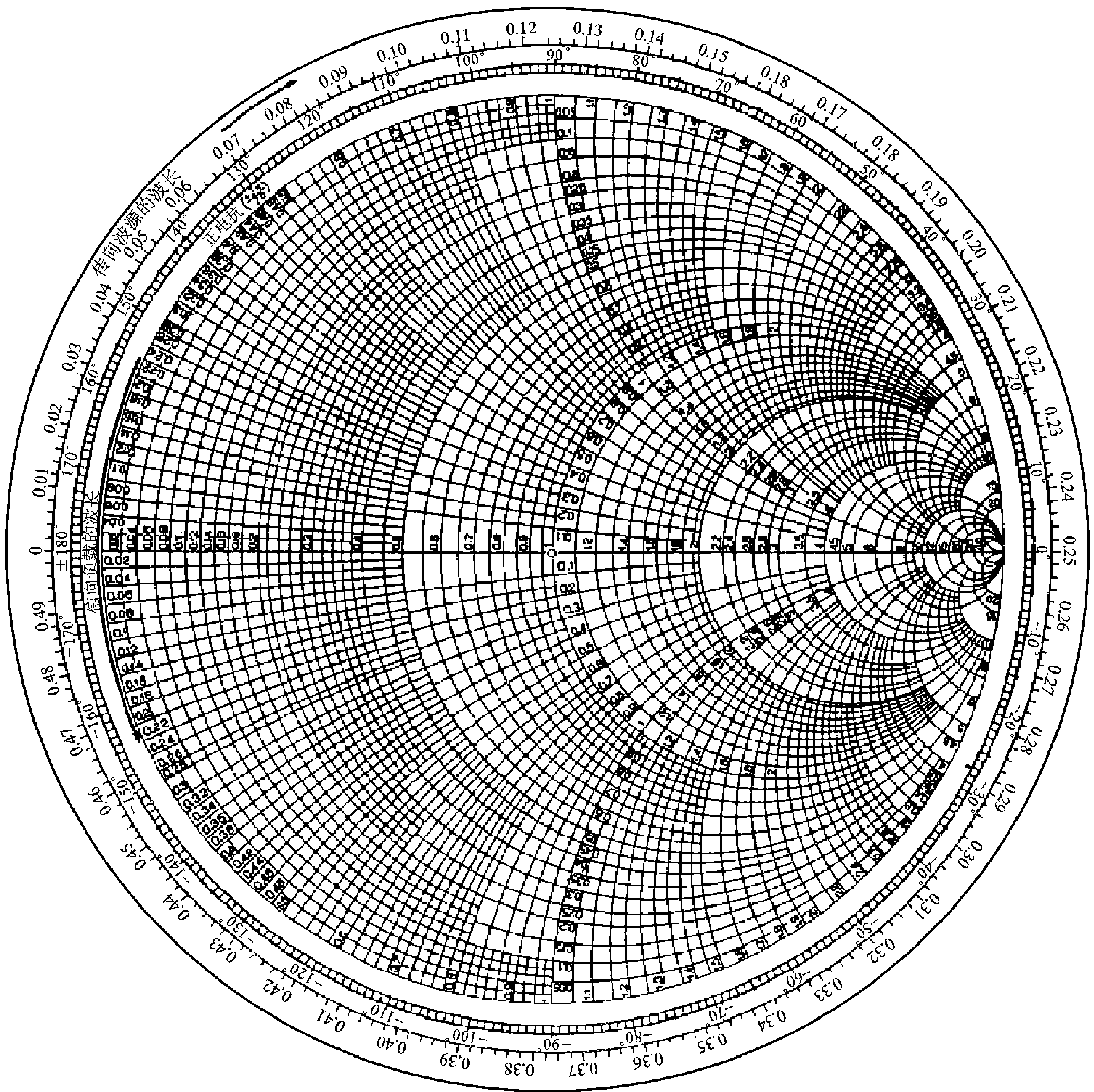


图 2-19 阻抗圆图

r_{min}和驻波系数的倒数。实轴右半径上的点代表电压波腹点或电流波节点，其上数据代表 r_{max}和驻波系数 ρ。因为根据式(2.2.27)，驻波系数 ρ 为

$$\rho = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

实轴上为纯电阻 r，在实轴左半径，$r_{min} < 1$，$|\Gamma| = \dfrac{1 - r_{min}}{1 + r_{min}}$，所以

$$\rho = \frac{1 + \dfrac{1 - r_{min}}{1 + r_{min}}}{1 - \dfrac{1 - r_{min}}{1 + r_{min}}} = \frac{1}{r_{min}}$$

在实轴右半径，$r_{\max}>1$，$|\Gamma|=\dfrac{r_{\max}-1}{r_{\max}+1}$，所以

$$\rho=\frac{1+\dfrac{r_{\max}-1}{r_{\max}+1}}{1-\dfrac{r_{\max}-1}{r_{\max}+1}}=r_{\max}$$

(6) 阻抗圆图上短路点(实轴左端点)与圆图上某一阻抗对应的点连线长度就是以入射波电压归一化的电压的模$|1+\Gamma|$，短路点与该阻抗对称点(以圆图圆心为对称中心)连线长度就是以入射波电流归一化的电流的模$|1-\Gamma|$。

(7) 沿圆图旋转一周为$\lambda/2$，不是λ。

使用圆图时要注意以下几点：

(1) 旋转的方向问题：在传输线由负载向电源方向移动(l增大)，在圆图上应顺时针方向旋转；反之，由电源向负载方向移动(l减小)，则应逆时针方向旋转。这是因为l是从负载端计算的。由式(2.2.22)可知，当l增加时，Γ_v $(z=-l)$的相角减小，故应顺时针旋转；而l减小时，Γ_v $(z=-l)$的相角增大，应逆时针旋转。

(2) 反射系数值圆图上未标出，计算时需将半径等分来确定：圆图中心$|\Gamma|=0$，最大圆周的$|\Gamma|=1$。有的圆图在下面附有相应计算尺，其上标有反射系数、驻波系数，计算时可直接读取。

(3) 为便于计算，在圆图纯电抗圆外面还有两个同心圆，最里面一个圆标有以度表示的反射系数的相角ψ。另外一个同心圆标出的是以波长λ归一化的传输线长度d/λ(通常叫电长度)，表示向电源(或向负载)方向的电长度。为了避免圆图上出现几次零值点，电长度以π为起始点，但这对计算旋转的电长度无关紧要，因为旋转的电长度是传输线上两点间的相对距离。同时要注意，圆图中的归一化阻抗点z所对应的电长度是由连接圆图中心和z点的直线延长与电长度圆周的交点来确定，而不是由z所在的电抗曲线与电长度圆周的交点来确定。

2.4.2　导纳圆图

在实际电路中，有时已知的不是阻抗而是导纳，并需要计算导纳。微波电路常用并联元件构成，这时用导纳计算更方便。用以计算导纳的圆图称为导纳圆图，利用导纳与反射系数的关系，并定义归一化导纳$y(z)$，有

$$y(z)=\frac{Y(z)}{Y_c}=\frac{G}{Y_c}+\mathrm{j}\frac{B}{Y_c}=g+\mathrm{j}b \tag{2.4.5}$$

式中$g=\dfrac{G}{Y_c}$，$b=\dfrac{B}{Y_c}$，为归一化电导与电纳。

代入关系式(2.2.19)得到

$$y(z)=g+\mathrm{j}b=\frac{1+\Gamma_i(z)}{1-\Gamma_i(z)} \tag{2.4.6}$$

它与式(2.4.1)形式上完全一致，只是归一化阻抗用相应的归一化导纳代替，r 换成 g，x 换成 b，电压反射系数 Γ_v 换成电流反射系数 Γ_i，而归一化阻抗与归一化导纳互为倒数

$$y(z)=\frac{1}{z(z)}$$

另一方面，长度为 $l=\frac{\lambda}{4}$ 的无耗传输线段，根据式(2.2.31)，负载阻抗 Z_L 与输入阻抗 $Z_{in}\left(l=\frac{\lambda}{4}\right)$ 有如下关系：

$$Z_{in}\left(l=\frac{\lambda}{4}\right)\cdot Z_L=Z_c^2 \quad 或 \quad z_{in}\left(l=\frac{\lambda}{4}\right)z_L=1$$

而

$$y_L=\frac{1}{z_L}$$

于是得到

$$z_{in}\left(l=\frac{\lambda}{4}\right)=y_L \quad 和 \quad z_L=y_{in}\left(l=\frac{\lambda}{4}\right) \tag{2.4.7}$$

这表明，圆图中任一点的归一化阻抗值就是经 $\lambda/4$ 后的归一化导纳值，而该归一化阻抗对应的归一化导纳值则是经 $\lambda/4$ 后的归一化阻抗值。因此，阻抗圆图的 (r,x) 点绕圆图中心旋转 180°即得到其对应的归一化导纳值 (g,b)，将整个阻抗圆图旋转 180°即得到导纳圆图，如图 2-20。

由于

$$g+\mathrm{j}b=\frac{1}{r+\mathrm{j}x}=\frac{r}{r^2+x^2}-\mathrm{j}\frac{x}{r^2+x^2}$$

可见 b 的符号与 x 的符号相反，所以导纳圆图的上半圆内 b 为负，下半圆内的 b 为正。

阻抗圆图可以当导纳圆图用，也可这样理解，因为

$$z=\frac{1+\Gamma_v}{1-\Gamma_v}=\frac{1+|\Gamma_v|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}}{1-|\Gamma_v|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}}$$

而

$$y=\frac{1-\Gamma_v}{1+\Gamma_v}=\frac{1-|\Gamma_v|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}}{1+|\Gamma_v|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}}=\frac{1+|\Gamma_v|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi-\pi)}}{1-|\Gamma_v|\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi-\pi)}}$$

所以如果在阻抗圆图上已知传输线某处的归一化阻抗点，则该点沿等 Γ 圆旋转 180°后的对应点即为对应的归一化导纳点。

所以，将阻抗圆图整个地旋转 180°就得到导纳圆图，但实际上还是原来的

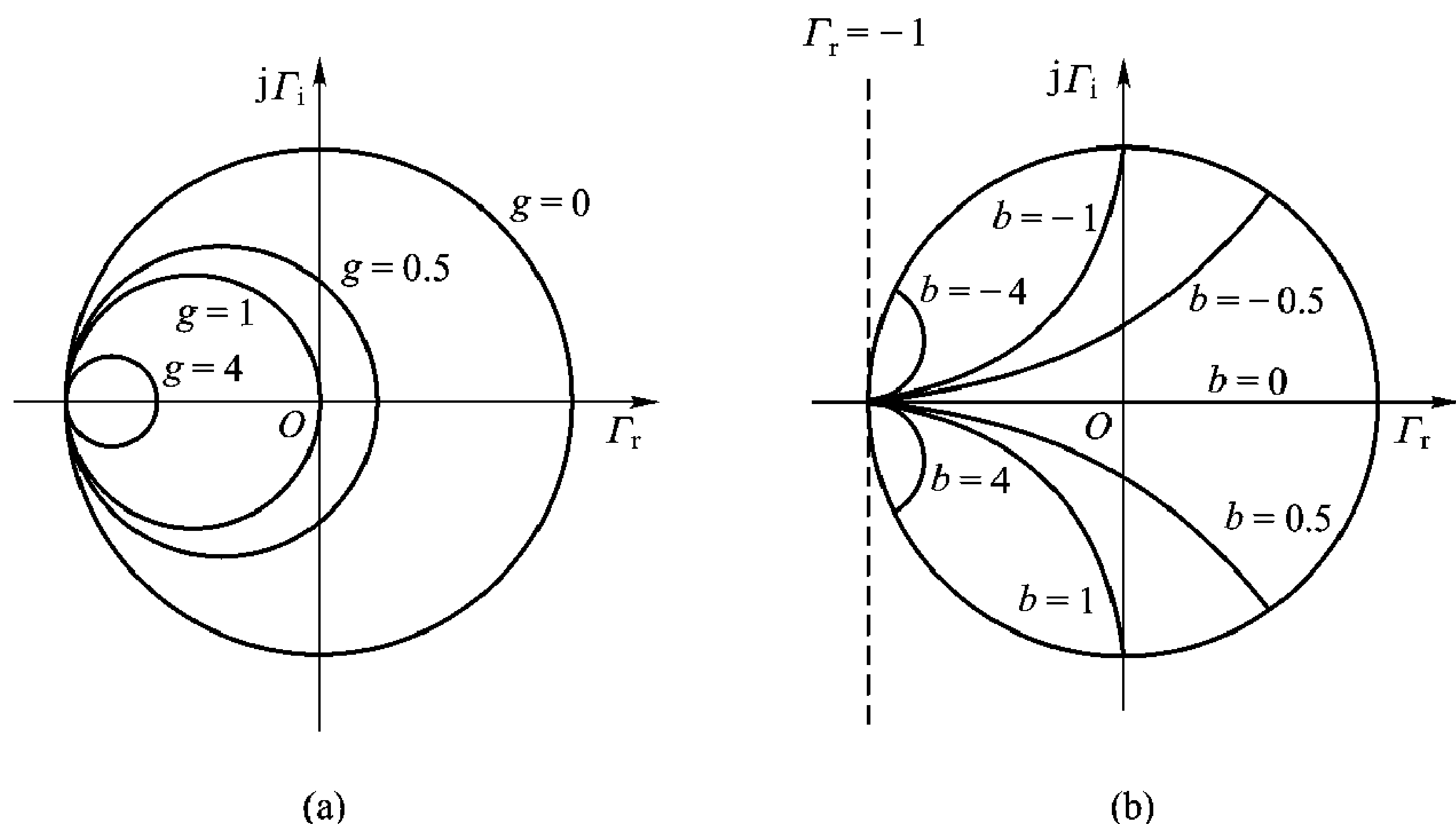


图 2－20 导纳圆图

(a) 等电导圆 (b) 等电纳圆

阻抗圆图。但如果由某点阻抗求该点的导纳，则先求该点的归一化阻抗，然后沿等 Γ 圆旋转 180°后的相应点就是该点的归一化导纳点。

如果由传输线上某点阻抗或导纳求另一点阻抗或导纳，都可用图 2－19 所示的阻抗圆图求。此时圆图上相应点的值或为归一化阻抗值，或为归一化导纳值。但图 2－19 所示的阻抗圆图当导纳圆图用时，要注意圆图上特征点、线、面与当作阻抗圆图用时的区别，主要是：

(1) 圆图上半圆 $b>0$，电抗为容抗；下半圆 $b<0$，其电抗为感抗。

(2) 圆图实轴 $b=0$，是纯电导线。

(3) $|\Gamma|=1$ 的圆 $g=0$，是纯电纳圆。

(4) 实轴左端点与 $|\Gamma|=1$ 的圆交点，$y=0$，是开路点，而右实轴与 $|\Gamma|=1$ 的圆的交点，即右端点，$y=\infty$，代表短路，圆图中心仍是匹配点。

(5) 圆图实轴左半径上点代表电压波腹、电流波节，其上数据代表 $g_{\min}$和驻波系数倒数 $1/\rho$，而实轴右半径上的点代表电压波节、电流波腹，其上数据代表 $g_{\max}$和驻波系数 ρ。

所以具体应用时，阻抗圆图、导纳圆图实际上是同一张图，只要记住圆图上特征点、线、面所代表的物理意义的区别就可以了。

2.5 圆图应用举例

圆图在微波技术发展史上具有里程碑式的作用，在微波电路设计中圆图得到广泛应用。以下例题只是圆图的某些基本应用。

1. 圆图上任一点对应一个具体的负载，而任何一个负载在圆图上可找到

相应的点。

例 2-10 求图2-21所示圆图上 A 点对应的归一化阻抗 z_A、导纳 y_A 以及 $(\rho_A, d_{\min 1_A})$，$(|\Gamma_A|, \psi_A)$。

解： 过 A 点的等 r 线与等 x 线的值都是 1，所以

$$z_A = 1 + \mathrm{j}1$$

将 A 点绕圆心转过 180°到 B 点，或将 A 点与圆心 O 的连线 $\overline{OA}$ 延长到它的对称点 B，即 $\overline{OA} = \overline{OB}$，读出过 B 点的等 r、等 x 线的值分别为 0.5、-0.5，所以 A 点对应的导纳 $y_A = 0.5 - \mathrm{j}0.5$。

将 $\overline{OA}$ 线延长交 $|\Gamma| = 1$ 的圆于 C 点，则

$$|\Gamma_A| = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = 0.447$$

$\overline{OA}$ 与右实轴夹角即反射系数相角 ψ_A，由 $\overline{OA}$ 延长线与反射系数角度圆相交，其交点为 D，读得

$$\psi_A = 63.43°$$

将 A 点沿等 $|\Gamma_A|$ 圆旋转与右实轴交点 E，此点 r 值即 ρ_A，由圆图读出

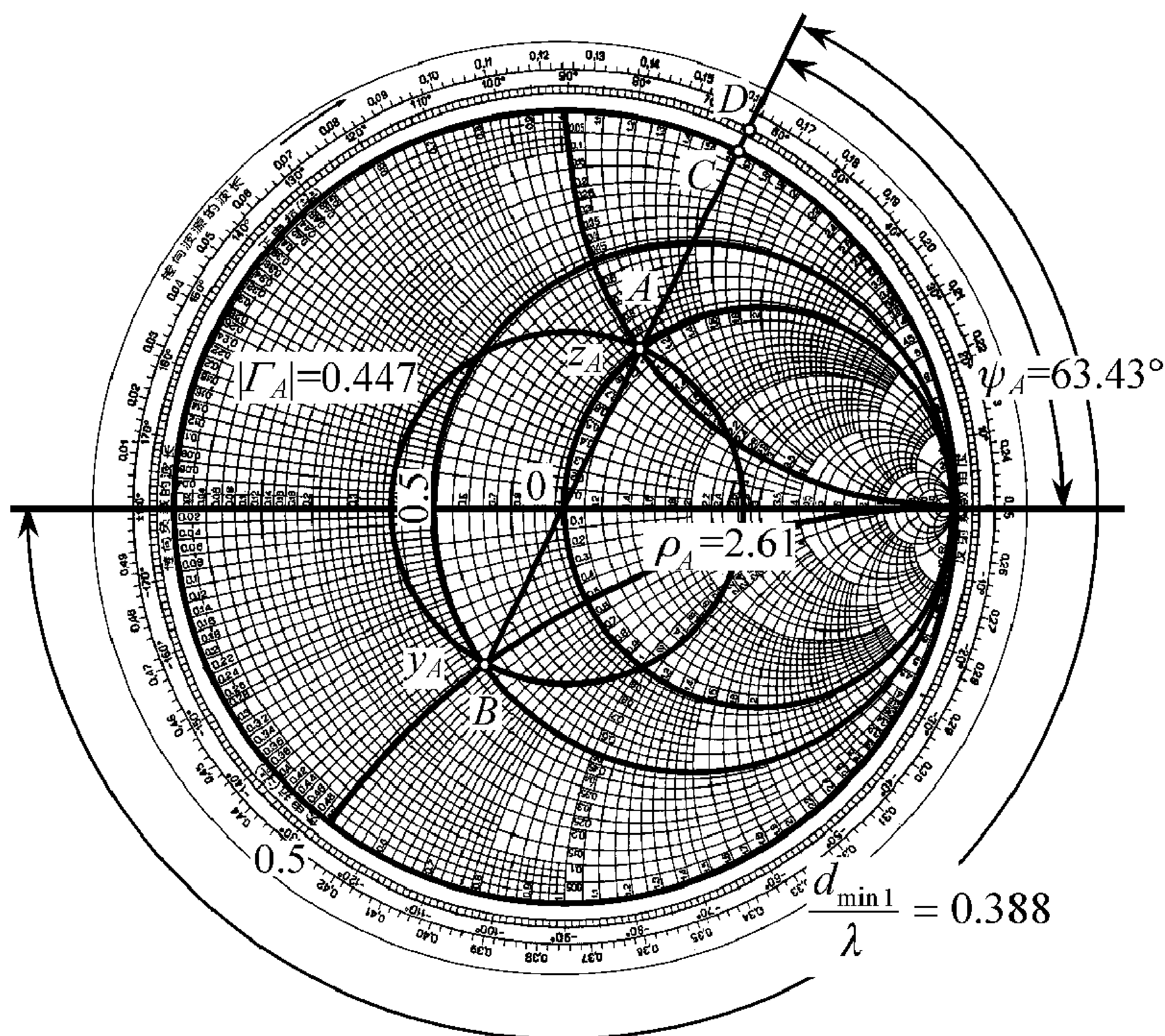


图 2-21 例 2-10 圆图数据

$$\rho_A = r_{\max A} \approx 2.61$$

从 A 点沿 $|\Gamma_A|$ 圆转到圆图实轴左半径的电长度即 $\frac{d_{\min 1A}}{\lambda}$，由圆图读得此值为

$$\frac{d_{\min 1}}{\lambda} = 0.50 - 0.162 = 0.388$$

例 2-11　已知用阻抗表示的负载 $z_A = 1 + \mathrm{j}2$，用反射系数表示的负载 $\Gamma_B = 0.4\mathrm{e}^{\mathrm{j}135°}$，用驻波系数及驻波最小点位置表示的负载 $\left(\rho_c = 3, \frac{d_{\min c}}{\lambda} = 0.1\right)$，在圆图上标出相应的点 A、B、C。

解： 见图 2-22，$r = 1$、$x = 2$ 等值线交点 A 即对应 z_A 的点。圆图半径长度乘 $|\Gamma_B|$ 就是等 $|\Gamma_B|$ 圆的半径，反射系数角度圆 $\psi = 135°$的点为 D，射线 $\overline{OD}$ 与等 $|\Gamma_B|$ 圆交点即 B。

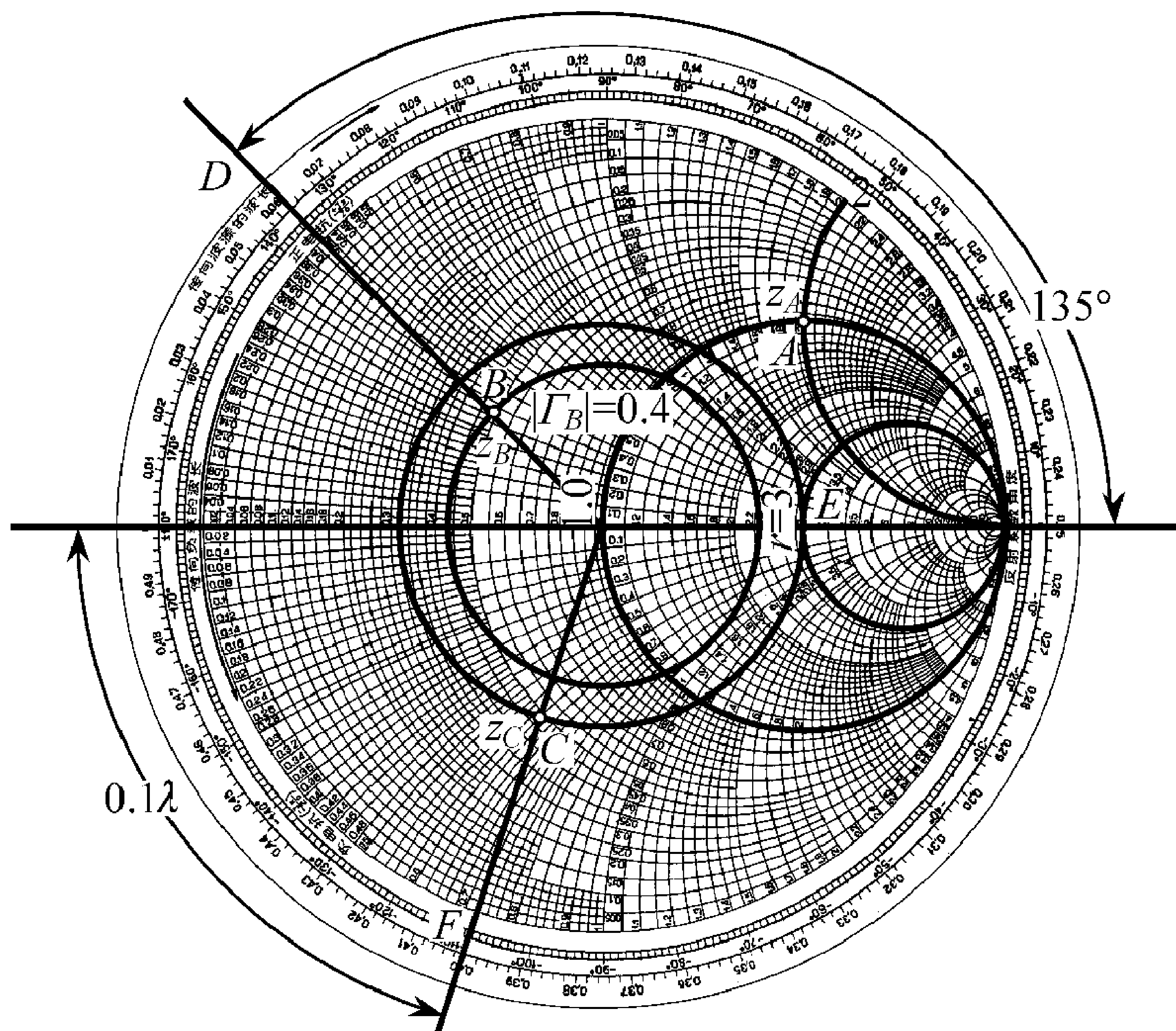


图 2-22　例 2-11 圆图数据

在圆图实轴右半径上读出 $r = \rho = 3$ 的点 E，以 $\overline{OE}$ 为半径画一圆，这就是等 ρ_c 圆。由实轴左端点（短路点）向负载方向旋转 0.1λ 到 F 点，射线 $\overline{OF}$ 与等 ρ_c 圆交点即 C。

2. 阻抗或导纳沿传输线的变换，可方便地用圆图求得。如果传输线无损耗，反射系数的模 $|\Gamma|$ 沿传输线是不变的，所以对于无损耗线，阻抗或导纳沿

传输线的变换在圆图上就表现为沿等 $|\Gamma|$ 圆旋转。旋转的角度决定于传输线的电长度 l/λ。

例 2－12　传输线特征阻抗为50 Ω，负载阻抗 $Z_L=(100+j100)\Omega$，求距负载 $l=0.15\lambda$ 处的输入导纳 Y_{in}［见图 2－23（a）］。

解： 归一化负载阻抗

$$z_L=\frac{Z_L}{Z_c}=\frac{100+j100}{50}=2+j2$$

在圆图［图 2－23（b）］上找出 $z_L=2+j2$ 的对应点，然后沿等 $|\Gamma_L|$ 圆顺时针

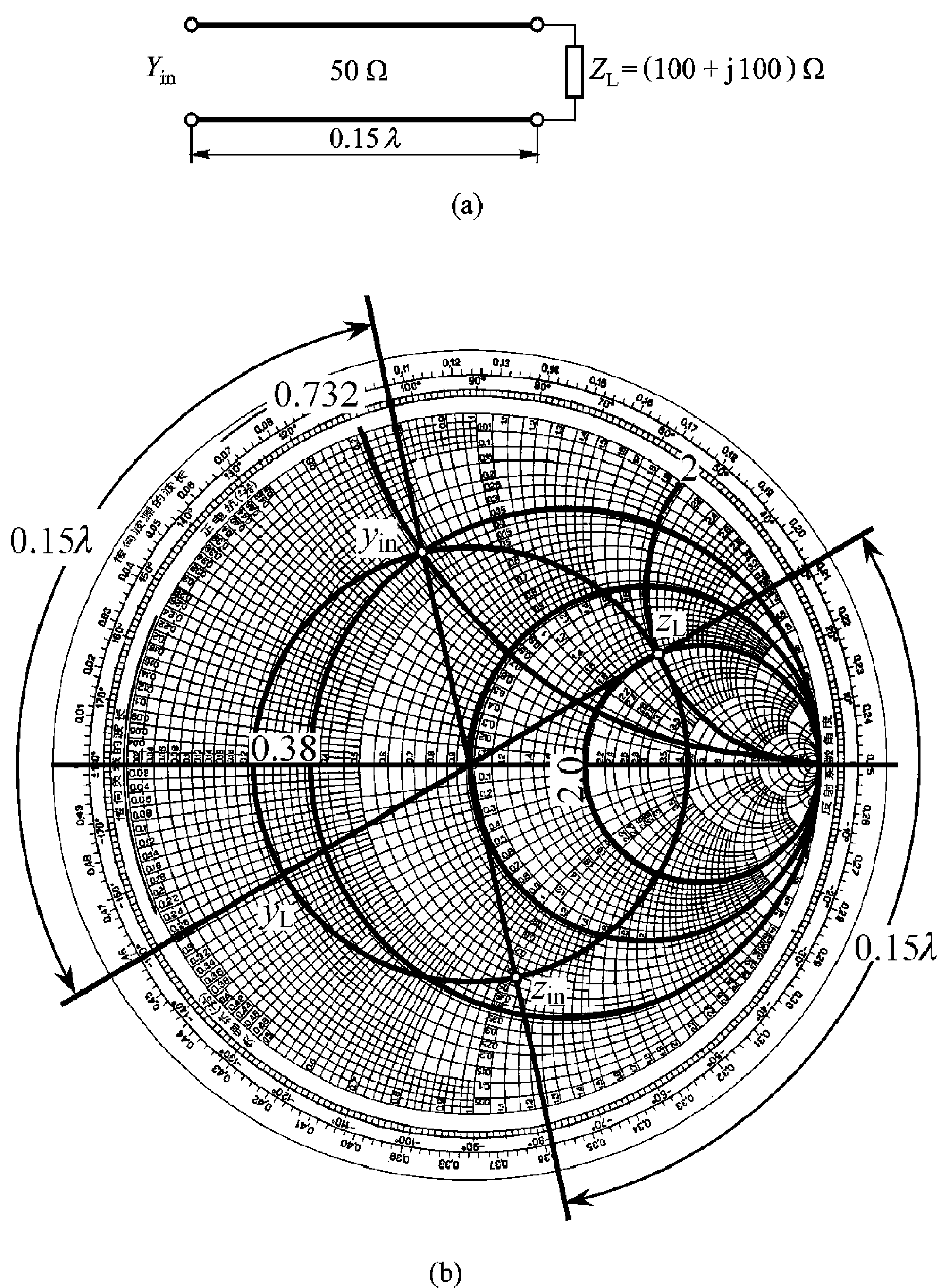


图 2－23　例 2－12 圆图数据

（a）传输线　（b）圆图

旋转 0.15λ 到 z_{in}点，过该点等 r、等 x 线分别为 0.55、－1.09，所以 $z_{in}=0.55-j1.09$。再从 z_{in}点旋转 180°到 y_{in}点，过该点等值线分别为 0.38、0.732，所以归一化导纳 $y_{in}=0.38+j0.732$，而 $Y_{in}=y_{in}\dfrac{1}{Z_c}=0.007\,6+j0.014\,5$。

此问题求解也可从圆图上 z_L 点旋转 180°到 y_L 点，然后由 y_L 点沿等 $|\Gamma_L|$ 圆顺时针旋转 0.15λ 到 y_{in}点。两种解法结果是一样的。

如果由输入阻抗求负载阻抗，要注意沿等 $|\Gamma_L|$ 圆旋转时，要向负载方向旋转，即逆时针方向旋转。

3. 用圆图进行更复杂一些问题的计算。

例 2－13　由输入端测得，终端短路时输入阻抗 $Z_{in}^{sc}=j106\ \Omega$，终端开路时输入阻抗 $Z_{in}^{oc}=-j23.6\ \Omega$，终端接上负载时输入阻抗 $Z_{in}=(25-j70)\ \Omega$，求负载阻抗 Z_L。

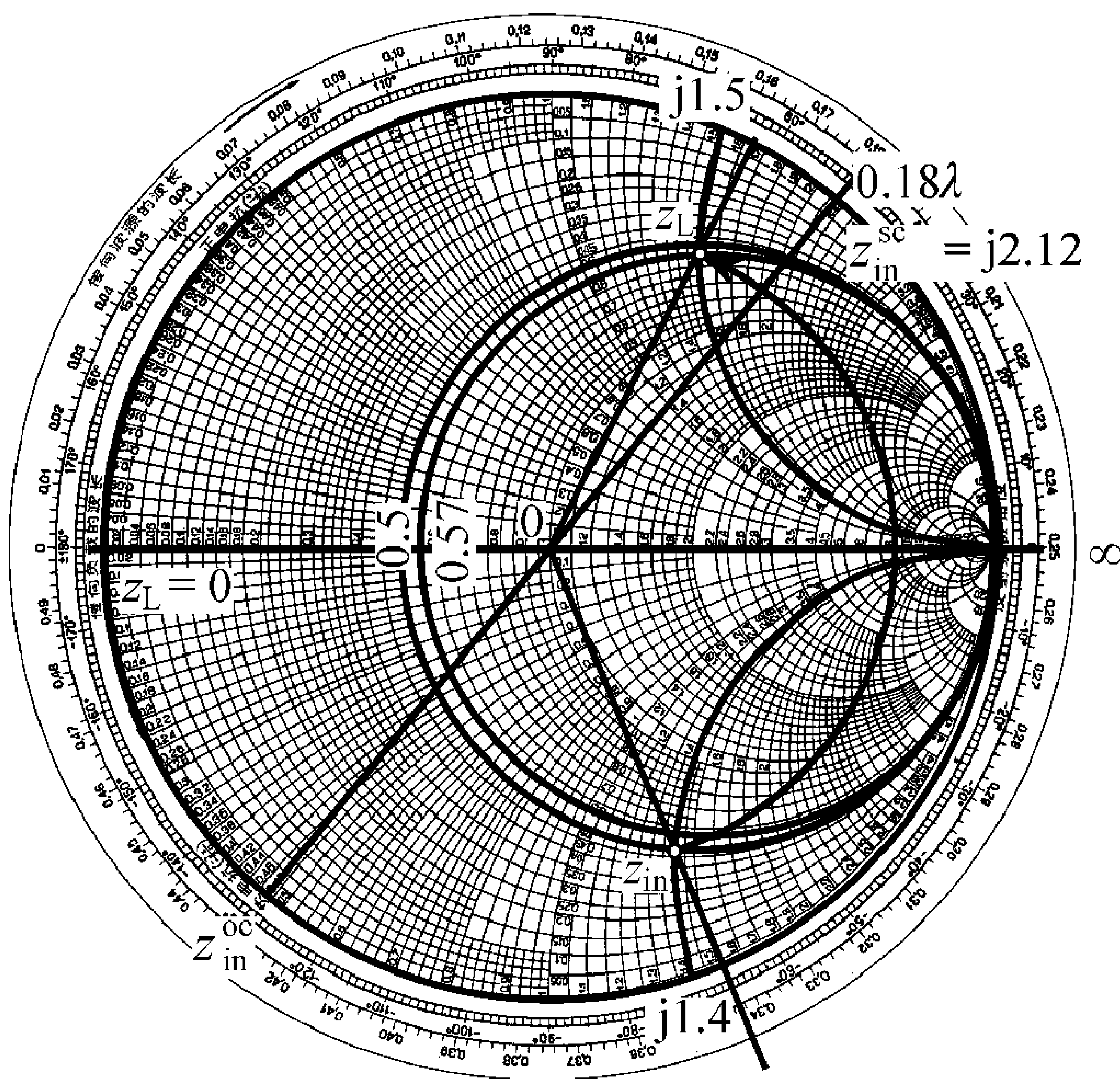


图 2－24　例 2－13 圆图数据

解：因为

$$Z_{in}^{sc}=jZ_c\tan kl,\quad Z_{in}^{oc}=-jZ_c\cot kl$$

所以

$$Z_c=\sqrt{Z_{in}^{sc}Z_{in}^{oc}}=\sqrt{j102(-j23.6)}=50\ \Omega$$

终端短路，$Z_L=0$，在圆图左端点。终端短路归一化输入阻抗

$$z_{in}^{sc} = Z_{in}^{sc}/Z_c = j2.12$$

由此读得传输线长度为 0.18λ。从归一化输入阻抗 $z_{in} = Z_{in}/Z_c = 0.5 - j1.4$ 点沿等 $|\Gamma_{in}|$ 圆逆时转过 0.18λ 即得归一化负载阻抗 z_L 点，由圆图读得该点 $z_L = 0.57 + j1.5$，所以实际负载阻抗为

$$50\times(0.57 + j1.5)\ \Omega = (28.5 + j75)\ \Omega$$

例 2-14　用圆图求解例2-5。

解： 将负载阻抗对传输线特征阻抗归一化，即

$$z_{L1} = \frac{Z_{L1}}{Z_{c1}} = 1 + j,\quad z_{L2} = \frac{Z_{L2}}{Z_{c2}} = 1 - j$$

在圆图（见图 2-25）上找到相应的 z_{L1} 和 z_{L2} 点，相应的反射系数为

$$\Gamma_1 = 0.447e^{j63.4°} = 0.2 + j0.4$$

$$\Gamma_2 = 0.447e^{-j63.4°} = 0.2 - j0.4$$

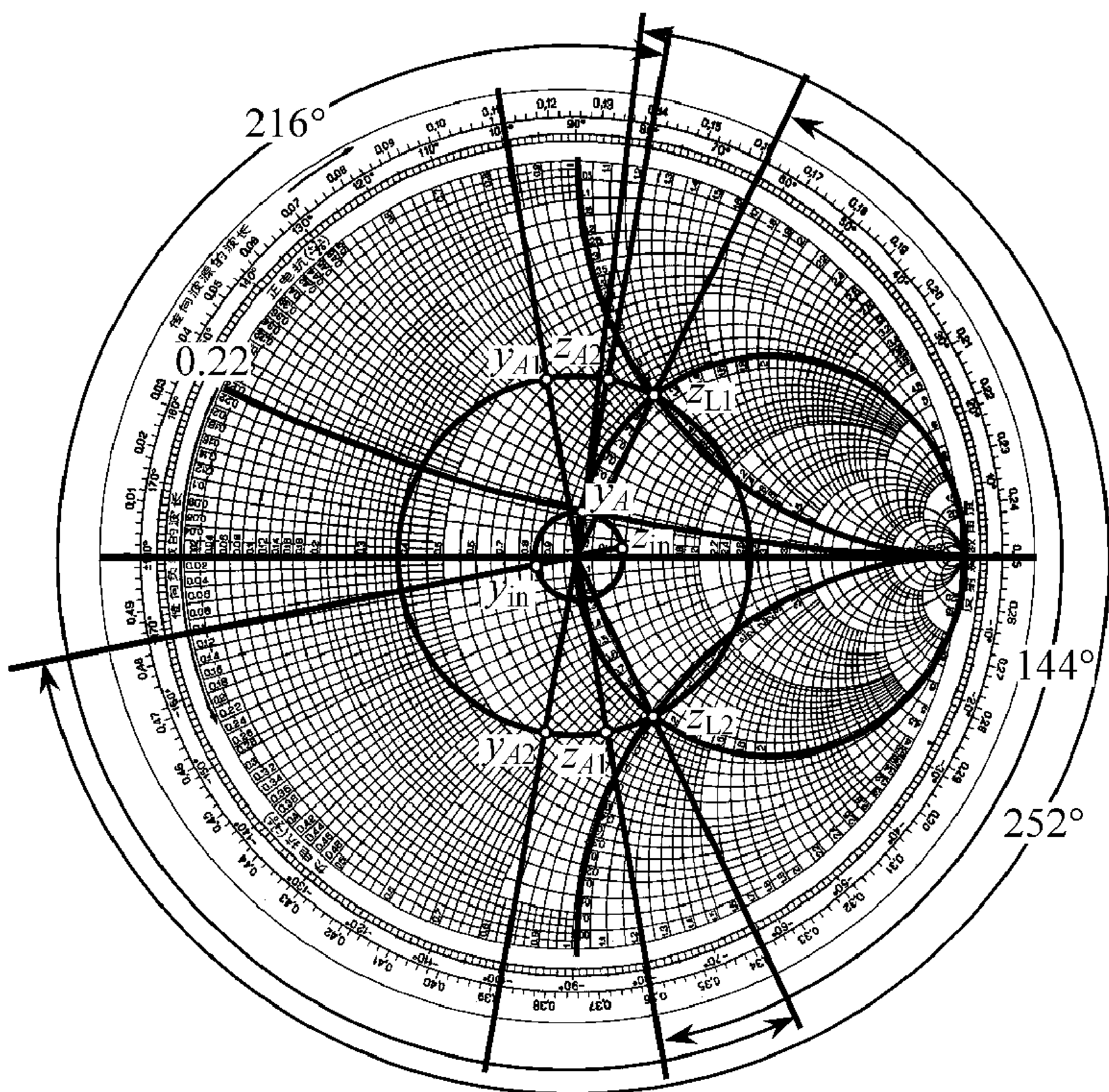


图 2-25　例 2-14 圆图数据

在圆图上从 z_{L1} 点沿顺时针方向旋转 $2kl_1 = 2\times\frac{2\pi}{10}\times 2 = 0.8\pi = 144°$，就得到将 z_{L1} 变换到接入点 AA 面的输入阻抗 $z_{A1} = 0.76 - j0.84$。同样从 z_{L2} 点沿顺时针

方向旋转 $2kl_2 = 2\times\frac{3.5\pi}{10}\times 3 = 1.2\pi = 216°$，就得到 z_{L2}变换到接入点 AA 面的输入阻抗 $z_{A2} = 0.76 + j0.84$。

从 z_{A1}旋转 180°，得到与 z_{A1}对应的归一化导纳 $y_{A1} = 0.594 + j0.655$，同样从 z_{A2}旋转 180°，得到与 z_{A2}对应的归一化导纳 $y_{A2} = 0.594 - j0.655$。在 AA 截面两导纳并联，但这里不能将两个归一化导纳直接相加，因为两传输线特征阻抗不同。必须把两个归一化导纳分别变换为(绝对)输入导纳 $Y_{A1} = y_{A1}/Z_{c1} = 0.011\,88 + j0.013\,1$，$Y_{A2} = y_{A2}/Z_{c2} = 0.007\,92 - j0.008\,74$，现在可计算 AA 面上合成导纳 $Y_A = Y_{A1} + Y_{A2} = 0.019\,8 + j0.004\,36$，而 AA 面上合成归一化导纳为 $y_A = Y_A Z_{c1} = 0.99 + j0.22$。在导纳圆图上找到和 $y_A = 0.99 + j0.22$ 对应的点 A，沿顺时针方向转 $2kl_3 = 2\times\frac{2\pi}{10}\times 3.5 = 1.4\pi = 252°$，得到始端归一化输入导纳 y_{in}，从 y_{in}再旋转 180°就得到始端归一化输入导纳 Z_{in}，通过该点等值线得出

$$z_{in} = 1.23 + j0.068$$

所以传输线始端的输入阻抗

$$Z_{in} = z_{in}Z_{c1} = (61.5 + j3.4)\Omega$$

2.6　阻抗匹配及阻抗匹配器

根据 2.3 节分析，传输线与负载匹配，传输线处于行波状态，传输的功率大、效率高。例 2-9 指出作为负载的电视机 A 由于与传输线不匹配，50%的信号功率被反射回去。所以传输线与负载的匹配对于信号的有效传输与利用十分重要。

信号从源到负载一般要经过一段传输线，见图 2-26 (a)。图中 E_g 为信号源，Z_g 为信号源内阻，Z_L 为负载阻抗，Z_c 为传输线特征阻抗。如果 $Z_L \neq Z_c$，则 $\Gamma_L = (Z_L - Z_c)/(Z_L + Z_c) \neq 0$，在负载端产生反射波；此反射波传至电源端，如果 $Z_g \neq Z_c$，则 $\Gamma_g = (Z_g - Z_c)/(Z_g + Z_c) \neq 0$，电源端也产生反射波，进而在传输系统中不断产生反射。所以传输线的阻抗匹配实际包括两个方面：信号源与传输线的匹配，以及负载与传输线的匹配。为解决信号源与传输线的匹配，信号源经过隔离器或环形器再与传输线连接。隔离器和环形器能吸收负载产生的反射波，消除或者减弱负载不匹配对信号源的影响。本节后面的讨论中假定源与传输线匹配，只讨论负载与传输线的匹配问题。其方法是在负载与传输线之间加入一匹配装置，如图 2-26 (b)。对匹配装置的基本要求是引入的附加损耗尽量小、频带宽、能适应各种负载(可调节)。匹配的基本思路是负载不匹配引起的反射刚好被匹配器引入的反射相抵消，使得从匹配装置左面看

进去的输入阻抗 Z'_L 等于传输线特征阻抗，从而使传输线处于行波状态[见图 2-26(c)]。

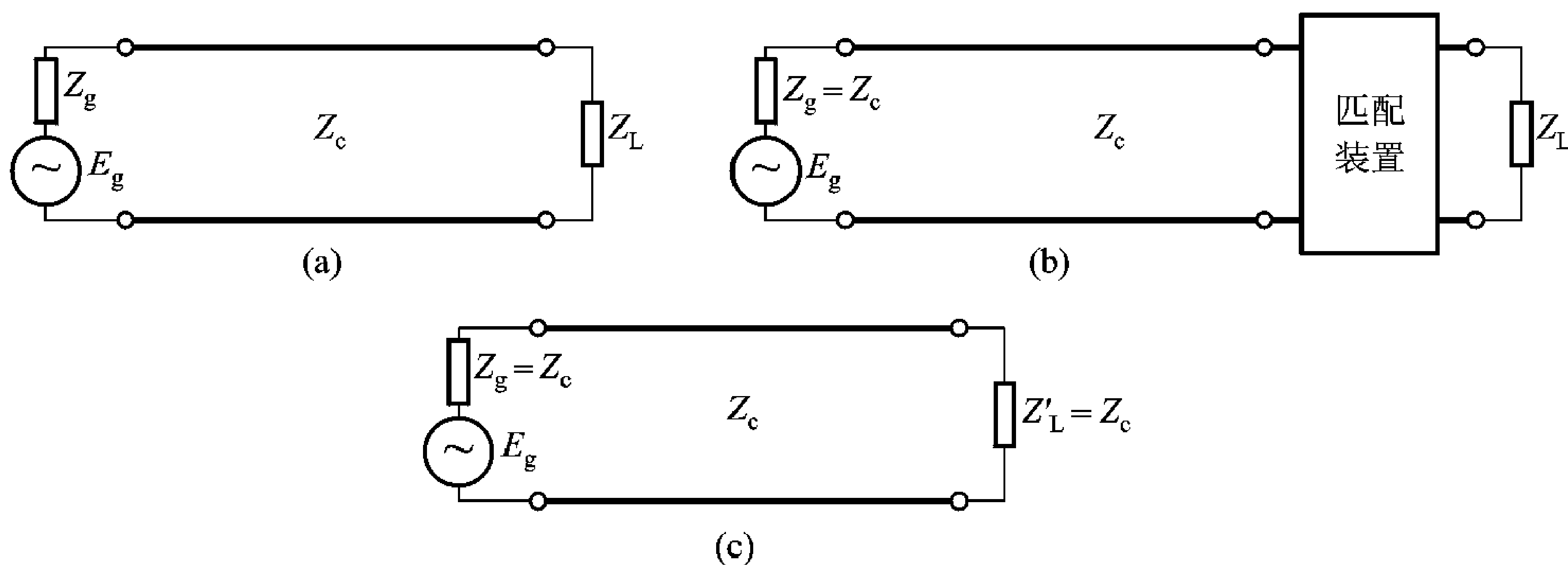


图 2-26 负载的阻抗匹配

(a) 传输线直接与负载连接 (b) 传输线通过匹配装置与负载连接 (c) 传输线与负载匹配

2.6.1 λ/4 变换器

前已指出，如果负载阻抗是纯电阻，可用 λ/4 阻抗变换器进行阻抗匹配。λ/4 变换器是接在传输线与纯电阻负载之间的一段长度为 λ/4 的传输线(见图 2-27)，其特征阻抗 Z_{c1} 等于负载电阻 R_L 与传输线特征阻抗 Z_c 乘积的平方根，即

$$Z_{c1}=\sqrt{R_L Z_c} \qquad (2.6.1)$$

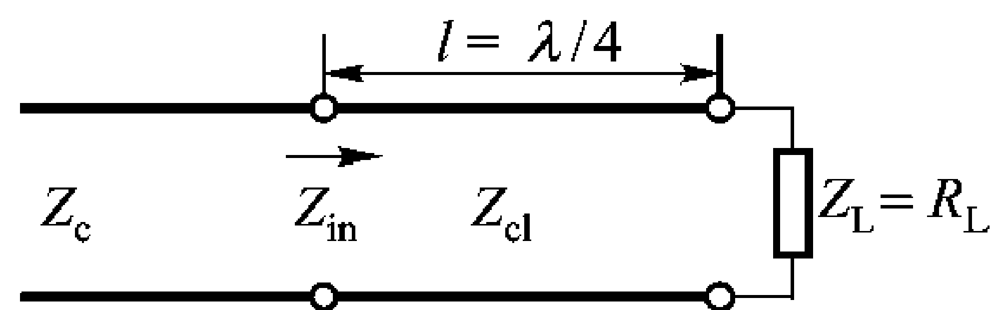


图 2-27 λ/4 变换器

经过 λ/4 变换器变换，从变换器左面看进去的输入阻抗 $Z_{in}=Z_c$，从而实现阻抗匹配。

如果负载不是纯电阻，仍要采用 λ/4 变换器进行匹配，需将 λ/4 变换器接在离负载有一段距离的电压波节或电压波腹处，因为在电压波腹或电压波节处输入阻抗为纯电阻。

λ/4 同轴线阻抗变换器、λ/4 微带阻抗变换器见图 2-28。

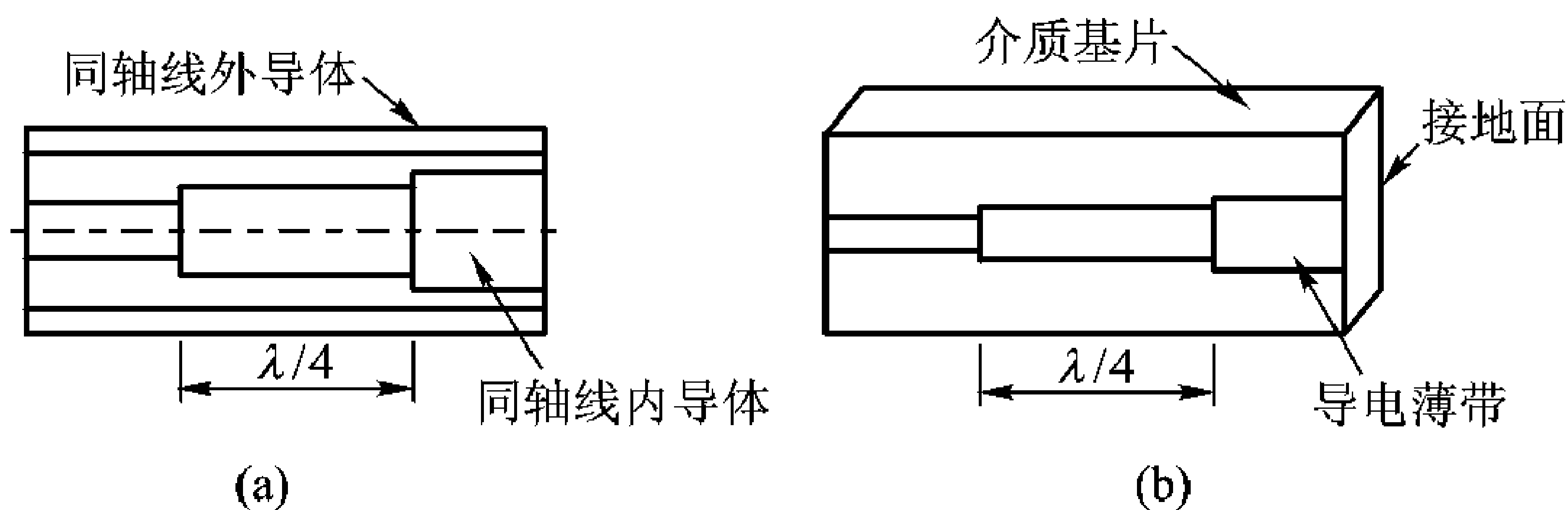


图 2-28 λ/4 阻抗变换器

(a) λ/4 同轴线阻抗变换器 (b) λ/4 微带阻抗变换器

例 2-15　微带线特征阻抗 $Z_c=50\ \Omega$，终端负载 $Z_L=150\ \Omega$，要利用 $\lambda/4$ 阻抗变换器实现阻抗匹配，问应当怎样设计微带线及 $\lambda/4$ 阻抗变换器段的 w/h?w 为微带线宽度，h 为介质基片厚度，设介质基片相对介电常数为 $\varepsilon_r=10.2$，基片厚度 $h=1.27$ mm。

解：当 $\varepsilon_r=10.2$，$h=1.27$ mm，根据例 2-4，对于 50 Ω 微带线，基片上导带宽度 $w=1.192$ mm。

$\lambda/4$ 阻抗变换器段，特征阻抗

$$Z_{e1}=\sqrt{Z_L Z_e}=\sqrt{150\times 50}=86.6\ \Omega\text{，按式(2.1.44)有}$$

$$A=\frac{Z_{e1}}{60}\left(\frac{\varepsilon_r+1}{2}\right)^{1/2}+\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1}\left(0.23+\frac{0.11}{\varepsilon_r}\right)$$

将 ε_r，Z_{e1}代入，得到

$$A=3.612>1.52$$

利用式(2.1.43a)，得到

$$\frac{w}{h}=\frac{8\exp(A)}{\exp(2A)-2}=\frac{8\exp(3.612)}{\exp(2\times 3.612)-2}=0.216$$

所以

$$w=0.216\times 1.27=0.274\ \text{mm}$$

2.6.2　并联支路可变电纳匹配器

在主传输线上并联一个或数个短路面位置可调的支路传输线，对于主传输线每一支路相当于一个并联可变电纳，故这种匹配器叫做并联支路可变电纳匹配器。图 2-29 (a)为可移动单可变电纳匹配器，其特点是并联短路传输线与主传输线连接点位置可动。如果连接点流过电流大，对连接点电接触性能要求就很高。图 2-30 (a)为双可变电纳匹配器，有两个并联短路传输线与主传输线相连，但连接点位置固定不变，两支路传输线间距一般为 $\lambda/4$ 或 $\lambda/8$。由于并联短路传输线与主传输线连接点位置固定不变，连接点结构比较容易设计，使之通过较大的电流。其缺点是在圆图上存在所谓阻抗不能匹配的“盲区”，在该区域内不能实现阻抗的完全匹配。这一问题，在三可变电纳匹配器[见图 2-31(a)]中可得到解决。这里有 3 个并联短路传输线与主传输线连接，连接点位置固定不变。三可变电纳匹配器可实现任何负载(或导纳)与传输线的匹配。经过并联支路可变电纳匹配器的变换，从主传输线与匹配器连接点左面，即从源向负载端看进去的归一化输入导纳 y_L (或归一化输入阻抗 z_L)，在圆图上位于 $g=1$、$b=0$ (或 $r=1, x=0$)的匹配点。

单可变电纳匹配器实现匹配的过程见图 2-29 (b)，$y_L=g_L+\mathrm{j}b_L$ 为归一化负载导纳点。并联支路传输线离开负载沿主传输线移动，从主传输线与支路传

输线连接点右边向负载看进去的输入导纳 y'_{in}可从 y_L 点沿等$|\Gamma_L|$圆旋转得到。连接点与负载之间电长度 l/λ 刚好使 y'_{in}落在 $g=1$ 的等 g 圆上，即 $y'_{in}=1+jb'_{in}$，就是图 2-29 (b)中的 A 点或 B 点。然后调节并联支路传输线短路面位置，使并联支路引入的归一化电纳为 $-jb'_{in}$。这样从连接点左边看进去的归一化输入导纳 $y_{in}=1$，从而实现负载与传输线的匹配。

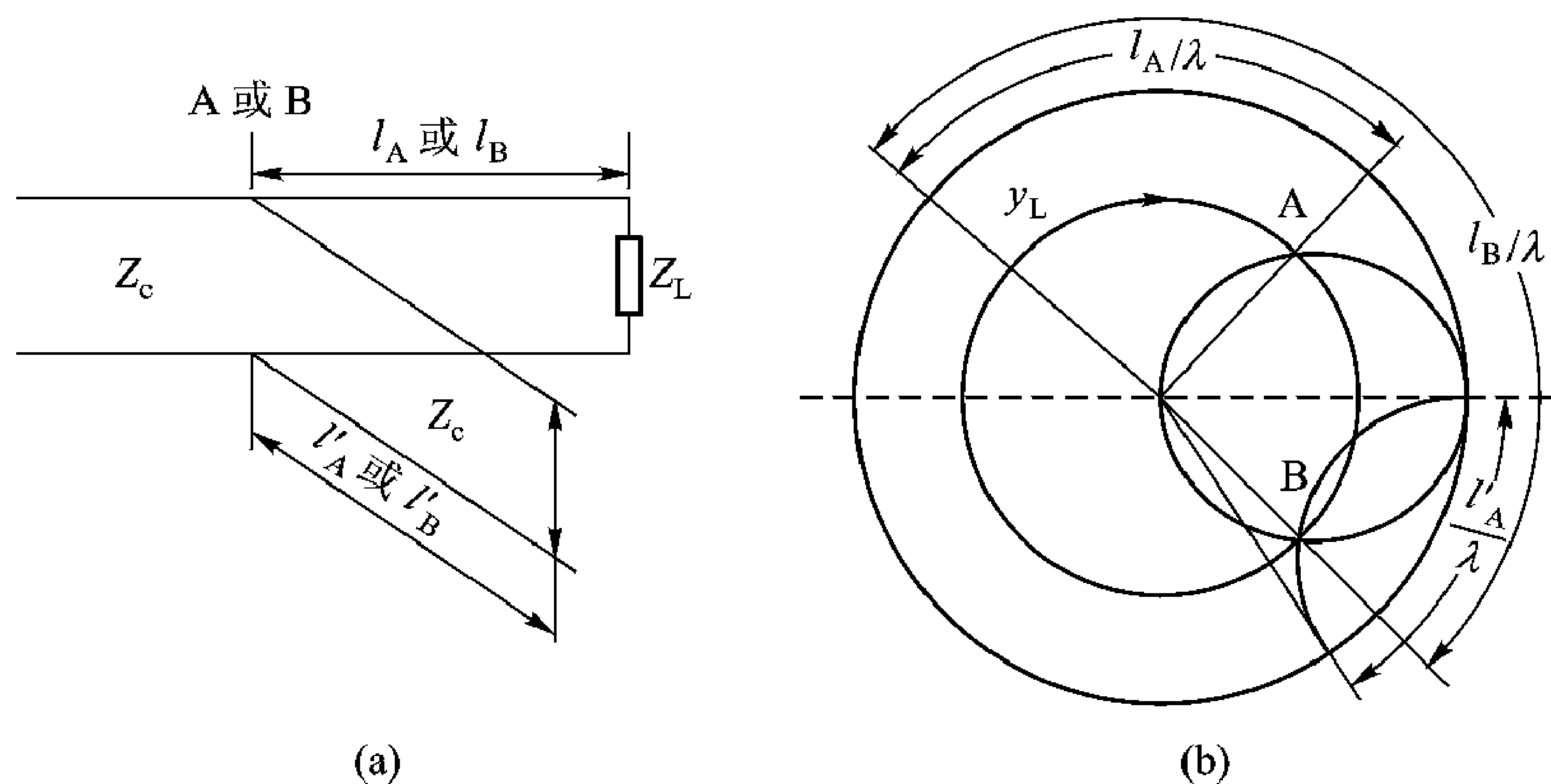


图 2-29 可移动单可变电纳匹配器

(a) 结构 (b) 工作原理

对于双可变电纳匹配器其匹配过程见图 2-30 (b)。负载导纳 $y_L=g_L+jb_L$ 经过主传输线变换到与第一个并联支路传输线连接点的输入导纳为 $y'_{in}=y_A=g_A+jb_A$，即图 2-30 (b)中的 y_A 点。调节第一个并联支路传输线短路面位置，

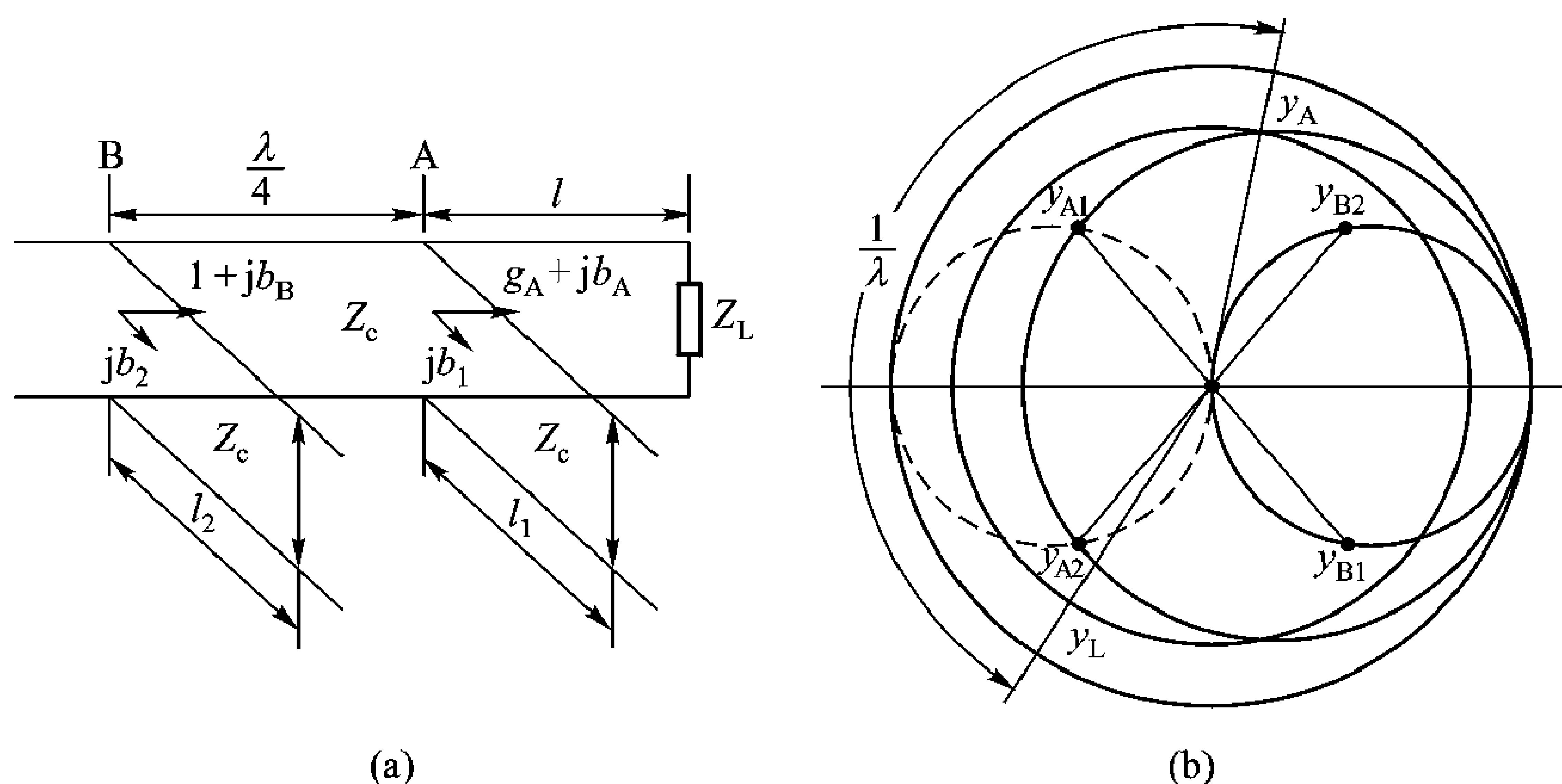


图 2-30 双可变电纳匹配器

(a) 结构 (b) 工作原理

由第一个并联支路引入的电纳 jb_1 使得 $y''_{in}=y_A+jb_1=g_A+j(b_A+b_1)$刚好与虚线圆相交，交点为图中的 y_{A1}或 y_{A2}点。虚线圆与 $g=1$ 的圆以圆图中心对称。因为第二个并联支线与第一个并联支线间隔为 $\lambda/4$。经过 $\lambda/4$ 主传输线变换，y''_{in}变换到 $g=1$ 的等 g 圆上。即图中的 y_{B1}或 y_{B2}。最后通过第二个并联支线引入的电纳使从第二个并联支线连接点左边看进去的输入导纳 $y_{in}=1$，达到匹配。对于两并联支线间距为 $\lambda/4$ 的双可变电纳匹配器，如果 y'_{in}在 $g=1$ 的圆内，则不可能实现负载与传输线匹配，即存在所谓不匹配的“盲区”。在三可变电纳匹配器中(见图 2-31)，如果对于第一、二个并联支线组成的双可变电纳匹配器，负载位于不匹配的“盲区”，那么对于第二、三个并联支线组成的双可变电纳匹配器，要匹配的负载就一定出“盲区”，因为经过第一、二个并联支线间$\lambda/4$传输线的变换沿等$|\Gamma_L|$线转过 180°，一定不在 $g=1$ 的圆内。

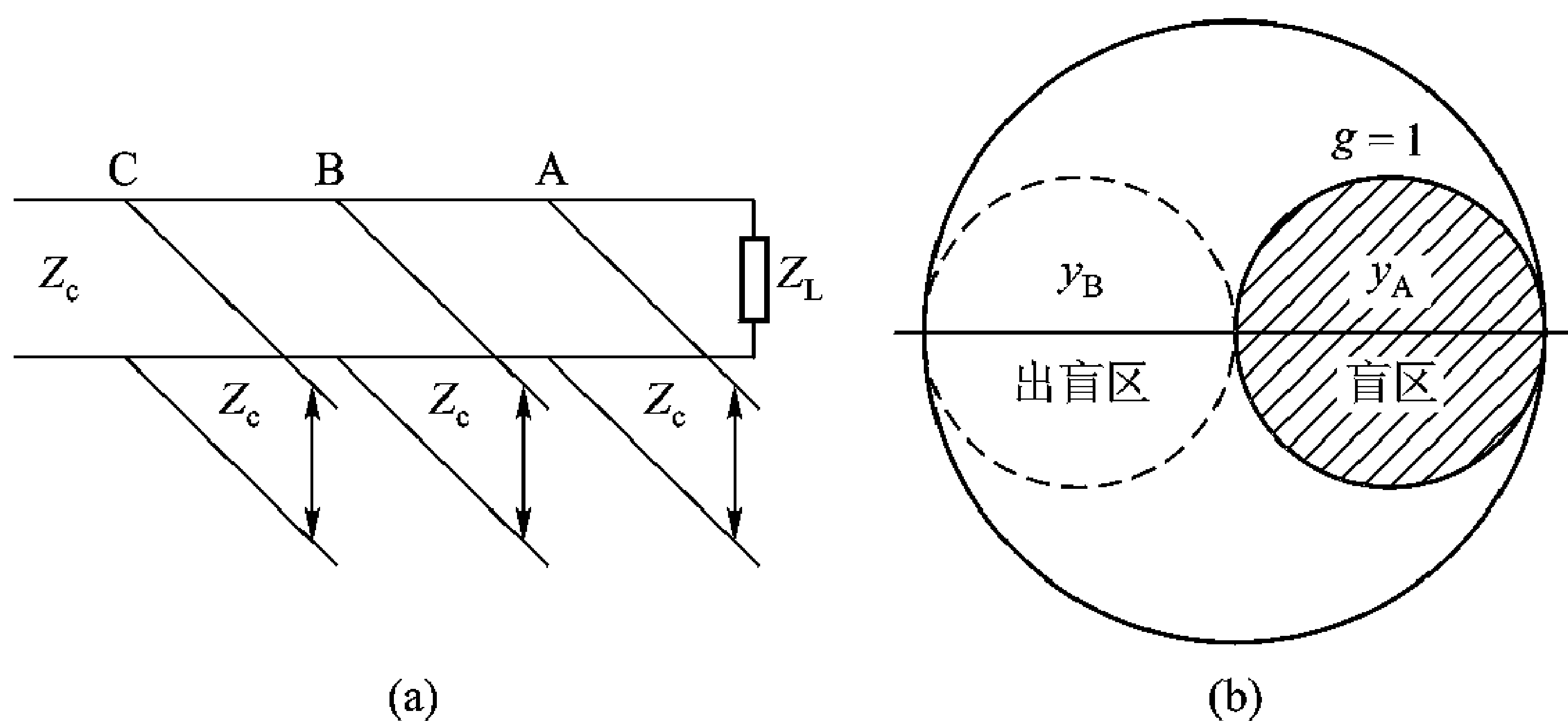


图 2-31 三可变电纳匹配器

(a) 结构 (b) 工作原理

同轴线结构的并联支路双可变电纳匹配器结构见图 2-32。

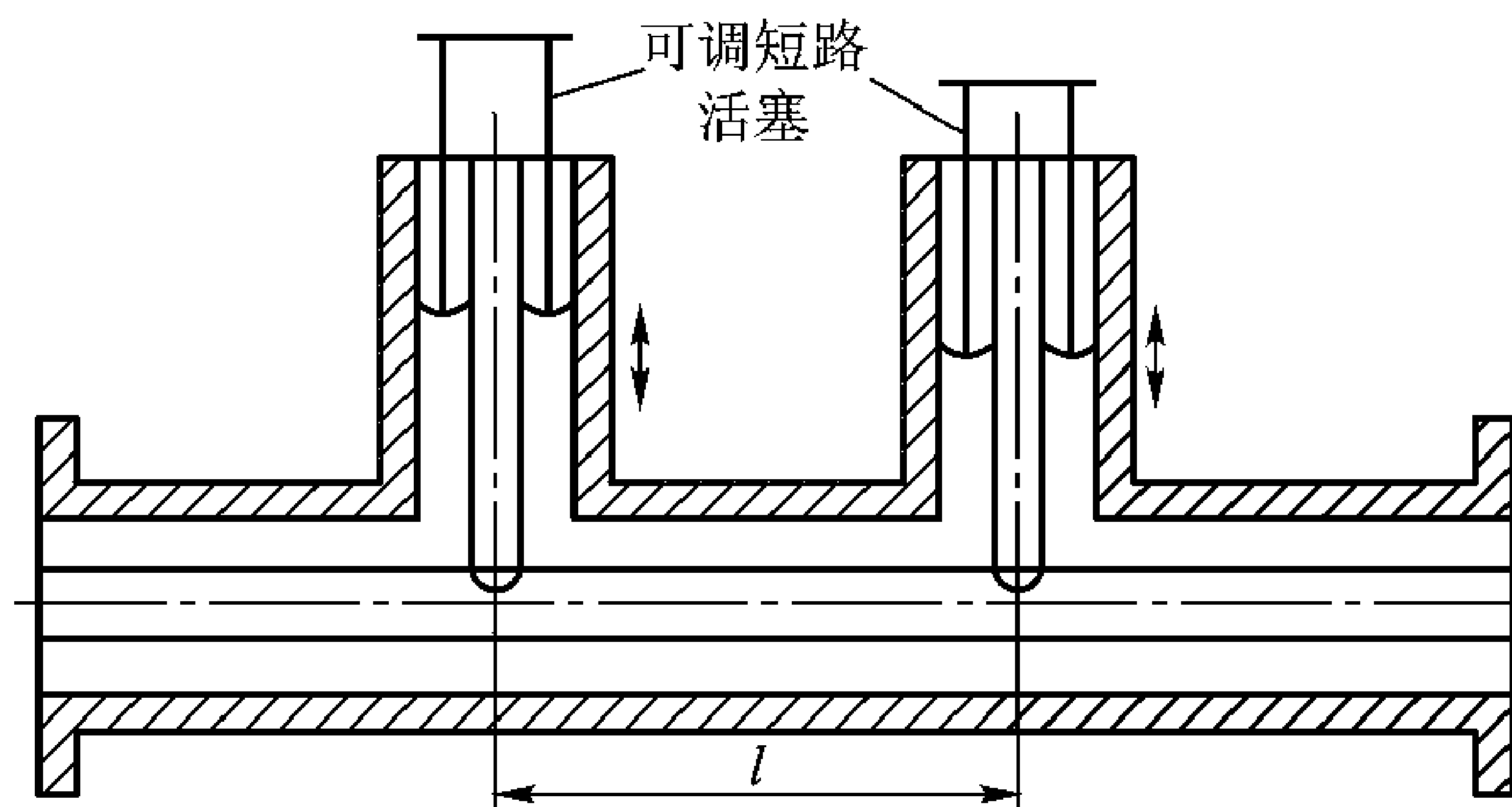


图 2-32 同轴线结构双可变电纳匹配器

例 2-16 图2-33(a)给出用单可变电纳匹配器实现馈线与线天线阵的阻

抗匹配的原理图，该天线阵由 10 个辐射单元组成。已知馈线特征阻抗为 75 Ω，

(a)

(b)

图 2－33　用单可变电纳匹配器实现馈线与线天线阵的阻抗匹配

(a) 线天线阵　(b) 例 2－17 圆图数据

测得AA面负载总阻抗 $Z_A=(150+j150)\Omega$。现欲用单可变电纳匹配器进行匹配，求单可变电纳匹配器离开AA面距离 l_1 以及并联短路传输线(特征阻抗 $Z_{c2}=75\ \Omega$)长度 l_2。

解：负载归一化阻抗为 $z_A=\dfrac{Z_A}{Z_{c1}}=2+j2$，在圆图[见图2-33(b)]上找到与 z_A 对应的点，从 z_A 旋转180°得到与 z_A 对应的归一化负载导纳 $y_A=0.25-j0.25$。由 y_A 顺时针沿等 $|\Gamma_A|$ 旋转到 $g=1$ 的圆上，其交点为 B 和 C，其旋转的电长度分别为 $l_B=0.219\lambda$，$l_C=0.363\lambda$，l_B 和 l_C 就是并联支路传输线接入主传输线离开AA面距离。交点 B 和 C 对应的归一化电纳 y_B 和 y_C 分别为 $j1.57$，$-j1.57$。从导纳圆图短路点(圆图实轴右端点)沿 $|\Gamma_A|=1$ 的圆顺时针旋转到 $b=-y_B$、$-y_C$，其电长度就是并联短路传输线的长度，分别为 $l_{B2}=0.091\lambda$，$l_{C2}=0.409\lambda$。

例2-17　参看图2-34(a)，$Z_L=(30-j40)\Omega$ 的负载连接到特征阻抗 $Z_c=50\ \Omega$ 的传输线。用双可变电纳匹配器进行匹配，两并联短路支线间距为 $\lambda/8$，第一个并联短路支线 S_1 离开负载 Z_L 距离为 0.3λ，求实现匹配时并联短路支线 S_1、S_2 最短的长度 l_1 与 l_2。

解：归一化导纳为

$$y_L=\frac{Z_c}{Z_L}=\frac{50}{30-j40}=0.6+j0.8$$

对应于图2-34(b)所示圆图中 y_L 点，从 y_L 点沿等 $|\Gamma|$ 圆由负载向源移动 0.3λ，得到 y_{in}

$$y_{in}=y_1=0.41-j0.44$$

因为 y_1 与并联短路支线 S_1 引入的导纳 y_{stub_1} 并联，改变 S_1 的长度 l_1，将沿 $g=0.41$ 的等 g 圆旋转。当 $y'_1=y_1+y_{stub_1}=0.41+j0.19$ 时，y'_1 刚好落在虚线圆上，故

$$y_{stub_1}=y_1'-y_1=j0.63$$

y_1' 沿主传输线转过 $\lambda/8$，就到达 $g_1=1$ 的圆上的 y_2，而

$$y_2=1+j0.95$$

y_2 与第二个并联短路支线 S_2 的输入导纳 y_{stub_2} 并联。要使并联后的导纳 y_2'

$$y_2'=y_2+y_{stub_2}=1+j0$$

要求 $y_{stub_2}=-j0.95$。

假定并联短路支线特征阻抗为 $50\ \Omega$，S_1、S_2 的输入导纳 y_{stub_1}、y_{stub_2} 分别为 $j0.63$ 和 $-j0.95$ 时，l_1、l_2 分别为

$$l_1=0.25\lambda+0.09\lambda=0.34\lambda$$

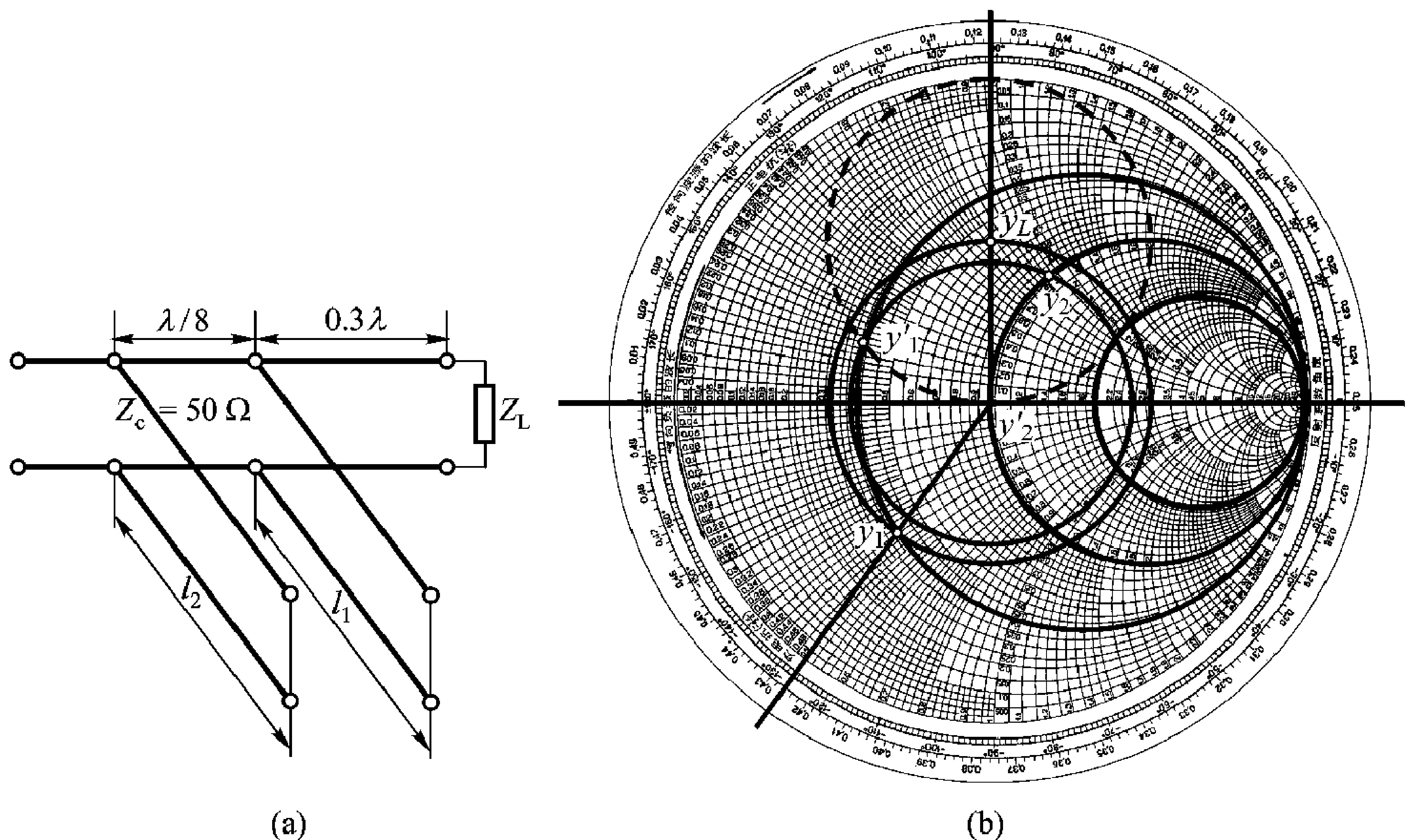


图 2-34 例 2-17 图

(a) 具有两并联支线的传输线 (b) 圆图

$$l_2 = 0.25\lambda - 0.12\lambda = 0.129\lambda$$

显然，如果 y_1 落在打阴影的 $g=2$ 的圆内，不可能用双可变电纳匹配器实现匹配。

下面通过微带放大器设计过程(见图 2-35)说明圆图在微波电路设计中的应用。放大器所用有源器件是 FSC10 场效应晶体管(FET)，在图 2-35 中用箭头向右的三角形▷表示。设计放大器，增益是一个重要的指标，为得到高的放大器增益，一般要求作为信号输入电路的微带线的特征阻抗与晶体管输入阻抗匹配，而晶体管输出阻抗要与负载阻抗(一般都设定为微带线阻抗)匹配。微带线阻抗一般为 50 Ω，放大器用晶体管输入、输出阻抗与 50 Ω 的微带线阻抗有很大差别，所以放大晶体管的输入端、输出端都要设计相应的匹配电路。图 2-35(a)是微带放大器电路版图，(b)表示在圆图上的阻抗匹配过程，(c)是理论值与实验值比较。图 2-35 (a)中 1 是信号输入端口，2 是输出端口。版图Ⅰ表示 50 Ω 微带线直接与晶体管相连。晶体管的输入阻抗用 f 表示，输入阻抗 f 在圆图[2-35(b)]上的对应点为Ⅰ。版图Ⅱ，由于微带线 a 的接入，使圆图中对应于晶体管输入阻抗点Ⅰ顺时针旋转到 $g=1$ 的圆上，即圆图中的点Ⅱ。版图Ⅲ并联开路微带线 b 的长度，使得由并联微带支线 b 引入的电纳刚好与点Ⅱ对应的电纳抵消，实现输入电路的匹配。圆图中就是点Ⅱ沿 $g=1$ 的圆旋转到圆图匹配点Ⅲ。版图Ⅳ，晶体管的输出直接接到 50 Ω 微带线。版图Ⅴ、Ⅵ表

示输出电路的匹配过程，微带线c、d的作用与输入电路中微带线a、b的作用相当。图2-35(c)是用Puff软件按上述设计过程设计的放大器增益的理论值(实线)与实验值(点线)的比较。根据理论计算最大增益(3.7 GHz时)为13.2分贝(dB)，即信号放大20.9倍。

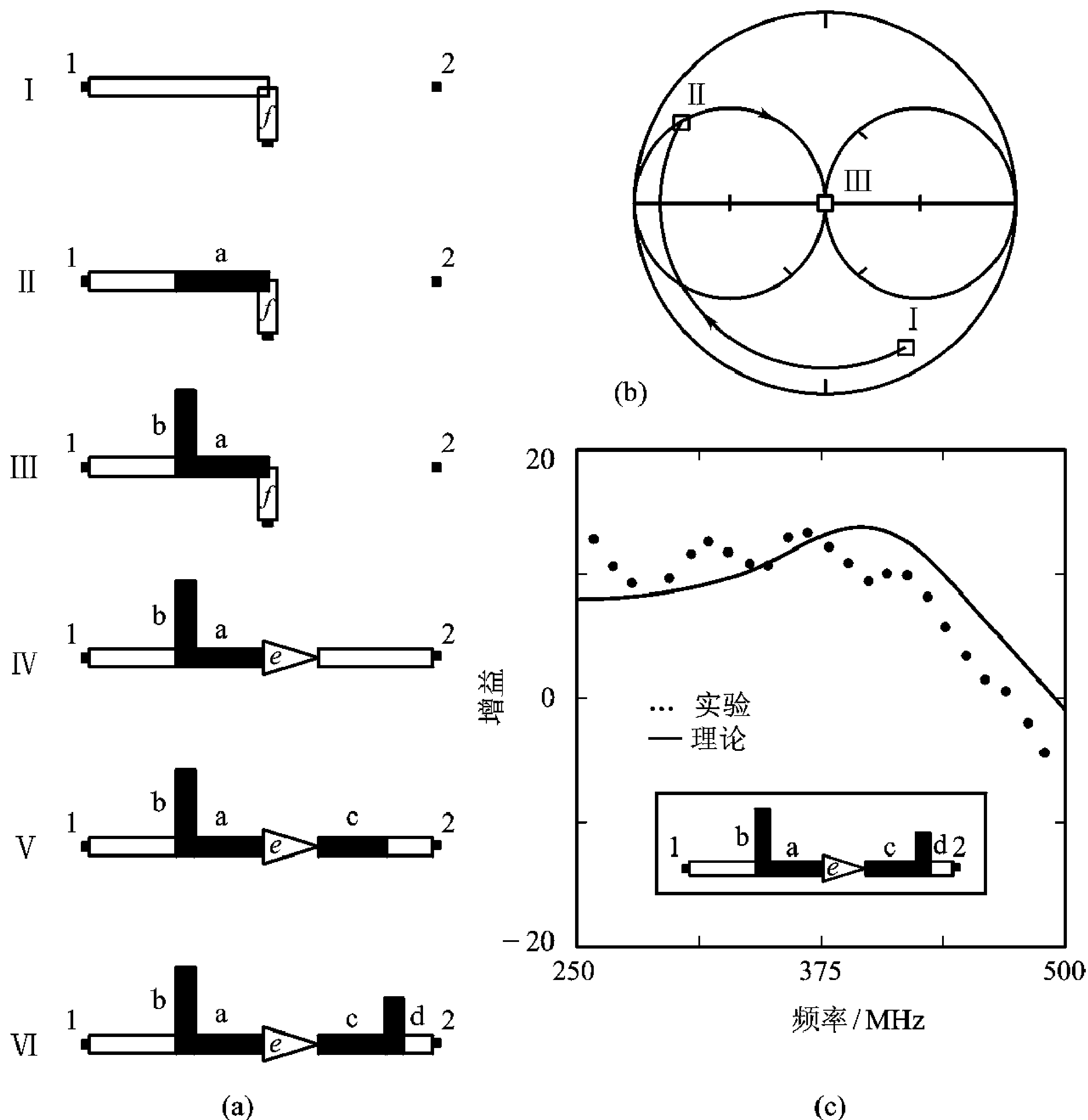


图2-35　微带放大器设计过程及数据
(a) 微带放大器电路版图
(b) 阻抗匹配过程　(c) 理论值与实验值比较

2.7　耦合传输线

2.7.1　奇、偶模分析

两传输线靠得很近而发生耦合时，就构成耦合传输线。平面电路中用得最

多的是耦合微带线。它由两根平行放置、彼此靠得很近的微带线构成。耦合微带线有不对称和对称两种结构。两根微带线的尺寸完全相同的就是对称耦合微带线，尺寸不相同的就是不对称耦合微带线。耦合微带线可用来设计各种定向耦合器、滤波器、平衡与不平衡变换器等。本节只介绍对称耦合微带线。图 2－36（a）就是耦合微带线的结构图，其中 w 为导带宽度，s 为两导带间距离。当两微带线单独存在时，它们传播的都是如图 2－2（c）所示的准 TEM 模，电场只有 E_y 分量。当两微带线靠近发生耦合时，假定两微带线中传播的电磁场基本上保持着原来的模式结构，则耦合微带线中的场将有两种不同的组合。一种组合对于 $x=0$ 对称面是偶对称的，即两微带线中所传输的电场沿 y 轴方向同为正值，如图 2－36（b）。另一种组合对于 $x=0$ 对称面是奇对称的，即两个微带线中所传输的电场沿 y 轴方向一个为正，另一个为负，如图 2－36（c）。对于偶对称模式（简称偶模，以后用下标 e 表示），在 $x=0$ 对称面上，磁场的切向分量为零，电力线平行于对称面，对称面可等效为“磁壁”，相当于开路；对于奇对称模式（简称奇模，以后用下标 o 表示），对称面上电场的切向分量为零，对称面可等效为“电壁”，相当于短路。奇模和偶模的特征阻抗、色散或有效介电系数都是有区别的。

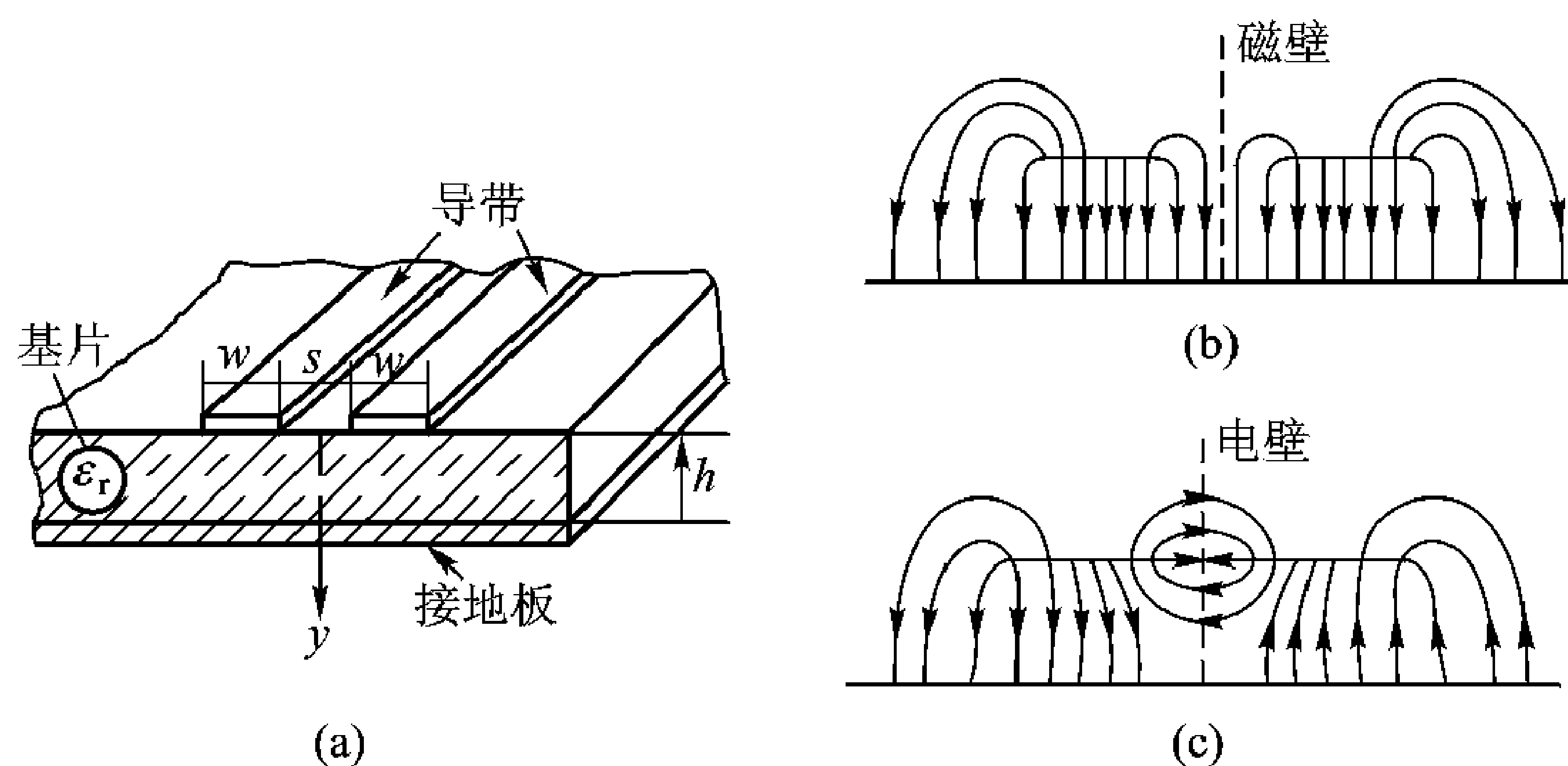


图 2－36 耦合微带线及其场分布

（a）耦合微带线 （b）偶模场分布 （c）奇模场分布

耦合微带线任何一种激励都可分解成奇模与偶模的激励。图 2－37（a）为对称耦合微带线，①、②、③、④分别为耦合微带线的端口。图 2－37（b）表示该对称耦合微带线端口①为 1V 的电压激励，图 2－37（c）表示该耦合线被等幅反相电压激励，它将在两根导带上激起数量相等、符号相反的电荷分布，故是奇对称激励，激励的场是奇模。图 2－37（d）表示该耦合线被等幅同相电压激励，是偶对称激励，激励的场是偶模。显然，图 2－37（c）、（d）所示的奇模激励、偶模激励的组合就是图 2－37（b）。因此对图 2－37（b）激励的耦合微带

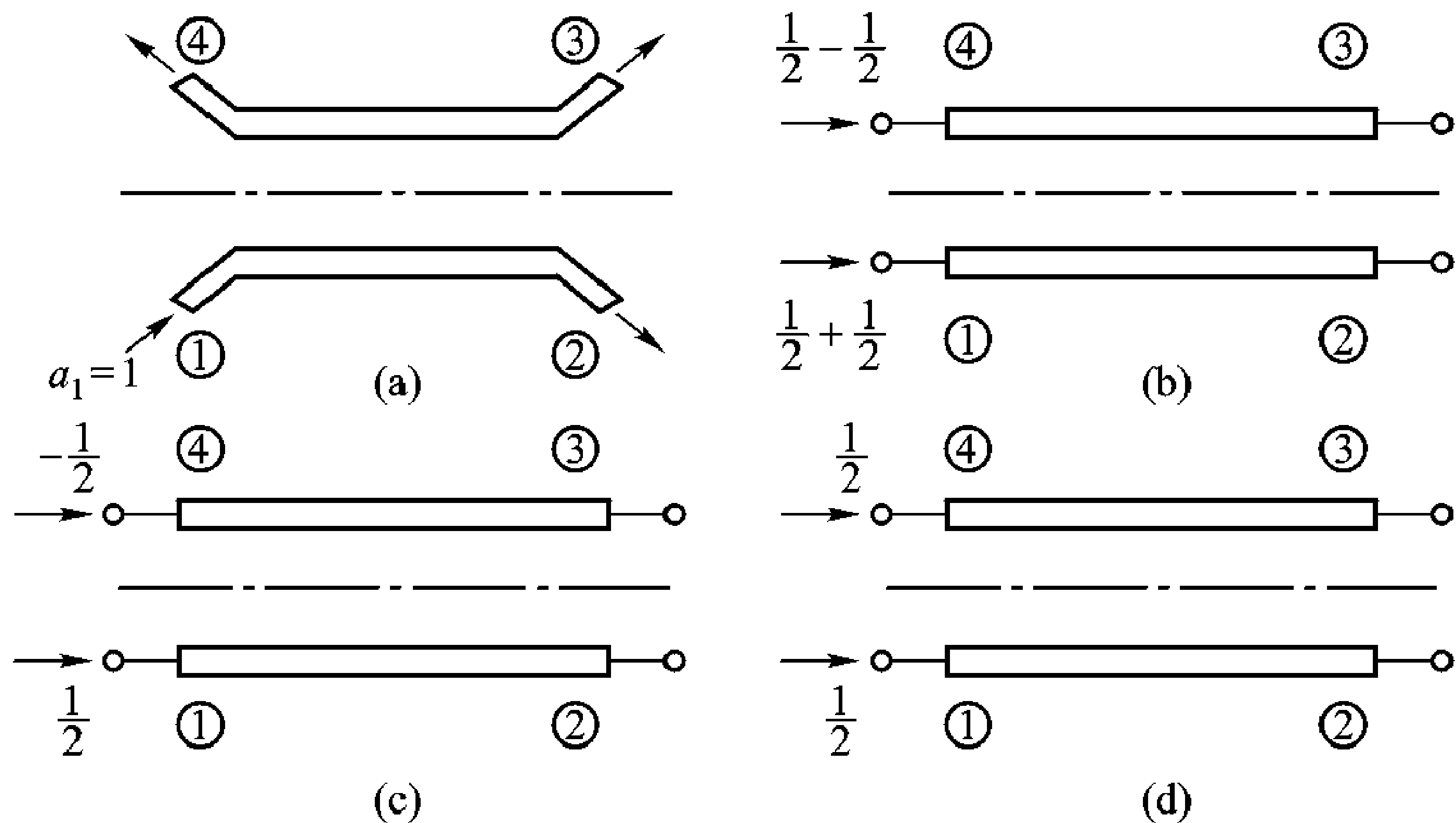


图 2-37　对称耦合微带线激励的分解

(a) 对称耦合微带线　(b) 非对称电压激励

(c) 等幅反相电压激励　(d) 等幅同相电压激励

线的分析就转变为对图 2-37 (c)、(d)表示的奇模、偶模激励微带线的分析。

2.7.2　耦合微带线满足的方程及其解

设两耦合线上的电压分布分别为 $V_1(z)$和 $V_2(z)$，线上电流分别为 $I_1(z)$和 $I_2(z)$，且传输线工作在无耗状态，此时两耦合线上任一微分段 $\mathrm{d}z$ 可等效为如图 2-38 所示的电路。其中，C_a、C_b 为各自独立的分布电容，C_{ab}为互分布电容，L_a、L_b 为各自独立的分布电感，L_{ab}为互分布电感，对于对称耦合微带线有

$$C_a=C_b,\quad L_a=L_b,\quad L_{ab}=M$$

由电路理论可得

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}z}&=\mathrm{j}\omega LI_1+\mathrm{j}\omega L_{ab}I_2\\-\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}z}&=\mathrm{j}\omega L_{ab}I_1+\mathrm{j}\omega LI_2\\-\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}z}&=\mathrm{j}\omega CV_1-\mathrm{j}\omega C_{ab}V_2\\-\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}z}&=-\mathrm{j}\omega C_{ab}V_1+\mathrm{j}\omega CV_2\end{aligned}\right\}\tag{2.7.1}$$

式中，$L=L_a$ 与 $C=C_a+C_{ab}$分别表示另一根耦合线存在时的单线分布电感和分布电容。式(2.7.1)即耦合传输线方程。

根据前面的分析，可以将激励分为奇模激励和偶模激励。设两线的激励电

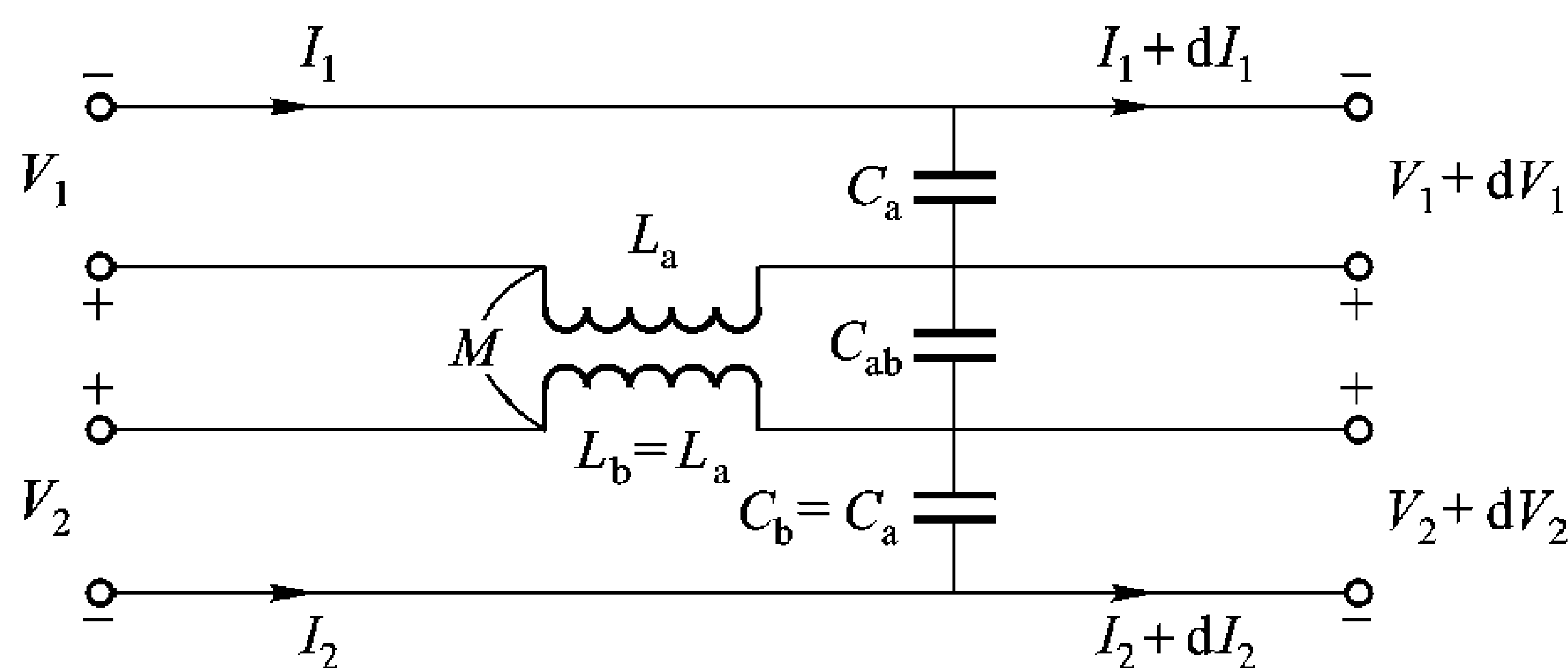


图 2-38 对称耦合微带线的等效电路

压分别为 V_1、V_2，则可表示为两个等幅同相电压 V_e 激励（即偶模激励）和两个等幅反相电压 V_o 激励（即奇模激励）。V_1 和 V_2 与 V_e 和 V_o 之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}V_e+V_o=V_1\\V_e-V_o=V_2\end{aligned}\right\}\tag{2.7.2}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned}V_e=(V_1+V_2)/2\\V_o=(V_1-V_2)/2\end{aligned}\right\}\tag{2.7.3}$$

（1） 偶模激励

当对耦合微带线进行偶模激励时，对称面可等效为"磁壁"，如图 2-36(b)。此时，在式(3.7.1)中令 $V_1=V_2=V_e$，$I_1=I_2=I_e$，得

$$\left.\begin{aligned}-\frac{dV_e}{dz}=j\omega(L+L_{ab})I_e\\-\frac{dI_e}{dz}=j\omega(C-C_{ab})V_e\end{aligned}\right\}\tag{2.7.4}$$

于是可得偶模传输线方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2V_e}{dz^2}+\omega^2LC\left(1+\frac{L_{ab}}{L}\right)\left(1-\frac{C_{ab}}{C}\right)V_e=0\\\frac{d^2I_e}{dz^2}+\omega^2LC\left(1+\frac{L_{ab}}{L}\right)\left(1-\frac{C_{ab}}{C}\right)I_e=0\end{aligned}\right\}\tag{2.7.5}$$

令 $K_L=L_{ab}/L$ 与 $K_C=C_{ab}/C$ 分别为电感耦合函数和电容耦合函数。由前面均匀传输线理论可得偶模传输常数 k_e、相速 v_{pe}及特性阻抗 Z_{0e}分别为

$$\left.\begin{aligned}k_e=\omega\sqrt{LC(1+K_L)(1-K_C)}\\v_{pe}=\frac{\omega}{k_e}=\frac{1}{\sqrt{LC(1+K_L)(1-K_C)}}\\Z_{0e}=\frac{1}{v_{pe}C_{0e}}=\sqrt{\frac{L(1+K_L)}{C(1-K_C)}}\end{aligned}\right\}\tag{2.7.6}$$

式中，$C_{0e}=C(1-K_C)=C_a$，为偶模电容。

(2) 奇模激励

当耦合微带线为奇模激励时，对称面可等效为“电壁”，如图 2－36 (c)。此时，在式(2.7.1)中令 $V_1=-V_2=V_o$，$I_1=-I_2=I_o$，得

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dV_o}{dz}&=j\omega L(1-K_L)I_o\\ -\frac{dI_o}{dz}&=j\omega C(1+K_C)V_o\end{aligned}\right\} \tag{2.7.7}$$

经同样分析可得奇模传输常数 k_o、相速 v_{po}及特性阻抗 Z_{0o}分别为

$$\left.\begin{aligned} k_o&=\omega\sqrt{LC(1-K_L)(1+K_C)}\\ v_{po}&=\frac{\omega}{k_o}=\frac{1}{\sqrt{LC(1-K_L)(1+K_C)}}\\ Z_{0o}&=\frac{1}{v_{po}C_{0o}}=\sqrt{\frac{L(1-K_L)}{C(1+K_C)}}\end{aligned}\right\} \tag{2.7.8}$$

式中，$C_{0o}=C(1+K_C)=C_a+2C_{ab}$为奇模电容。

(3) 奇、偶模有效介电常数与耦合系数

设以空气作填充介质的情况下奇、偶模电容分别为 $C_{0o}(1)$和 $C_{0e}(1)$，而实际介质情况下的奇、偶模电容分别为 $C_{0o}(\varepsilon_r)$和 $C_{0e}(\varepsilon_r)$，则耦合微带线的奇、偶模有效介电常数分别为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{eo}&=\frac{C_{0o}(\varepsilon_r)}{C_{0o}(1)}=1+q_o(\varepsilon_r-1)\\ \varepsilon_{ee}&=\frac{C_{0e}(\varepsilon_r)}{C_{0e}(1)}=1+q_e(\varepsilon_r-1)\end{aligned}\right\} \tag{2.7.9}$$

式中，q_o、q_e 分别为奇、偶模的填充因子。此时，奇偶模的相速和特征阻抗可分别表达为

$$\left.\begin{aligned} v_{po}&=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{eo}}}\\ v_{pe}&=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{ee}}}\\ Z_{0o}&=\frac{1}{v_{po}C_{0o}(\varepsilon_r)}=\frac{Z_{0o}^a}{\sqrt{\varepsilon_{eo}}}\\ Z_{0e}&=\frac{1}{v_{pe}C_{0e}(\varepsilon_r)}=\frac{Z_{0e}^a}{\sqrt{\varepsilon_{ee}}}\end{aligned}\right\} \tag{2.7.10}$$

式中，Z_{0o}^a和 Z_{0e}^a分别为空气耦合微带的奇、偶模特征阻抗。可见，由于耦合微

带线的 ε_{eo}和 ε_{ee}不相等，奇、偶模的波导波长也不相等，它们分别为

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{go} &= \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_{eo}}\\ \lambda_{ge} &= \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_{ee}}\end{aligned}\right\} \tag{2.7.11}$$

当介质为空气时，$\varepsilon_{eo}=\varepsilon_{ee}=1$，奇、偶模相速均为光速，此时必有

$$K_L = K_C = K \tag{2.7.12}$$

称 K 为耦合系数，由式(2.7.8)和式(2.7.10)得

$$\left.\begin{aligned}Z_{0e}^{a} &= \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{1+K}{1-K}}\\ Z_{0o}^{a} &= \sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{\frac{1-K}{1+K}}\end{aligned}\right\} \tag{2.7.13}$$

设 $Z_{0c}^{a}=\sqrt{L/C}$，它是考虑到另一根耦合线存在条件下空气填充时单根微带线的特征阻抗，于是有

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{Z_{0e}^{a}Z_{0o}^{a}} &= Z_{0c}^{a}\\ Z_{0c}^{a} &= Z_0^{a}\sqrt{1-K^2}\end{aligned}\right\} \tag{2.7.14}$$

式中，Z_0^a 是空气填充时孤立单根微带线的特征阻抗。

根据以上分析，有以下结论：

① 对以空气作填充介质的耦合微带线，奇偶模的特征阻抗虽然随耦合状况而变，但两者的乘积等于存在另一根耦合线时的单线特征阻抗的平方。

② 耦合越紧，Z_{0o}^{a}和 Z_{0e}^{a}差值越大；耦合越松，Z_{0o}^{a}和 Z_{0e}^{a}差值越小。当耦合很弱时，$K\to 0$，此时奇、偶模特征阻抗相当接近且趋于孤立单根微带线的特征阻抗。

2.7.3 微带双分支定向耦合器

微带双分支定向耦合器如图 2－39 (a)，它由主线、副线及两个耦合分支线组成，分支线的长度及其间距均为中心频率的 1/4 波长($\lambda/4$)。分支线与主线、副线是并联的。所谓主线、副线是相对的，如果称 1－2 是主线，3－4 就是副线；反之，如果称 3－4 是主线，则 1－2 就是副线。一般称 1－2 为主线。

各段线的特征用(对端口 1 特征导纳 Y_{01})归一化的特征导纳表示，其中端口 1 和端口 4 归一化特征导纳为 $y_{01}=y_{04}=1$，端口 2 和端口 3 的归一化特征导纳为 $y_{02}=y_{03}=Y_{02}/Y_{01}=1/R$，$R=Z_{02}/Z_{01}$称为变阻比。由于这种定向耦合器还有阻抗变换作用故称为变阻定向耦合器。图 2－39 (a)的$\overline{AB}$段和$\overline{DC}$段传输线的归一化特征导纳均为 $y_0=Y_0/Y_{01}=b$，$\overline{AD}$段的归一化特征导纳为 $y_0=a_1$，$\overline{BC}$段的归一化特征导纳为 $y_0=a_2$，其中 a_1、a_2 及 b 应根据给定的技术指标设

计确定。

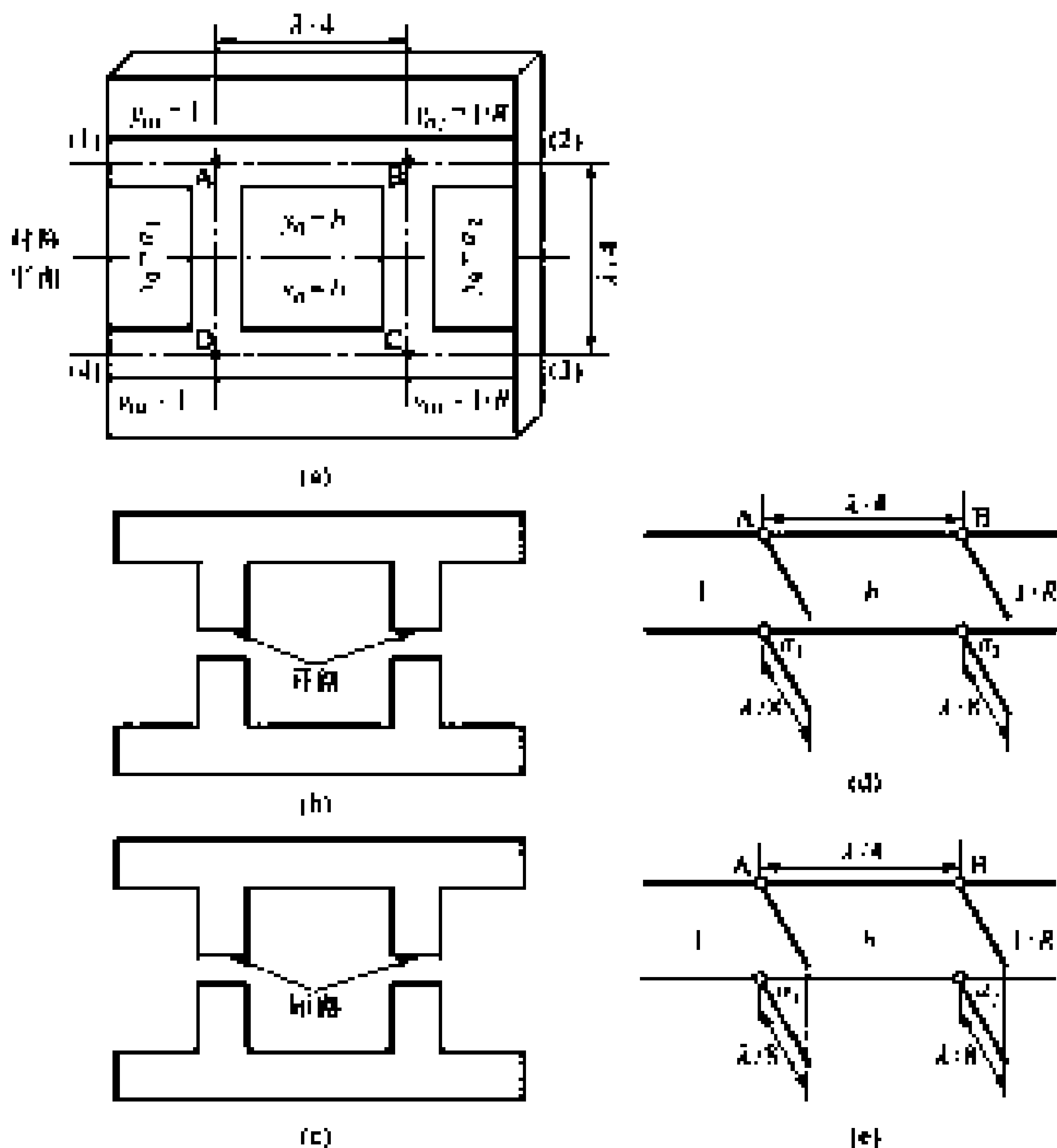


图 2-39　微带双分支定向耦合器

(a) 微带双分支定向耦合器　(b) 对称面开路　(c) 对称面短路

(d) 对称面开路的等效电路　(e) 对称面短路的等效电路

定向耦合器结构形式众多，微带双分支定向耦合器仅是其中的一种。定向耦合器有 4 个端口，分别记为 1、2、3、4。理想的定向耦合器有以下特点，如果信号从端口 1 输入，仅端口 2 与 3 有信号输出，端口 4 没有信号输出，即端口 1 与端口 4 隔离；如果信号从端口 2 输入，则信号只从端口 1、4 输出，与端口 3 隔离。

对于图 2-39 (a)所示微带双分支定向耦合器，如果信号(电压)仅从端口 1 输入。到达端口 4 (D 点)的信号为两路之叠加：一路由 A→D，行程为 $\lambda/4$；另一种由 A→B→C→D，行程为 $3\lambda/4$，两路信号行程差为 $\lambda/2$，对应的相位差

为 π，若适当选择参数 a_1、a_2 及 b 以使两路信号幅度相等，则端口 4 将无输出(隔离)。另一方面，到达端口 3 (C 点)的信号也为两路之叠加：一路由 A→B→C，另一路由 A→D→C，由于两路行程均为 λ/2，故在 C 点两路信号将同相(加强)，适当选择参数 a_1、a_2 及 b，可以控制端口 2 与端口 3 输出的信号功率比。由于输出端(端口 2 和端口 3)所接传输线的特征阻抗较输入端口(端口 1 或端口 4)不同，故此定向耦合器兼有阻抗变换作用。

微带双分支定向耦合器结构具有对称性，分支线中心为其对称面。对于偶对称，即偶模情况下，对称面上分支电流为零，等效于开路，故可沿对称面把微带线双分支定向耦合器分解成两个独立的部分，如图 2-39 (b)，即每个部分简化为并联两段长 λ/8 的开路微带线的微带线系统。

对于奇对称，即奇模情况下，对称面上分支电压为零，等效为短路，故可沿对称面把微带线双分支定向耦合器分解成如图 2-39 (c)所示的两个独立部分，每个部分简化为并联两段 λ/8 短路微带线的微带线系统。

图 2-39 (b)和(c)所示的微带线系统可进一步等效为图 2-39 (d)和(e)的传输线问题，而对(d)和(e)的传输线问题用第 12 章级连的 **A** 矩阵表示后，其分析是很容易的。见第 12 章习题 12.6。

2.8 传输线的瞬态响应

传输线瞬态响应的分析可以直接在时域中进行，利用傅里叶变换也可在频域中进行。

2.8.1 时域分析

前面对传输线的分析都是在稳态情况下进行的，即传输线为连续的简谐振荡源激励，传输线上传播的是随时间作简谐变化的单频率波。当传输线传播数字信号时，波源的扰动局限在一个很短的时间内，如果用傅里叶展开，波源中包含无限多频率分量。稳态假设已不适用，需要研究传输线的瞬态响应。

最基本的数字信号实为电压脉冲串。脉冲持续时间为 τ 的信号可表示为

$$V(t)=\begin{cases}V_0 & (0\leqslant t\leqslant\tau)\\ 0 & (t<0,\ t>\tau)\end{cases} \tag{2.8.1}$$

其图解示于图 2-40 (a)。

任何脉冲信号可表示为两个阶跃函数 $U(t)$的组合。

$$V(t)=V_0U(t)-V_0U(t-\tau) \tag{2.8.2}$$

其图解示于图 2-40 (b)。

阶跃函数 $U(t)$具有性质

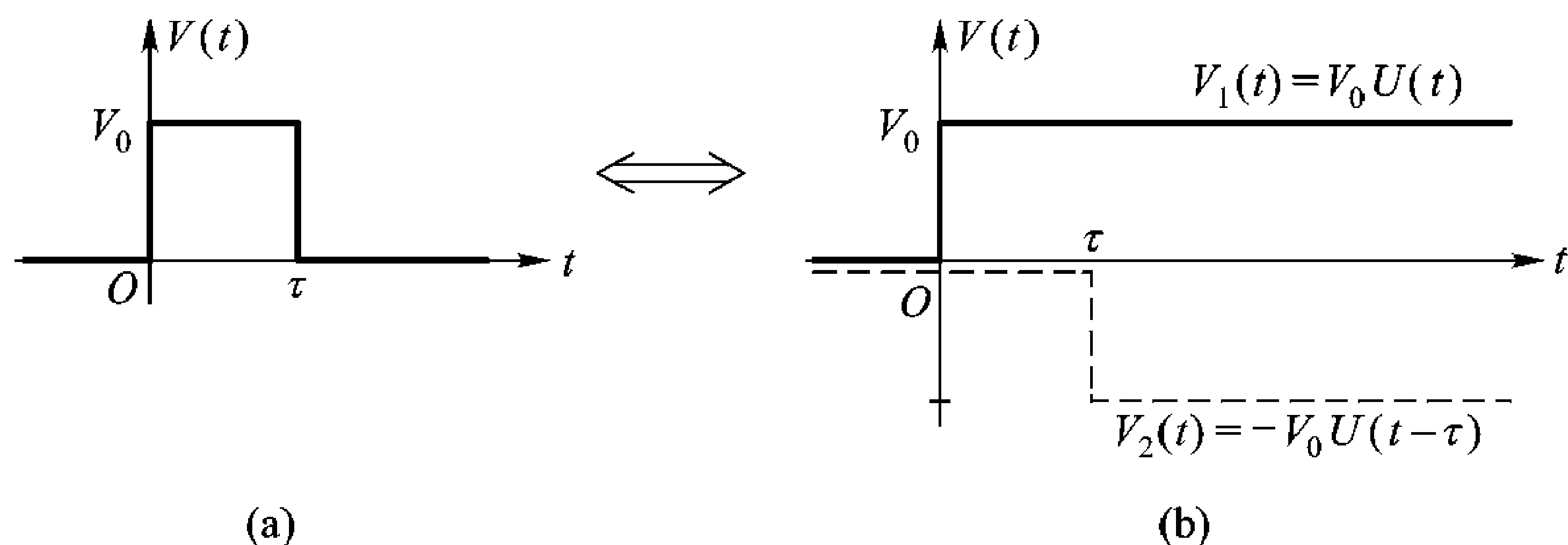


图 2-40　电压脉冲分解为两个阶跃电压的组合

(a) 电压脉冲　(b) 分解为两个阶跃电压的组合

$$U(t)=\begin{cases}1 & (t\geqslant 0)\\ 0 & (t<0)\end{cases}\tag{2.8.3}$$

因此传输线对阶跃电压 $U(t)$激励的响应是分析任意波形激励时传输线瞬态响应的基础。

参看图 2-41 (a)，长度为 l、传播常数为 k、特征阻抗为 Z_c 的传输线，其终端($z=l$)接纯电阻负载 Z_L，始端($z=0$)通过开关 S 与内阻为 R_g 的电压源 V_g 相连。

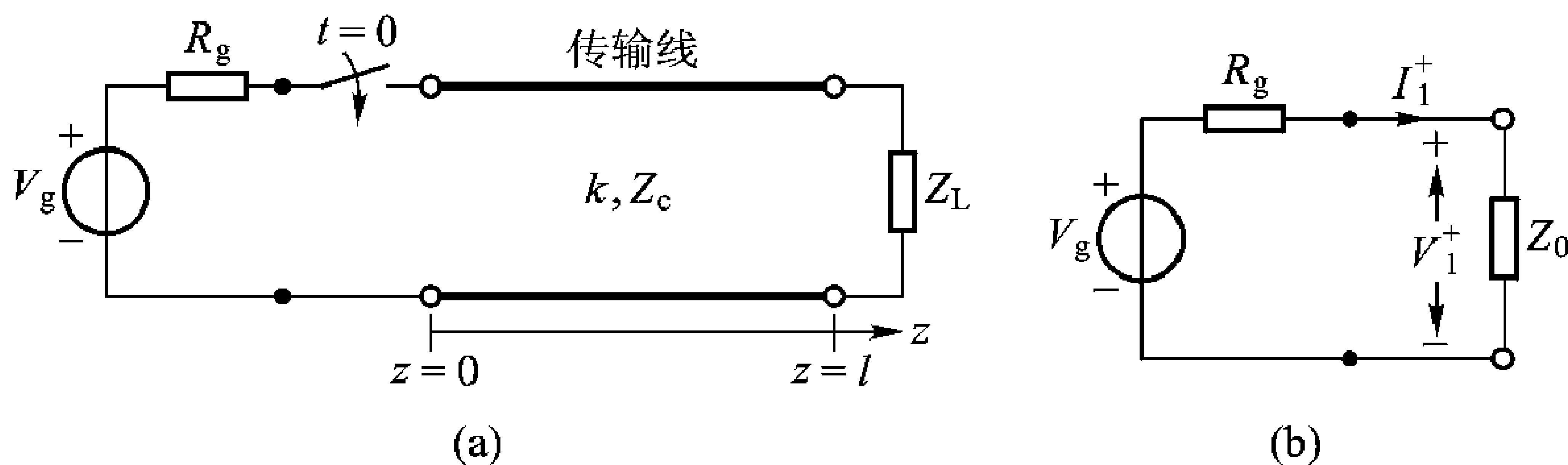


图 2-41　与源、负载连接的传输线及其等效电路

(a) 与源、负载连接的传输线　(b) 电路刚接通($t=0^+$)时的等效电路

如果在 $t=0$ 时刻，开关 S 动作使源与传输线接通，相当于一阶跃电压加到传输线始端。显然在 $t=0^+$，即源与传输线刚接通时，传输线上只有入射波，没有反射波，传输线对源的影响相当于接一个负载 Z_c，见图 2-41 (b)。因此在 $t=0^+$，传输线始端($z=0$)初始电压 V_1^+、电流 I_1^+ 为

$$I_1^+=\frac{V_g}{R_g+Z_c}\tag{2.8.4a}$$

$$V_1^+=I_1^+Z_c=\frac{V_gZ_c}{R_g+Z_c}\tag{2.8.4b}$$

随着时间推移，此电压、电流波以相速 $v_p=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 沿传输线传播。当波到达传输线终端($z=l$)，如果负载 Z_L 与传输线不匹配，部分能量反射回来

往源方向传播；当反射回来的波到达传输线始端（$z=0$），如果始端源与传输线又不匹配，一部分能量又反射回来往负载（$z=l$）方向传播。如此不断重复下去，其过程示于图 2－42。

定义 $T=l/v_{\mathrm{p}}$，即波由传输线始端（$z=0$）传播到终端（$z=l$）的时间延迟。当 $t_1=T/2$ 时，波只传播到传输线的中点（$z=l/2$），只有入射波，没有反射波。传输线上电压分布如图 2－42（a），则

$$V\left(z,\ \frac{T}{2}\right)=\begin{cases}V_1^+ & \left(0\leqslant z<\dfrac{l}{2}\right)\\ 0 & \left(\dfrac{l}{2}<z\leqslant l\right)\end{cases}$$

当 $t=T$，波到达传输线终端（$z=l$）。负载端反射系数

$$\Gamma_l=\frac{Z_{\mathrm{L}}-Z_{\mathrm{c}}}{Z_{\mathrm{L}}+Z_{\mathrm{c}}} \tag{2.8.5}$$

反射电压 V_1^- 可由下式得出

$$V_1^-=\Gamma_l V_1^+$$

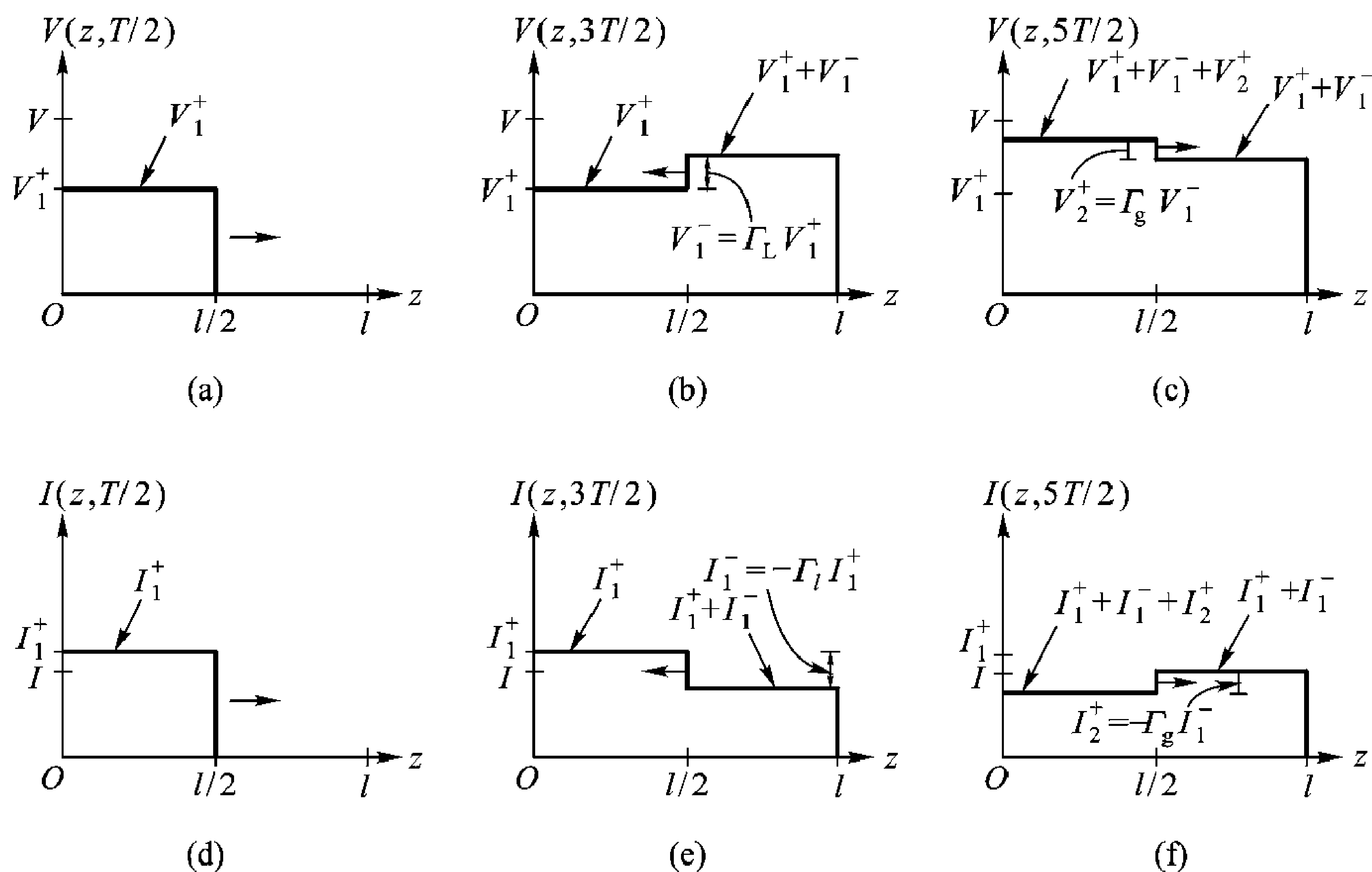


图 2－42 在阶跃电压作用下传输线上电压、电流的瞬变过程

(a) $V(z)$ at $t_1=T/2$ (b) $V(z)$ at $t_2=3T/2$ (c) $V(z)$ at $t_3=5T/2$

(d) $I(z)$ at $t_1=T/2$ (e) $I(z)$ at $t_2=3T/2$ (f) $I(z)$ at $t_3=5T/2$

假定 $Z_{\mathrm{L}}=2Z_{\mathrm{c}}$，则

$$\Gamma_l=\frac{1}{3},\quad V_1^-=\frac{V_1^+}{3}$$

当 $t_2=\frac{3}{2}T$，传输线上电压分布如图 2－42 (b)，则

$$V\left(z, \frac{3T}{2}\right)=\begin{cases} V_1^+ & \left(0\leqslant z<\frac{l}{2}\right) \\ V_1^+ + V_1^- = \frac{4}{3}V_1^+ & \left(\frac{l}{2}<z\leqslant l\right) \end{cases}$$

当 $t=2T$，反射波 V_1^- 到达始端($z=0$)，如果源与传输线不匹配，始端反射系数 Γ_g 为

$$\Gamma_g=\frac{R_g-Z_c}{R_g+Z_c} \tag{2.8.6}$$

假定 $R_g=4Z_c$，则 $\Gamma_g=0.6$。

反射电压 V_2^+ 可由下式得出：

$$V_2^+=\Gamma_g V_1^-=\Gamma_g\Gamma_l^- V_1^+=\frac{0.6}{3}V_1^+=0.2V_1^+$$

当 $t_3=\frac{5}{2}T$ 时，传输线上电压分布如图 2－42 (c)，则

$$V\left(z, \frac{5T}{2}\right)=\begin{cases} V_1^+ + V_1^- + V_2^+ = \left(1+\frac{1}{3}+0.2\right)V_1^+ & \left(0\leqslant z<\frac{l}{2}\right) \\ V_1^+ + V_1^- = \left(1+\frac{1}{3}\right)V_1^+ & \left(\frac{l}{2}<z\leqslant l\right) \end{cases}$$

传输线上电流分布也可进行类似分析。$t=t_1$、t_2、t_3 时刻的电流分布亦示于图 2－42 (d)、(e)、(f)。

如果把上面的过程继续进行下去，传输上最终电压分布为

$$\begin{aligned} V_\infty &= V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- + \cdots \\ &= V_1^+ \left(1+\Gamma_l+\Gamma_l\Gamma_g+\Gamma_l^2\Gamma_g+\Gamma_l^2\Gamma_g^2+\Gamma_l^3\Gamma_g^2+\cdots\right) \\ &= V_1^+ \left[\left(1+\Gamma_l\right)\left(1+\Gamma_l\Gamma_g+\Gamma_l^2\Gamma_g^2+\cdots\right)\right] \\ &= V_1^+ \left(1+\Gamma_l\right)\frac{1}{1-\Gamma_l\Gamma_g} \end{aligned} \tag{2.8.7}$$

将式(2.8.5)、(2.8.6)表示的 Γ_l、Γ_g 代入上式，得到

$$V_\infty=\frac{V_g Z_L}{R_g+Z_L} \tag{2.8.8}$$

这就是阶跃电压加到传输线始端，传输线达到稳态时的电压。到达稳态时传输线上稳态电流为

$$I_\infty=\frac{V_\infty}{Z_L}=\frac{V_g}{R_g+Z_L} \tag{2.8.9}$$

这跟直流电路分析得出的结果是一致的。在直流电路分析中，传输线仅仅当作一段导线把负载和源连起来。

当传输线为任意波形电压 $V(t)$激励时(见图 2－43)，首先将激励波形分解为多个矩形电压脉冲的叠加，如图 2－43 中虚线所示。然后研究传输线为矩形电压激励时的瞬态响应，再把所有这些瞬态响应加起来就得到波源 $V(t)$激励传输线的瞬态响应。如果激励波源的波形较复杂，要用很多个矩形脉冲去逼近，这种分析传输线瞬态响应的方法是很费时的。

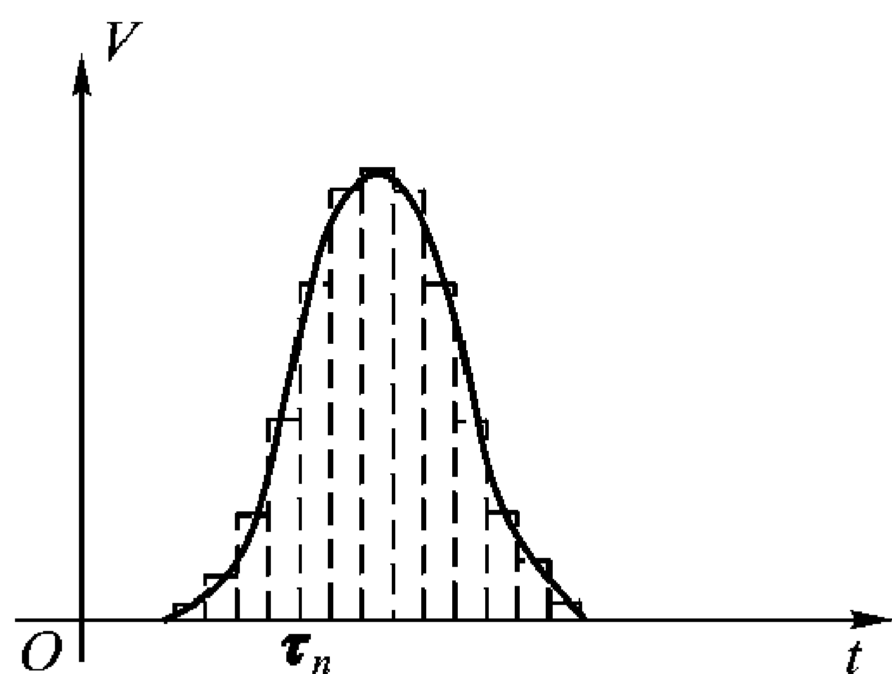


图 2－43 任意波形脉冲用矩形脉冲叠加表示

2.8.2 频域分析

前面对传输线瞬态响应的分析是在时域中进行的。如果我们把激励源 $V(t)$展开为多个频率不同的简谐振荡源的叠加，即 $V(t)=\sum_{n}A_n e^{j\omega_n t}$，那么对于角频率为 ω_n 的任一简谐振荡源 $A_n e^{j\omega_n t}$激励的波沿传输线的传播就可用稳态的方法进行分析。把所有 $A_n e^{j\omega_n t}$激励的波在传输线的任一位置(如 $z=z_1$)的值计算出来，进行傅里叶反变换就得到该位置电压或电流随时间的变化，即传输线的瞬态响应。如果波传播速度与激励源的频率有关，这种方法分析传输线的瞬态响应更显优越性。第 5 章将用这种方法分析高斯脉冲波投射到介质交界面的反射与折射。

本章要点

- 由平行双导体构成的导引电磁波的结构叫做传输线。平行双导线、同轴线、平行平板波导及其变形——微带线都属于传输线。平行双导线、同轴线在通信网物理层得到广泛应用，而微带线在平面结构的集成电路中应用最广。
- 传输线上电压、电流满足传输线方程

$$\begin{cases}\dfrac{dV(z)}{dz}=-jkZ_c I(z)\\[2mm]\dfrac{dI(z)}{dz}=-jkY_c V(z)\end{cases}$$

k、Z_c 是传输线的两个特征参数。当传输线有损耗时，k、Z_c 都是复数。k 叫做传输线的传播常数，k 的实部 k_r 决定波的传播。波长 $\lambda=2\pi/k_r$，波等相位点传播速度 $v=\omega/k_r$。k 的虚部 k_i 决定波的衰减，即波在 z 方向按 $e^{-k_i z}$衰减。

Z_c 叫做传输线的特征阻抗，它表示传输线入射波电压与入射波电流之比。传输线的特征阻抗对于研究传输线的匹配问题十分有用。

- 描述传输线的状态可用 5 组参数，它们是：电压和电流、入射波与反射波、反射系数、阻抗或导纳、驻波系数与驻波相位(或驻波最小点位置)。这 5 组参数主要由终端负载 Z_L 决定，它们表示同一传输线状态，相互间可转换。高频时反射系数 Γ 是可测的量，要熟练掌握以 Γ 为中心的这 5 组参数之间的变换关系。
- 描述传输线状态的 5 组参数沿传输线的变换，以反射系数 Γ 沿传输线的变换最简单，其模不变，相位变化 $2kz$，其他参数沿传输线的变换可方便地由 Γ 沿传输线的变换导出。
- 传输线匹配时，传输线效率最高，传输的功率最大，因此一般情况下，要尽量使传输线工作于匹配状态。
- 圆图在微波技术发展史中具有里程碑式的意义。圆图是在 Γ 复平面上，在 $|\Gamma| = 1$ 的单位圆内同时将电阻或电抗(对于阻抗圆图)或电导与电纳(对于导纳圆图)等值线标出的图。圆图将传输线问题的计算图示化，使非常复杂的阻抗匹配等问题直观地表示出来。在电路设计中，工程师们都喜欢将有关参数在圆图上表示出来。圆图有丰富的内涵，圆图上各特征点、线、面的物理意义要深入理解并能应用。
- 阻抗圆图转过 180°就是导纳圆图，同一张圆图既可当阻抗圆图用，也可当导纳圆图用，但有关特征点、线、面的物理意义是不同的，使用圆图时要注意。
- 阻抗匹配是电路设计中经常遇到的问题。其中心思想是人为引入一个反射与负载引起的反射相抵消，从而实现匹配。从圆图上看，就是如何将负载转换到匹配点，即圆图圆心位置。$\lambda/4$ 阻抗变换器只能对纯电阻负载进行阻抗匹配。用并联支路可变电纳匹配器进行匹配时，第一步变换到 $g = 1$ 的圆上，然后再沿 $g = 1$ 的圆变换到匹配点。
- 微带线与平面集成电路工艺兼容，在集成电路中得到广泛应用。微带线的分析与综合，微带结构的电路元件，在射频与微波电路、高速数字电路设计中十分重要。对耦合微带线的任一激励都可分解为奇模与偶模的组合。奇偶模分析方法是分析耦合微带线的有效方法。
- 传输线瞬态响应的分析，一是直接在时域中进行，二是通过傅里叶变换求出频域中每一个频率分量的响应，然后再经过傅里叶反变换得到时域中的响应。

习题

2.1 市话用的平行双导线，测得其分布电路参数为

$R' = 0.042\ \Omega/\text{m}$

$L' = 5 \times 10^{-7}\ \text{H/m}$

$G' = 5 \times 10^{-10}$ S/m

$C' = 30.5$ pF/m

求传播常数 k 与特征阻抗 Z_c。

2.2　参看题图 2.2，$Z_L = 80\ \Omega$，$Z_c = 50\ \Omega$，负载 Z_L 上电压为 5 V，求驻波系数 ρ，驻波最小点位置 d_{min1}/λ，传输线长度 $l = \lambda/4$，$\lambda/2$，$3\lambda/8$ 处的输入阻抗 Z_{in} 以及 V_{max}，V_{min}，I_{max}，I_{min}。



题图 2.2

2.3　无耗传输线特征阻抗 $Z_c = 50\ \Omega$，负载阻抗 $Z_L = 5\underline{/25.99^\circ}\ \Omega$，求传输线长度 $l = \lambda/8$，$\lambda/4$，$3\lambda/8$ 处的输入阻抗 Z_{in}。

2.4　传输线终端负载归一化阻抗 $z_L = 0.8 + j1.0$，求：

(1) 驻波系数 ρ；

(2) 离开负载第一个驻波最小点的位置 d_{min}；

(3) 负载反射功率与入射功率之比；

(4) 作出 $V(z) \sim z/\lambda$ 关系曲线。

2.5　已知下面两条传输线：

传输线 1：特征阻抗 $Z_{c1} = 50\ \Omega$，$V_{max} = 100$ V，$V_{min} = 80$ V；

传输线 2：特征阻抗 $Z_{c2} = 75\ \Omega$，$V_{max} = 150$ V，$V_{min} = 100$ V。

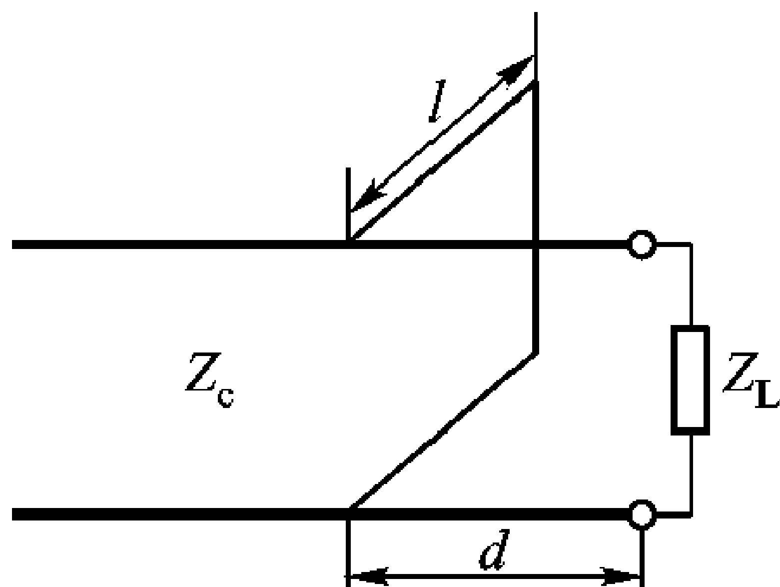
请问哪一条传输功率大？

2.6　传输线特征阻抗为 50 Ω，终端开路，测得始端输入阻抗为 j33 Ω，求传输线以波长计的电长度 l/λ。

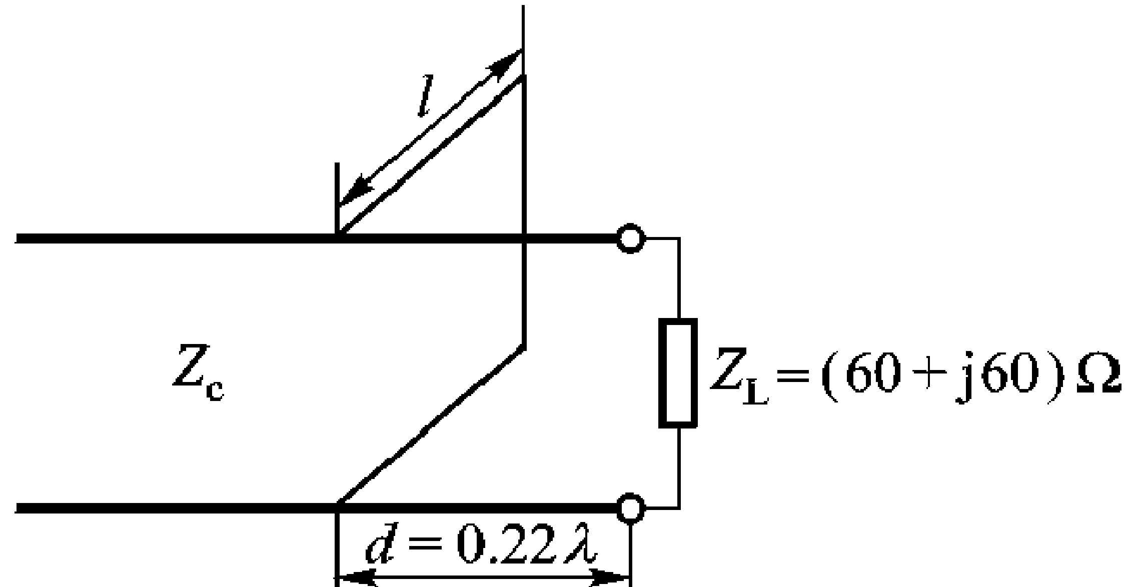
2.7　重复问题 2.4，但传输线终端短路。

2.8　在无耗线上测得：Z_{in}^{sc} 为 j100，Z_{in}^{oc} 为 −j25，d_{min} 为 0.1λ，0.6λ，…，驻波系数 $\rho = 3$，求负载阻抗。

2.9　如题图 2.9，$Z_L = (30 + j60)\ \Omega$，$Z_c = 50\ \Omega$，用可移动单可变电纳匹配器进行匹配，用圆图决定可变电纳匹配器到负载 Z_L 的距离 d，以及并联短路支线长度 l。



题图 2.9

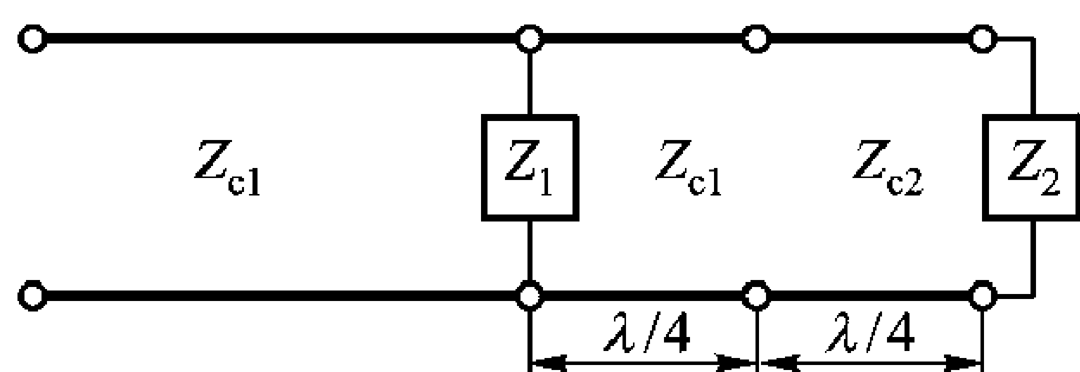


题图 2.10

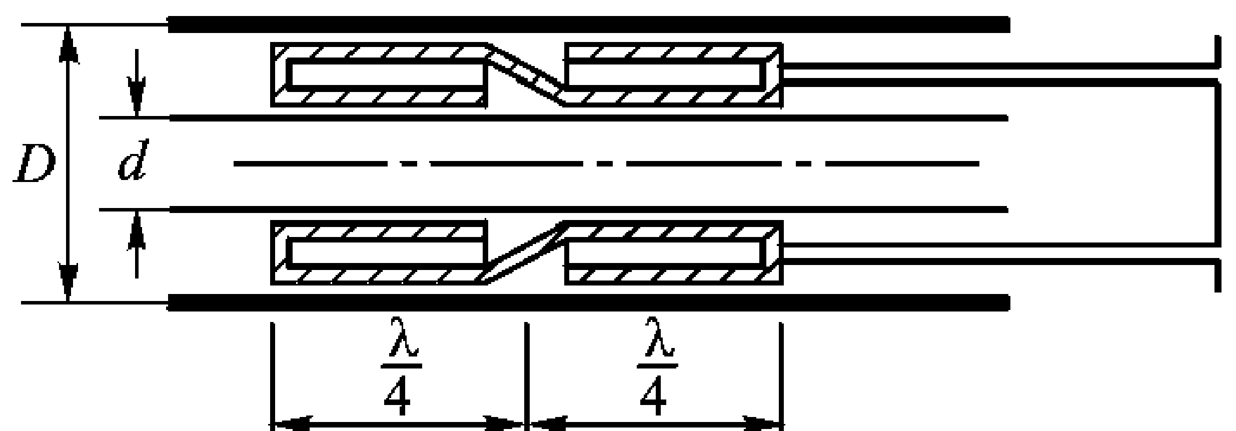
2.10　特征阻抗 $Z_c = 50\ \Omega$ 传输线，终端接负载 $Z_L = (60 + j60)\ \Omega$，并联短路支线离负载距离 $d = 0.22\lambda$。调节并联短路支线长度 l，求最小驻波系数 ρ_{min}。

2.11　参看题图 2.11，Z_{c1}、Z_{c2} 为无耗传输线特征阻抗，Z_1、Z_2 为纯电阻负载，证明 $\dfrac{V_2}{V_1} =$

$\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}$，V_1、V_2 为 Z_1、Z_2 上电压降。



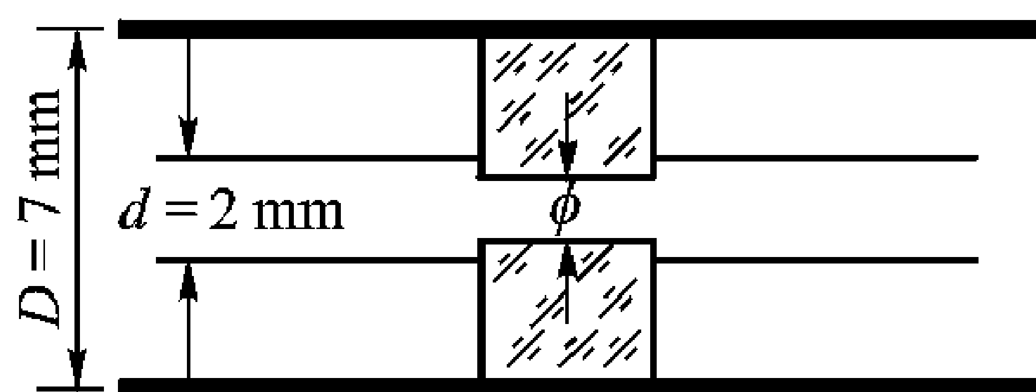
题图 2.11



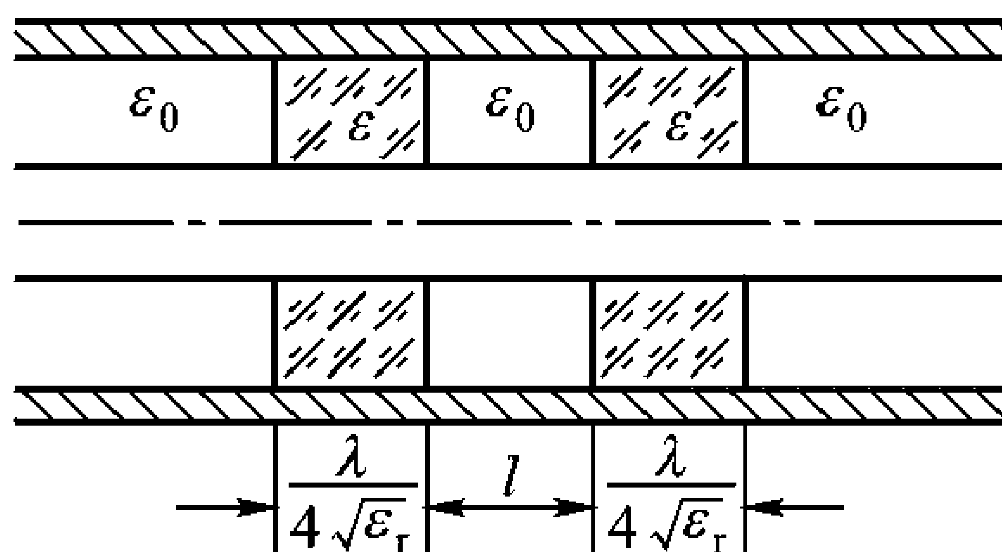
题图 2.12

2.12　说明题图 2.12 中的同轴线的不接触 S 型活塞是一个短路活塞。

2.13　有一空气介质的同轴线需装入介质支撑薄片，薄片材料为聚苯乙烯，其相对介电常数 $\varepsilon_r = 2.55$（题图 2.13），为使介质不引起反射，介质中心孔直径 ϕ（同轴线内导体和它配合）应该是多少？



题图 2.13



题图 2.14

2.14　题图 2.14 为一同轴线介质阻抗变换器，它的结构是在同轴线内外导体间充填长度为 $\frac{\lambda}{4\sqrt{\varepsilon_r}}$ 的两块介质（$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0, \mu = \mu_0$），若同轴线原是匹配的，证明两介质间距 l 由零变到 $\lambda/4$，输入驻波比从 1 变到 ε_r^2。

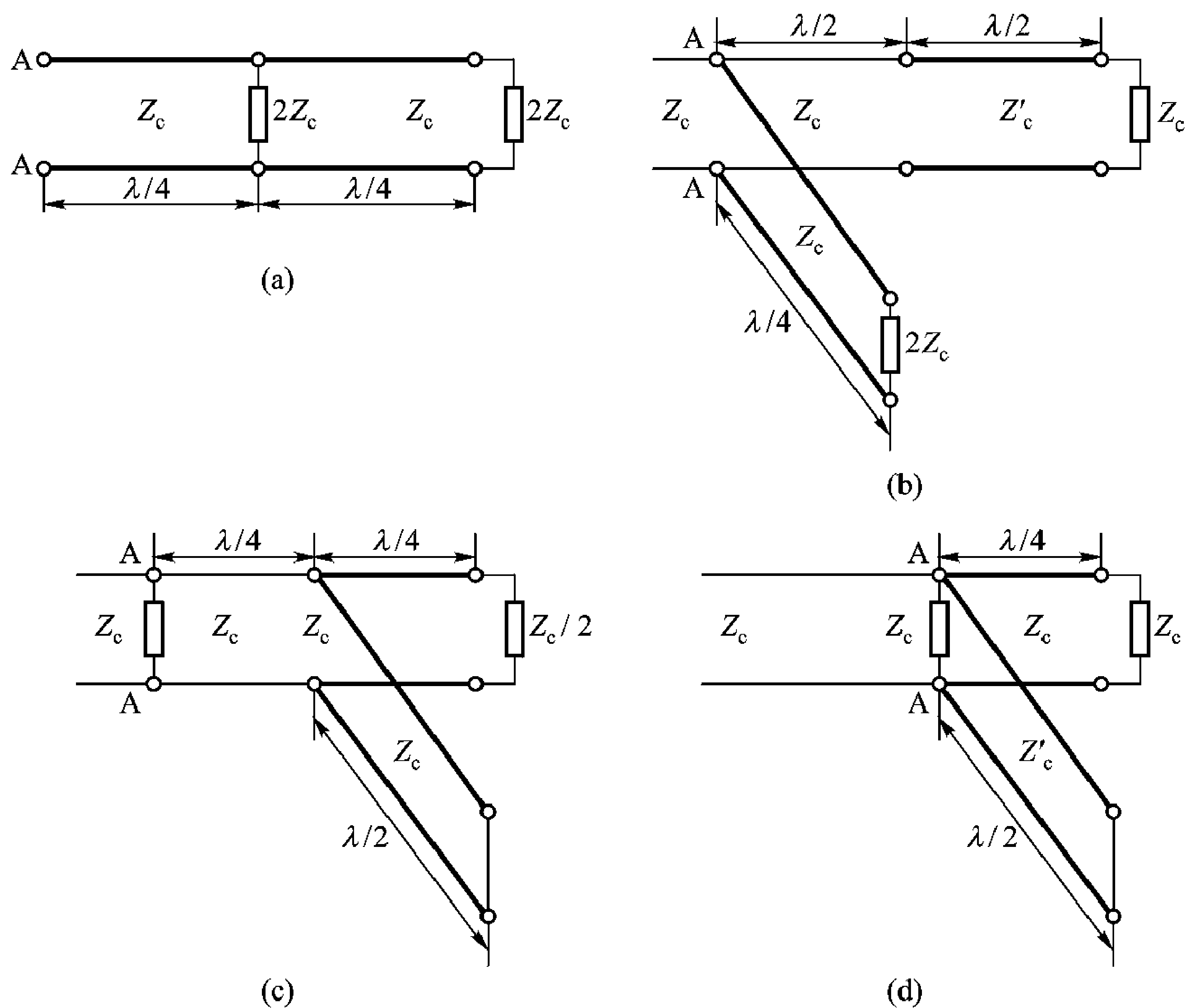
2.15　无耗同轴线的特征阻抗为 50 Ω，负载阻抗为 100 Ω，工作频率为 1000 MHz，今用 $\lambda/4$ 线进行匹配，求此 $\lambda/4$ 线的长度和特征阻抗，并求此 $\lambda/4$ 匹配器在反射系数小于 0.1 条件下的工作频率范围。

2.16　求题图 2.16 所示各电路的各无损线段中 A 参考面上的电压反射系数与输入阻抗以及每个负载上所吸收的功率（设 AA 面上传输功率为 P）。

2.17　如题图 2.16（c）、（d）所示电路，画出沿线电压、电流振幅分布图并求出它们的最大值和最小值。

2.18　已知某耦合微带线，介质为空气时奇、偶特征阻抗分别为 $Z_{0o}^{a} = 40\ \Omega$ 和 $Z_{0e}^{a} = 100\ \Omega$，实际介质 $\varepsilon_r = 10$ 时的奇、偶模填充因子为 $q_o = 0.4$，$q_e = 0.6$，试求介质填充耦合微带线的奇、偶模特征阻抗、相速和波导波长各为多少？q 定义为 $\varepsilon_e = 1 + q(\varepsilon_r - 1)$。

2.19　一段传输线，其中电压驻波系数恒定为 ρ，求证沿线各参考面上能出现的最大电纳 $b_{max} = \pm(\rho^2 - 1)/2\rho$。

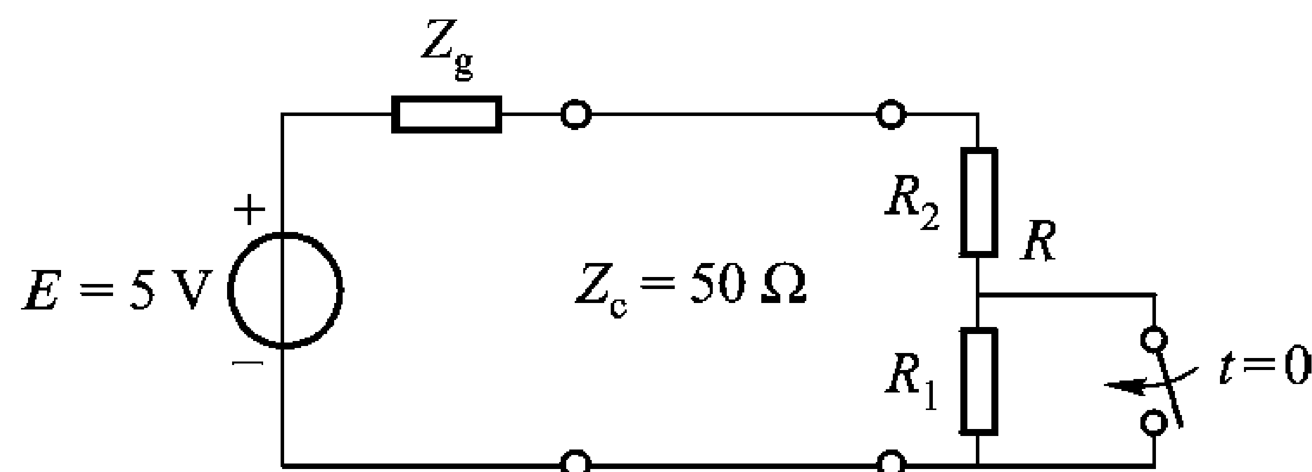


题图 2.16

2.20　特征阻抗 Z_c 为 50 Ω 的传输线终端接有负载阻抗 $Z_L=(25+j75)\Omega$，工作波长 $\lambda_0=10$ cm，采用可移动单可变电纳匹配器来调配负载阻抗，求：并联短路支线与负载距离 d 和并联短路支线长 l；当工作波长 $\lambda=1.02\lambda_0$ 时两组解的驻波系数 ρ 分别上升到何值。比较两组解的结果，讨论应选择哪组解。

2.21　能否用间距为 $\lambda/10$ 的并联双可变电纳匹配器来匹配归一化导纳为 $(2.5+j1)$ 的负载？

2.22　见题图 2.22，源电压 $E=5$ V，源电阻 $Z_g=10$ Ω，特征阻抗 $Z_c=50$ Ω，负载 $R_1=32$ Ω，$R_2=8$ Ω，稳态时负载 R_1+R_2 上的电压、电流分别为 V_L、I_L。现将 R_1 短路，求刚短路时负载上电压、电流改变量 $\Delta V_L=-2.758$ V，$\Delta I_L=0.055\ 2$ A。



题图 2.22

第 3 章　麦克斯韦方程

第 1 章我们已提到电磁场可以用以下 4 个场量描述，它们是：

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$——电场强度（伏特每米，V/m）

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$——电通量密度或电位移（库仑每平方米，$C/m^2$）

$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$——磁场强度（安培每米，A/m）

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$——磁感应强度或磁通量密度（韦伯每平方米，$Wb/m^2$）

这 4 个量都是矢量，都是时间坐标 t 和空间矢径 $\boldsymbol{r}$ 的函数。这些场量在我们周围总是存在的，有来自太阳和其他星球的场，也有来自闪电的场。传播电视的无线电波、激光则是用人工方法产生的场。

本章主要讨论电磁运动服从的基本方程——麦克斯韦方程。需要指出的是，麦克斯韦方程不是从几个公理推导出来的，而是根据科学实验总结出来的电磁运动基本规律。麦克斯韦方程是正确的，因为宏观世界电磁运动都遵循麦克斯韦方程。本章 3.1～3.2 节分别讨论积分形式、微分形式的麦克斯韦方程以及用复矢量表示的时谐场的麦克斯韦方程。3.3 节与 3.4 节讨论电荷守恒定律与物质的本构关系。麦克斯韦方程描述源产生的场，而场对源的作用由洛伦兹力方程描述。洛伦兹力方程在 3.5 节讨论。3.6 节讨论坡印廷定理，它表示电磁运动满足能量守恒关系。3.7 节简要介绍惟一性定理、镜像定理、等效原理、磁流和磁荷以及互易定理。

3.1　积分与微分形式的麦克斯韦方程

本节根据基本电磁现象与实验规律先介绍积分形式的麦克斯韦方程组，然后利用散度定理与斯托克斯定理，又从积分形式的麦克斯韦方程组得到微分形式的麦克斯韦方程组。

3.1.1　从库仑定理到高斯定理

根据库仑定理，真空中带电量 q 的质点对周围试验电荷 q_1 的作用可以看作点电荷 q 激发的电场 $\boldsymbol{E}$ 对试验电荷 q_1 的作用，点电荷 q 激发的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\boldsymbol{r}_0 \tag{3.1.1}$$

式中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的单位为 V/m，电量 q 的单位为C，$\varepsilon_0 = 8.854\times10^{-12}$ F/m，为真空介电常数，r 为点电荷 q 到试验电荷 q_1 之间距离，用m做单位，$\boldsymbol{r}_0$ 表示由 q 指向 q_1 的单位矢量。

将点电荷 q 放到介质中，由于介质极化的影响，点电荷 q 在介质中产生的电场强度$\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{r}_0 \tag{3.1.2}$$

式中 ε 叫做介质的介电常数，有

$$\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0 \tag{3.1.3}$$

ε_r 叫做介质的相对介电常数。

与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 相关连的电通量密度或电位移$\boldsymbol{D}$ 为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \tag{3.1.4}$$

那么根据式(3.1.2)，点电荷 q 产生的电通量密度

$$\boldsymbol{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{r}_0 \tag{3.1.5}$$

将点电荷 q 置于原点，其电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 在半径 r 方向。以原点为球心作一球面(图 3－1)，则通过该球面的电通量 Ψ_D 为

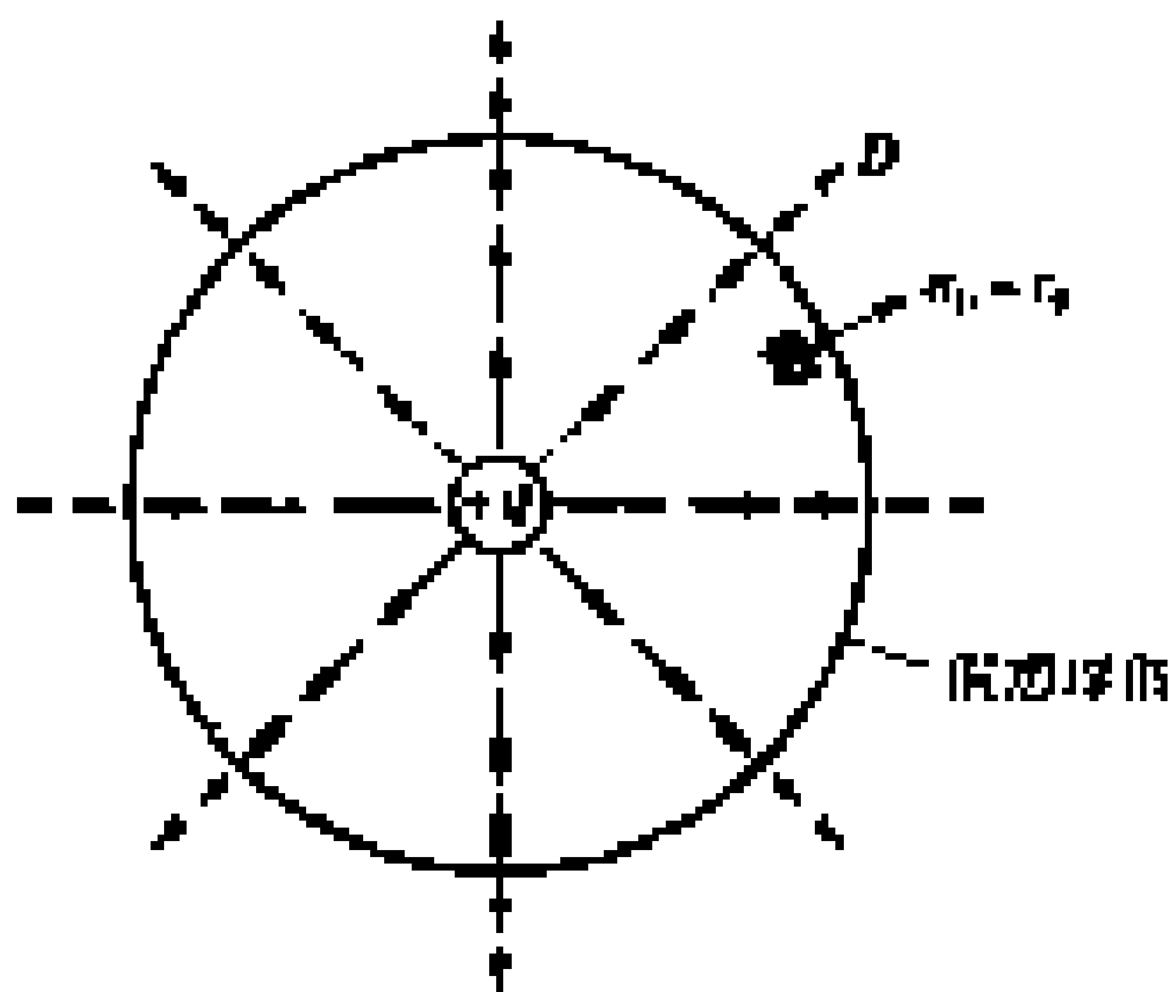


图 3－1　点电荷 q 产生的电通量密度 $\boldsymbol{D}$

$$\Psi_D = \oint_{\text{球面}S}\boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\text{球面}S}\frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{r}_0\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = r^2\mathrm{d}\Omega\boldsymbol{r}_0$，$r$ 为球面的半径，$\mathrm{d}\Omega$ 为球面上面积元 $\mathrm{d}S$ 对球心所张立体角，$\boldsymbol{r}_0$ 为 r 方向的单位矢量，即面积元 $\mathrm{d}S$ 法线方向单位矢量，将 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 代入上式，得到

$$\Psi_D = \oint_{\text{球面}S}\boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{\text{球面}S}\frac{qr^2}{4\pi r^2}\mathrm{d}\Omega\boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{r}_0 = \frac{q}{4\pi}\oint_{\text{球面}S}\mathrm{d}\Omega = q \tag{3.1.6}$$

这就是说穿过球面的电通量等于球心处点电荷 q。

实验证明电荷产生的电场满足叠加原理，即 N 个点电荷产生的场等于每个点电荷产生的场的叠加

$$\boldsymbol{D} = \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{4\pi r_n^2}\boldsymbol{r}_{n0}$$

由此进一步得到穿过任意闭曲面的电通量 $\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 等于该闭曲面包围的总电荷 Q，即

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q$$

如果 ρ_v 为体电荷密度，则总电荷 Q 为闭曲面包围的体积 V 内电荷密度 ρ_v 的体积分 $Q = \int_V \rho_v \mathrm{d}V$，所以上式成为

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho_v \mathrm{d}V \tag{3.1.7}$$

这就是积分形式的高斯定理。

注意库仑定理、高斯定理都是实验规律的总结，两者等价。

3.1.2　磁通连续性原理

迄今为止，对磁现象的研究表明，世界上没有单独的磁极存在，磁力线永远构成闭合回路(见图 3－2)，这就是磁通连续性原理。因为磁力线自成闭合回路，对于任何封闭曲面，穿出闭曲面的磁通量，一定等于穿进闭曲面的磁通量，这就是说穿出或穿进闭曲面的净磁通量等于零，即

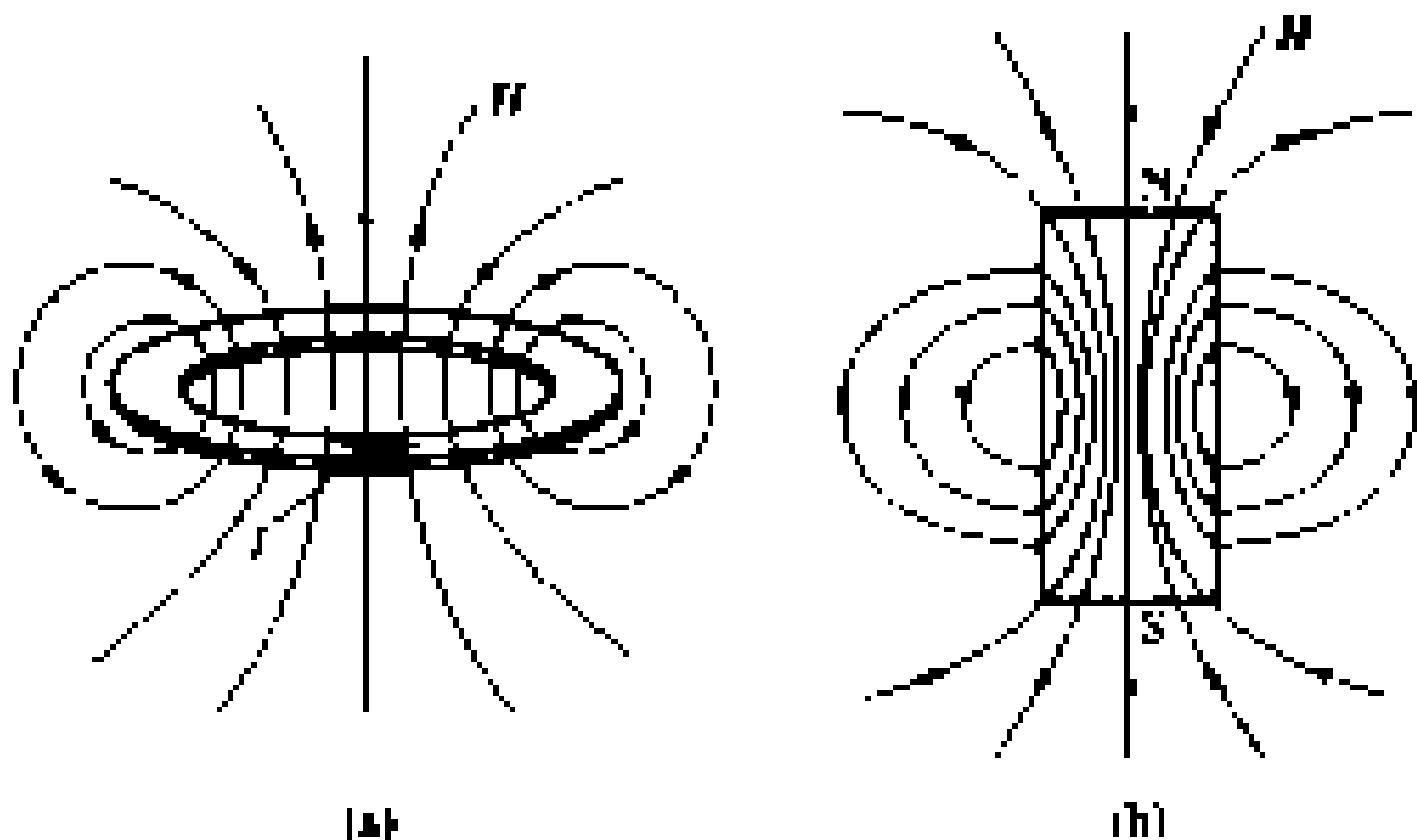


图 3－2　圆环电流(磁偶极子)与永磁棒产生的磁场

(a) 磁偶极子　(b) 永磁棒

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{3.1.8}$$

因此，磁力线与电力线不同，电力线总是从正电荷出发，终止于负电荷，电力线“有头有尾”，而磁力线没有起始，“无头无尾”。

3.1.3　法拉第电磁感应定理

1831 年法拉第发现电磁感应现象，这是人们第一次对随时间变化的电磁场进行研究。法拉第定理表示随时间变化的磁场会产生电场。参看图 3－3，如果穿过闭合导线 l 所包围的面积的磁通量 Ψ_m 随时间变化，则会感应一个电动势 V_{emf}，且

$$V_{emf} = \oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

V_{emf}的大小等于穿过闭合导线 l 所包围面积 S 的磁通量 $\Psi_m = \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 随时间变化率的负数，即

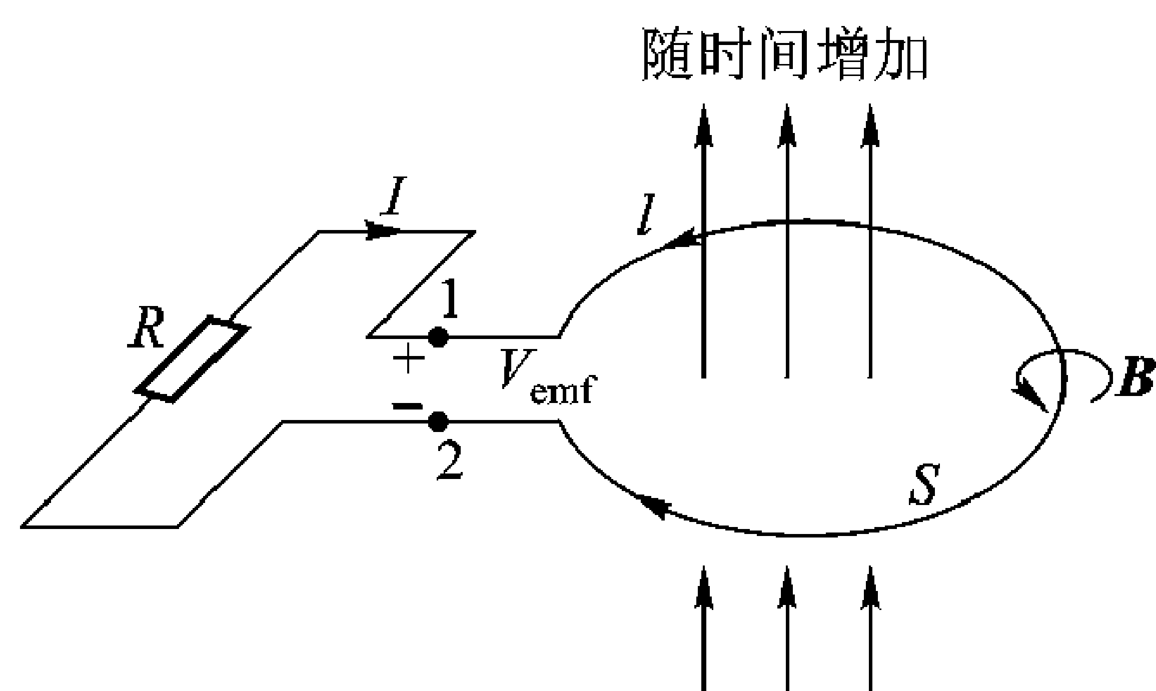


图 3－3　穿过闭合导线 l 的磁通量随时间变化会感应一个电动势

$$V_{emf} = \oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\partial \Psi_m}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

因为微分对时间坐标进行，积分对空间坐标进行，两者次序可调换，这样就得到

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.1.9}$$

这就是积分形式的法拉第定理。图 3－4 用来说明得出法拉第定理的原理实验装置(在大学物理课程中已见过)。矩形导电线圈与一电流计相连，如有电流通过线圈，电流计指针将偏转。螺线管与电池连接，当螺线管与电池接通，流过螺线管的电流会产生磁场，部分磁力线穿过矩形导电线圈包围的面积。不管采用什么方法，比如螺线管与电池的接通或断开，通电螺线管靠近或远离矩形导电线圈等，只要使螺线管产生的磁力线穿过线圈包围面积的磁通量 Ψ_m 随时间变化，电流计指针就会偏转，表示矩形线圈上有电流流

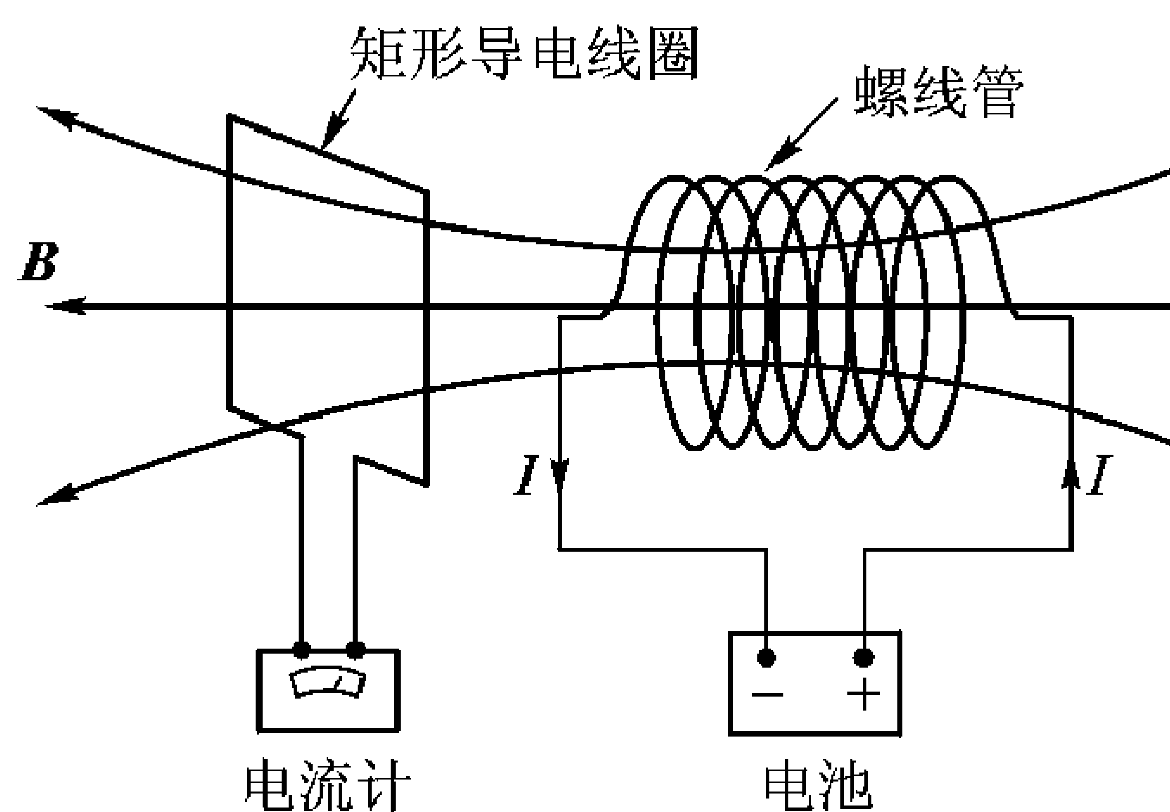


图 3－4　说明法拉第定理的原理实验装置

过。此电流由感应的电动势 V_{emf}驱动，而指针偏转的大小反映电动势的大小。指针偏转的方向，也就是电流的方向取决于感应电动势的符号。实验得出的规律是，感应电动势 V_{emf}大小与穿过线圈磁通量随时间的变化率$\frac{\mathrm{d}\Psi_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}$成正比，而感应电动势驱动的电流方向，使得该电流激发的磁场抵抗螺线管产生的磁场随时间的变化，式(3.1.9)右边的负号就说明这一点。

3.1.4 安培全电流定理

电流流过导体时在其周围产生磁场，如果右手大拇指与电流方向一致，则右手四指方向就是磁场方向，安培全电流定理告诉我们，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿任一闭合回路 l 的线积分等于穿过回路 l 所包围面积的电流 I_{t}，即

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_{\mathrm{t}} = I + I_{\mathrm{d}} \tag{3.1.10}$$

式中 I_{t} 是全电流。右边第一项 I 在导电媒质中称为传导电流I_{c}，它由导体中自由电子的定向运动引起；在气体或真空中叫运流电流 I_{v}，它由真空或气体中荷电粒子的运动引起。所以 I 包括传导电流与运流电流两部分，即

$$I = I_{\mathrm{c}} + I_{\mathrm{v}} \tag{3.1.11}$$

第二项 I_{d} 叫位移电流，它并不代表电荷的运动，因而与传导电流、运流电流不同。传导电流、运流电流和位移电流之和叫全电流。如果引入电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}$、$\boldsymbol{J}_{\mathrm{v}}$ 与 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}$，则 I_{c}、I_{v}与 I_{d} 可表示为

$$I_{\mathrm{c}} = \int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$I_{\mathrm{v}} = \int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{v}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$I_{\mathrm{d}} = \int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

于是式(3.1.10)成为

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.1.12}$$

式中

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{c}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{v}} \tag{3.1.13}$$

$\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}} = \sigma\boldsymbol{E}$，为传导电流密度，其中 σ 为导体的电导率，$\boldsymbol{E}$ 为导体内电场强度。$\boldsymbol{J}_{\mathrm{v}} = \rho_v\boldsymbol{V}$，为真空中或气体中电流密度，其中 ρ_v 和$\boldsymbol{v}$ 分别为真空或气体中荷电粒子的密度和速度。$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}$ 为位移电流密度，它等于

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{3.1.14}$$

$\boldsymbol{D}$ 为电通量密度或电位移。$\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}$ 是麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831—1879 年）在 1873 年首先引入的。为了说明位移电流的概念，参看图 3－5 所示电路，电容器 C 通过导线连到交流电源 V_S（t），设

$$V_S(t) = V_0\cos\omega t$$

显然导线中电流

$$I_{\mathrm{c}} = \int_{S_{\mathrm{c}}} \boldsymbol{J}_{\mathrm{c}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{S_{\mathrm{c}}} \sigma\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

式中 S_{c} 为导线截面，$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的方向为电流流过导线的方向。

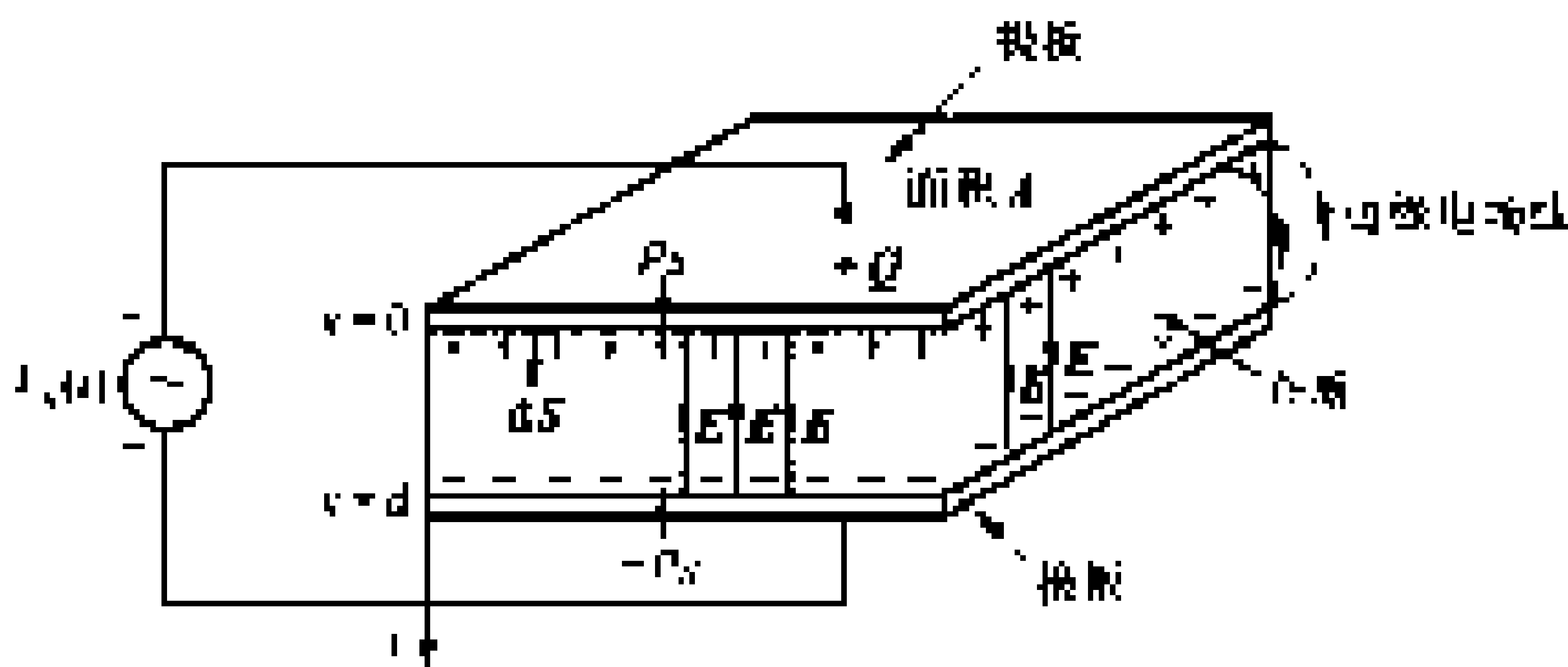


图 3－5　交流电源与平行板电容器相连构成的回路

在电容器极板上有电荷 $Q = CV_S$，C 为电容器的电容量。对于平行板电容器，电容 $C = \frac{\varepsilon A}{d}$，其中 A 为极板面积，d 为两平板间距，ε 为两平行极板间填充介质的介电常数，V_S 为电容器两极板间电压。Q 随时间的变化率即极板上的电流

$$I_{\mathrm{q}} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}V_S}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V_0\cos\omega t) = -CV_0\omega\sin\omega t$$

这里我们假定导线的电导率 σ 很大很大，导线上压降可忽略，极板两端电压等于源电压。由源、导线、电容器构成的电流回路，其上通过的电流应连续，导线中电流要等于极板上电流 I_{q}，那么电容器中电流是什么呢？位移电流的引入可解释回路电流连续的问题。两极板上加电压 V_S 后，在电容器空间产生电场

$$\boldsymbol{E} = \frac{V_S}{d}\boldsymbol{y}_0 = \frac{V_0}{d}\cos\omega t\boldsymbol{y}_0$$

$\boldsymbol{E}$ 的大小为 V_S/d，方向在 $\boldsymbol{y}_0$ 方向，总的位移电流 I_{d} 为

$$I_{\mathrm{d}} = \int_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{d}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_A \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{y}_0\frac{\varepsilon V_0}{d}\cos\omega t\right) \cdot (\boldsymbol{y}_0\mathrm{d}S)$$

$$= -\frac{\varepsilon A}{d}V_0\omega\sin\omega t = -CV_0\omega\sin\omega t$$

因为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 方向为极板法线方向，故 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{y}_0\mathrm{d}S$，$C$ 为平行板电容器电容。这个电流与极板上电流刚好相等。

注意，上面的例题不是给位移电流的正确性进行证明，而是说明位移电流概念解释了由电容器构成的回路中电流的连续性。引入位移电流的正确性是因为引入位移电流概念后得出的结论被其后的实验证明，其中最重要的一点是，麦克斯韦引入位移电流概念后预言了电磁波的存在，其后赫兹在1886～1889年间通过实验证明电磁波的存在。迄今宏观世界观察到的电磁现象没有一个与位移电流的概念相冲突，所以我们说位移电流概念的引入是正确的。

将式(3.1.14)代入式(3.1.12)，安培全电流定理为

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \boldsymbol{t}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.1.15}$$

这就是安培全电流定理的积分形式。

3.1.5 积分与微分形式的麦克斯韦方程组

现在我们把法拉第电磁感应定理、安培全电流定理、高斯定理、磁通连续性原理的积分形式重写如下：

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{t}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.1.16a}$$

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial \boldsymbol{t}}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{3.1.16b}$$

$$\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho_v\mathrm{d}V \tag{3.1.16c}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{3.1.16d}$$

这就是积分形式的麦克斯韦方程组，它们是在实验基础上得出的电磁运动规律的科学概括。

根据矢量场的斯托克斯定理

$$\oint_l \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

麦克斯韦方程中两个旋度方程(3.1.16a，b)可写为

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{E})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{H})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由上两式可得

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3.1.17a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{3.1.17b}$$

同样根据矢量场的散度定理

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\,\mathrm{d}V$$

麦克斯韦方程组中两个散度方程(3.1.16c,d)可写成

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{D}\mathrm{d}V = \int_V \rho_v \mathrm{d}V$$

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{B}\mathrm{d}V = 0$$

由此得到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_v \tag{3.1.17c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.1.17d}$$

式(3.1.17)就是微分形式的麦克斯韦方程组。积分形式的麦克斯韦方程组反映电磁运动在某一局部区域的平均性质。而微分形式的麦克斯韦方程反映场在空间每一点的性质，它是积分形式的麦克斯韦方程当积分域缩小到一个点的极限。以后我们对电磁问题的分析一般都从微分形式的麦克斯韦方程出发。

例 3－1 如果 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0\cos x$，$\boldsymbol{B}$ 随时间变化吗？

解：从式(3.1.17a)得

$$-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

所以，$\boldsymbol{B}$ 不随时间变化。

例 3－2 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$ 区域，磁场 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{x}_0\sin x + \boldsymbol{y}_0 \sin y$ 存在吗？

解：因为 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \cos x + \cos y$，在 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$ 区域，$\cos x + \cos y \neq 0$，即 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} \neq 0$，与麦克斯韦方程(3.1.17d)矛盾。所以在 $0 \leqslant x \leqslant 1$，$0 \leqslant y \leqslant 1$ 区域 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{x}_0\sin x + \boldsymbol{y}_0\sin y$ 的磁场不存在。

例 3－3 如果 $\boldsymbol{D} = \cos x \sinh y\boldsymbol{x}_0 + \sin x\cosh y\boldsymbol{y}_0$，求区域内电荷密度 ρ_v。

解：根据式(3.1.17c)

$$\rho_v = \nabla \cdot \boldsymbol{D} = -\sin x\sinh y + \sin x\sinh y = 0$$

区域内电荷密度 $\rho_v = 0$，场可以由包围区域的界面上的面电荷产生。体电荷密度 ρ_v 不包括面电荷密度 ρ_s。

麦克斯韦方程组中式(3.1.16a)或式(3.1.17a)表示变化的磁场产生电场，而式(3.1.16b)或式(3.1.17b)表示变化的电场产生磁场。

麦克斯韦方程组中式(3.1.16d)或式(3.1.17d)表示磁通的连续性，即磁力

线既没有起始点也没有终点。这意味着空间不存在自由磁荷，或者说在人类研究所能达到的空间区域中至今还没有发现单独的磁荷存在。式(3.1.16c)或式(3.1.17c)对时变电荷与静止电荷都成立，它表明电场是有源的。

时变场中电场的散度和旋度都不为零，所以电力线起始于正电荷而终止于负电荷。磁场的散度恒为零，而旋度不为零，所以磁力线是与电流交链的闭合曲线，并且磁力线与电力线两者还互相交链。在远离场源的无源区域中，电场和磁场的散度都为零，这时磁力线和电力线将自行闭合，相互交链，在空间形成电磁波，在下章将专门讨论。

3.2　复矢量与时谐场的麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程包含的4个电磁场量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 以及场源 $\boldsymbol{J}$ 和 ρ_v 都是时间和空间的函数。如果这些量对时间作简谐变化，就称为时谐变量。其中场源 ρ_v 是标量，其余均是矢量。第1章已讨论过，引入复数表示后，对时谐标量微分、积分的运算简化为乘、除 $\mathrm{j}\omega$ 的代数运算，而乘积项时间平均值的计算也简化为取实部运算。下面将证明对于时谐矢量用复矢量表示后，也会为时谐矢量微分、积分以及乘积项时间平均值的计算带来极大方便。

3.2.1　时谐矢量的复矢量表示与时谐场的麦克斯韦方程组

设随时间作简谐变化的电场强度 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$ 为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\boldsymbol{x}_0E_x(x,y,z,t)+\boldsymbol{y}_0E_y(x,y,z,t)+\boldsymbol{z}_0E_z(x,y,z,t) \tag{3.2.1}$$

其 x 分量 $E_x(x,\ y,\ z,\ t)$ 表示为

$$E_x(x,y,z,t)=E_1(x,y,z)\cos(\omega t+\varphi_1) \tag{3.2.2a}$$

这是一个时谐标量，与其对应的复数表示是

$$E_x(x,y,z)=E_1(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} \tag{3.2.2b}$$

于是

$$E_x(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[E_x(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \tag{3.2.2c}$$

所以时谐标量 $E_x(x,y,z,t)$ 与复数 $E_x(x,y,z)$ 对应。

同样 $E_y(x,y,z,t)=E_2(x,y,z)\cos(\omega t+\varphi_2)$ 可表示成

$$E_y(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[E_y(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \tag{3.2.3a}$$

式中

$$E_y(x,y,z)=E_2(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} \tag{3.2.3b}$$

$E_z(x,y,z,t)=E_3(x,y,z)\cos(\omega t+\varphi_3)$ 可表示成

$$E_z(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\left[E_z(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] \tag{3.2.4a}$$

式中

$$E_z(x,y,z)=E_3(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_3} \tag{3.2.4b}$$

根据式(3.2.2c)、(3.2.3a)、(3.2.4a)，$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$可表示成

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}\{[\boldsymbol{x}_0E_x(x,y,z)+\boldsymbol{y}_0E_y(x,y,z)+\boldsymbol{z}_0E_z(x,y,z)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\}$$

定义复矢量 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\boldsymbol{x}_0E_x(x,y,z)+\boldsymbol{y}_0E_y(x,y,z)+\boldsymbol{z}_0E_z(x,y,z) \tag{3.2.5a}$$

则

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{3.2.5b}$$

所以引入复矢量 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$后，时谐电场矢量 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$与复矢量 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$对应。

同样，时谐磁通量密度矢量 $\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$与磁通量密度复矢量 $\boldsymbol{B}(x,y,z)$对应

$$\boldsymbol{B}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{3.2.6}$$

对于电通量密度 $\boldsymbol{D}$、磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 也有

$$\boldsymbol{D}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{D}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{3.2.7}$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{3.2.8}$$

与时谐电磁场量 $\boldsymbol{E}(x,y,z,t)$、$\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$、$\boldsymbol{D}(x,y,z,t)$以及 $\boldsymbol{H}(x,y,z,t)$对应的复矢量 $\boldsymbol{E}(x,y,z)$、$\boldsymbol{B}(x,y,z)$、$\boldsymbol{D}(x,y,z)$以及 $\boldsymbol{H}(x,y,z)$不是时间 t 的函数，它们是复数，又有方向。

根据复矢量的定义，对时谐矢量$\partial/\partial t$ 的运算与对应的复矢量乘以 $\mathrm{j}\omega$ 等效，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x,y,z,t)=\mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \tag{3.2.9a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x,y,z,t)\longleftrightarrow\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z) \tag{3.2.9b}$$

所以引入 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 的复矢量后，麦克斯韦方程(3.1.17a)

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}(x,y,z,t)$$

可写为

$$\nabla\times\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=-\mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

因为算符∇只对空间求导数，所以∇运算与取实部运算 Re 可调换次序，即

$$\mathrm{Re}[\nabla\times\boldsymbol{E}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}[-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

所以时谐电磁场量用复矢量表示时，麦克斯韦方程(3.1.17a)表示为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(x,y,z)=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}(x,y,z) \tag{3.2.10}$$

同理，麦克斯韦方程(3.1.17b,c,d)可表示为

$$\nabla \times \boldsymbol{H}(x,y,z) = \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D}(x,y,z) + \boldsymbol{J}(x,y,z) \tag{3.2.11}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D}(x,y,z) = \rho_v(x,y,z) \tag{3.2.12}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(x,y,z) = 0 \tag{3.2.13}$$

式中 $\rho_v(x,y,z)$、$\boldsymbol{J}(x,y,z)$的定义是

$$\rho_v(x,y,z,t) = \mathrm{Re}[\rho_v(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

$$\boldsymbol{J}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{J}(x,y,z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

方程(3.2.10) ~ (3.2.13)就是时谐场的麦克斯韦方程。本课程主要研究简谐变化的电磁场，式(3.2.10) ~ (3.2.13)就是本书以后分析电磁场的基本方程。因为任何周期场可用傅里叶级数展开为基波及各次谐波的叠加，非周期场也可用傅里叶积分展开，所以对谐变电磁场的分析并不失其一般性。

现在我们把积分形式的麦克斯韦方程、微分形式的麦克斯韦方程以及用复矢量表示的时谐场的麦克斯韦方程列于表 3 - 1，以便查阅。

表 3 - 1 麦克斯韦方程

	微 分 形 式	积 分 形 式	时谐场的复矢量形式
法拉第定理	$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega \boldsymbol{B}$
安培定理	$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	$\oint_l \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \left(\boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega \boldsymbol{D}$
高斯定理	$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_v$	$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho_v \mathrm{d}V$	$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_v$
磁通连续性原理	$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$

例 3 - 4 已知复矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{x}_0 \mathrm{j}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \boldsymbol{y}_0(1+\mathrm{j})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} + \boldsymbol{z}_0(3-\mathrm{j}4)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$，求与之对应的时谐矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$。

解：将复矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$的 3 个分量(它们是复数)用模与相角的形式表示

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{x}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\pi/2)} + \boldsymbol{y}_0\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\pi/4)} + \boldsymbol{z}_0 5\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz+0.93)}$$

所以

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{x}_0\cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right) + \boldsymbol{y}_0\sqrt{2}\cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{4}\right) + \boldsymbol{z}_0 5\cos(\omega t - kz - 0.93)$$

例 3 - 5 已知复矢量 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{y}_0 E_y = \boldsymbol{y}_0 E_{y0}\sin\dfrac{\pi}{a}x\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$，求复矢量 $\boldsymbol{B}$。

解：根据式(3.2.10)

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{\mathrm{j}\omega} = -\frac{\nabla\times(\boldsymbol{y}_0 E_y)}{\mathrm{j}\omega} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\left(-\boldsymbol{x}_0\frac{\partial E_y}{\partial z}+\boldsymbol{z}_0\frac{\partial E_y}{\partial x}\right)$$

$$= -\boldsymbol{x}_0\frac{k_z}{\omega}E_{y0}\sin\frac{\pi}{a}x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}+\boldsymbol{z}_0\mathrm{j}\frac{\pi/a}{\omega}E_{y0}\cos\frac{\pi}{a}x\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$$

这里要再次强调一下，微分形式的麦克斯韦方程与积分形式的麦克斯韦方程中有关场量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$等都是时间坐标与空间坐标的函数，而复矢量形式的麦克斯韦方程中有关场量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$等只是空间坐标的函数，复矢量形式的场量乘上 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$取实部才是微分形式、积分形式麦克斯韦方程中的场量。

3.2.2 两时谐矢量叉积时间平均值的计算

时谐矢量用复矢量表示后，两时谐矢量叉积的时间平均值计算也可简化为取实部运算。设复矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_\mathrm{r}+\mathrm{j}\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{H}_\mathrm{r}+\mathrm{j}\boldsymbol{H}_\mathrm{i}$，$\boldsymbol{E}_\mathrm{r}$，$\boldsymbol{H}_\mathrm{r}$ 为复矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$的实部，$\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$，$\boldsymbol{H}_\mathrm{i}$ 为其虚部，与复矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$对应的时谐矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$，$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\boldsymbol{E}_\mathrm{r}\cos\omega t-\boldsymbol{E}_\mathrm{i}\sin\omega t$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\boldsymbol{H}_\mathrm{r}\cos\omega t-\boldsymbol{H}_\mathrm{i}\sin\omega t$$

所以 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$的时间平均值是

$$\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_\mathrm{r}\times\boldsymbol{H}_\mathrm{r}+\boldsymbol{E}_\mathrm{i}\times\boldsymbol{H}_\mathrm{i})$$

如果我们取复矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$与 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$的共轭复矢量 $\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$的叉积

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}_\mathrm{r}\times\boldsymbol{H}_\mathrm{r}+\boldsymbol{E}_\mathrm{i}\times\boldsymbol{H}_\mathrm{i}+\mathrm{j}(\boldsymbol{E}_\mathrm{i}\times\boldsymbol{H}_\mathrm{r}-\boldsymbol{E}_\mathrm{r}\times\boldsymbol{H}_\mathrm{i})$$

因此 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$的时间平均值又可表示为

$$\langle\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\right] \tag{3.2.14}$$

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$叫做瞬时坡印廷矢量，而 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$叫做复数坡印廷矢量，将在第 3.6 节专门讨论。

本书以后对交变场的研究主要针对随时间作简谐变化的场，主要从复矢量形式的麦克斯韦方程研究电磁运动的特性，为简化书写，复矢量形式的电磁场量$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$等没有采用特殊符号以跟与时间有关场量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$等区分，请读者留意。如果场量与时间坐标有关，一般将标明 $\boldsymbol{E}(t)$、$\boldsymbol{H}(t)$等，不会引起混淆。

3.3 电流连续性原理

麦克斯韦方程包含的内容极其丰富。下面将证明麦克斯韦方程包含电流连

续性原理。用算符∇点乘式(3.1.17b)两边，并利用矢量运算恒等关系$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})=0$$

而根据式(3.1.17c)，$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_v$，所以上式成为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial\rho_v}{\partial t}=0$$

这是关于电流和电荷的连续方程。如果把上式左边第二项移到等式右边，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}\tag{3.3.1}$$

则式(3.3.1)的物理意义就是流出体积元的电流等于体积元内电荷随时间的减少率。显然，这是电荷守恒原理所要求的。所以式(3.3.1)也是电荷守恒原理的数学表达式。

$\boldsymbol{J}(x,y,z,t)$和$\rho_v(x,y,z,t)$随时间作简谐变化时，引入与$\boldsymbol{J}(x,y,z,t)$对应的复矢量$\boldsymbol{J}(x,y,z)$以及与$\rho_v(x,y,z,t)$对应的复数$\rho_v(x,y,z)$，则式(3.3.1)成为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}(x,y,z)=-\mathrm{j}\omega\rho_v(x,y,z)\tag{3.3.2}$$

式(3.3.2)表示时谐场的电流连续性原理。

3.4　物质的本构关系

在我们用式(3.1.17)所示的麦克斯韦方程组求解具体电磁问题之前，有一个问题要弄清楚，麦克斯韦方程组中有几个是独立的？为此对式(3.1.17a)取散度，因为旋度的散度等于零，故得到

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla\cdot\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$$

这就是说$\nabla\cdot\boldsymbol{B}$为一与时间无关的常数，而式(3.1.17d)告诉我们这个常数就是零。所以式(3.1.17d)包含在式(3.1.17a)中。

在 3.3 节对式(3.1.17b)取散度已得到

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla\cdot\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)=\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{D})=0$$

如果把电荷与电流的连续方程(3.3.1)作为一个基本方程，那么将上式与式(3.3.1)比较便得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_v$$

所以$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_v$也不是一个独立的方程。归纳起来麦克斯韦方程组中两个散度方程(3.1.17c，d)包含在两个旋度方程(3.1.17a，b)以及电流与电荷的连续方程

(3.3.1)中。所以如果把电流与电荷的连续方程作为基本方程，麦克斯韦方程组中只有两个旋度方程是独立的。两个独立的旋度方程(3.1.17a,b)以及电流与电荷的连续方程(3.3.1)共包含 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{J}$ 5 个矢量和一个标量 ρ，每个矢量又有 3 个分量，所以这 3 个独立的方程共有 16 个独立的标量场分量，而这 3 个独立的方程总共只包含 7 个独立的标量方程，所以仅从麦克斯韦方程以及电流与电荷的连续方程出发还不足以解出 16 个独立的标量场分量。我们还需要另外 9 个标量场方程，这就是第 1 章提到的由介质特性决定的 3 个方程

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{3.4.1}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{3.4.2}$$

$$\boldsymbol{J}_c=\sigma\boldsymbol{E} \tag{3.4.3}$$

式(3.4.1)、(3.4.2)将 $\boldsymbol{D}$ 跟 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 跟 $\boldsymbol{H}$ 联系起来，式(3.4.1)反映介质在电场作用下发生极化，而式(3.4.2)反映介质在磁场作用下发生磁化。其中 ε 叫介质介电常数，μ 叫介质的磁导率。引入相对介电常数 ε_r、相对磁导率 μ_r 后，ε、μ 可表示为

$$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$$

$$\mu=\mu_r\mu_0$$

$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$ F/m，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ H/m 分别叫做真空或自由空间介电常数与磁导率。

式(3.4.3)将导体中电流密度 $\boldsymbol{J}_c$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 联系起来。式中 σ 是导体的电导率，单位是 S/m。

方程(3.4.1)~(3.4.3)叫做物质的本构关系，每个方程可分解为 3 个标量方程，共有 9 个标量方程。它们作为辅助方程与麦克斯韦方程组一起构成一组自洽的方程。

如果媒质在电场作用下既发生极化又发生磁化，同样在磁场作用下既发生磁化又发生极化。这种媒质称为磁电媒质，其本构关系为

$$\boldsymbol{D}=\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{E}+\bar{\bar{\xi}}\cdot\boldsymbol{H} \tag{3.4.4}$$

$$\boldsymbol{B}=\bar{\bar{\zeta}}\cdot\boldsymbol{E}+\bar{\bar{\mu}}\cdot\boldsymbol{H} \tag{3.4.5}$$

这种媒质是双各向异性的，各向异性媒质在第 9 章会深入讨论。式中 $\bar{\bar{\varepsilon}}$，$\bar{\bar{\xi}}$，$\bar{\bar{\zeta}}$，$\bar{\bar{\mu}}$ 都是以并矢表示的张量。

若以上 4 个量都是标量，它仍然具有磁电交叉耦合，则成为双各向同性的，其本构关系为

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}+\xi\boldsymbol{H} \tag{3.4.6}$$

$$\boldsymbol{B}=\zeta\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{H} \tag{3.4.7}$$

对于氨基酸、DNA这类物质，本构关系为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} - \chi \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{3.4.8}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} + \chi \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{3.4.9}$$

具有这种本构关系的介质称为手征介质。

ε、μ、σ 等完全由电磁场所在空间的介质的特性决定，不同的介质，ε、μ、σ 就不一样。自由空间、水、等离子体等都是电磁场所存在空间的介质，它们各自的特性不同，ε、μ、σ 也就不等，所以电磁场所存在空间的介质可以按 ε、μ、σ 进行分类。

如果 ε、μ、σ 与空间坐标无关，就是均匀介质，否则就是不均匀介质。ε、μ 与频率无关的叫非色散介质，否则就是色散介质。如果 ε、μ、σ 与电磁波在空间传播的方向性无关，叫做各向同性介质，否则就是各向异性介质。

本构方程为线性关系所表示的介质称为线性介质。线性介质中 ε、μ、σ 不是电场 $\boldsymbol{E}$ 或磁场 $\boldsymbol{H}$ 的函数。在非线性介质中，电极化强度 $\boldsymbol{P}$、磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 不再是线性关系

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 (\chi_e^{(1)} E + \chi_e^{(2)} E^2 + \chi_e^{(3)} E^3 + \cdots) \tag{3.4.10}$$

$$\boldsymbol{M} = \chi_m^{(1)} H + \chi_m^{(2)} H^2 + \chi_m^{(3)} H^3 + \cdots \tag{3.4.11}$$

因此 ε、μ 不再是常量而跟 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 幅度有关。$\chi_e^{(1)}$，$\chi_e^{(2)}$，$\chi_e^{(3)}$ 和 $\chi_m^{(1)}$，$\chi_m^{(2)}$，$\chi_m^{(3)}$ 等分别叫做介质的一次、二次、三次电极化率和磁化率。

根据物质结构的经典电子理论，ε、μ 为频率的函数，在高频电场作用下，$\boldsymbol{D}$ 滞后于合成电场强度 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$ 滞后于合成磁场强度 $\boldsymbol{H}$。ε、μ 为复数

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) - \mathrm{j}\varepsilon''(\omega) \tag{3.4.12}$$

$$\mu(\omega) = \mu'(\omega) - \mathrm{j}\mu''(\omega) \tag{3.4.13}$$

$\varepsilon'(\omega)$是复介电常数的实部，它与频率函数的关系确定电磁波在介质中传播的色散特性；$\varepsilon''(\omega)$为复介电常数的虚部，由它确定电磁波在介质中的损耗。对于复磁导率 $\mu(\omega)$的实部 $\mu'(\omega)$和虚部 $\mu''(\omega)$也可作类似的解释。一种具有电子极化、离子极化和偶极子极化三种机构的假想介质的 ε'和ε''与频率关系如图3-6所示。这个图着重示出了这三种极化机构所影响的频率范围。

在技术科学中通常用介质损耗角 δ_e 来表示介电损耗。δ_e 定义为

$$\delta_e = \arctan \varepsilon''/\varepsilon' \tag{3.4.14}$$

由于实际上对于一般介质，总有 $\varepsilon''/|\varepsilon'| << 1$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D} &= (\varepsilon' - \mathrm{j}\varepsilon'')\boldsymbol{E} \\ &= \varepsilon'(1 - \mathrm{j}\varepsilon''/\varepsilon')\boldsymbol{E} \\ &\approx \varepsilon' \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta_e}\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

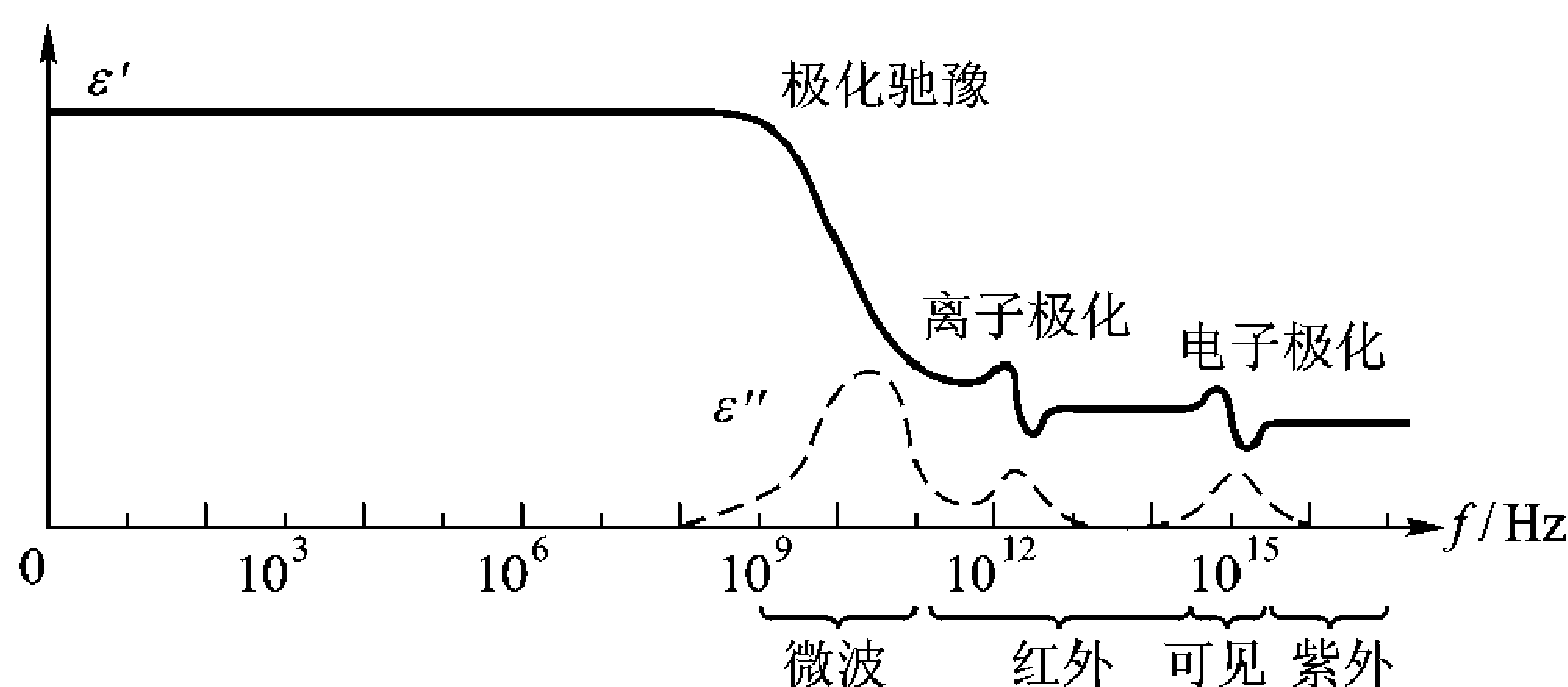


图 3－6　典型介质的 ε' 和 ε'' 与频率关系

此式表明介质损耗角 δ_e 实际上表示电介质中电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 之间的相位差。

关于金属材料的介电常数，对于微波及其以下频率的电磁波，$\varepsilon''/|\varepsilon'| >> 1$，介电常数虚部是主要的，这时金属呈现导电性，电磁波在金属中强烈衰减。对于紫外线或更短波长的电磁波，$\varepsilon' \approx 1$，$\varepsilon'' << 1$，金属呈现电介质特性，对于电磁波近乎透明。

介电常数实部和虚部之间有内在关系，这是克莱末－克郎宁关系

$$\varepsilon'_r(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega'\varepsilon''_r(\omega)}{\omega'^2 - \omega^2}\mathrm{d}\omega' \tag{3.4.15}$$

$$\varepsilon''_r(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varepsilon'_r(\omega) - 1}{\omega'^2 - \omega^2}\mathrm{d}\omega' \tag{3.4.16}$$

式中 ω' 为复频率，ω 为 ω' 的某一实正值。克莱末－克郎宁关系指出，色散介质（ε_r 与频率有关）一定有损耗，而损耗介质（$\varepsilon'' \neq 0$）一定有色散。

导出克莱末－克郎宁关系时所依据的原则是十分基本的。除因果律外，仅要求系统是线性的，因此克莱末－克郎宁关系具有普遍性。其他线性系统的复响应函数实部和虚部之间也有类似关系。

线性、均匀、各向同性、无色散的介质，通常叫做简单介质。σ 很大的介质称为导体，σ 很小的叫做绝缘体。σ 为无穷大的介质称为完纯导体，而 $\sigma = 0$ 的介质叫完纯介质。良导体的介电常数很难测量，其相对介电常数的实部通常视作 1。对于一般介质，$\varepsilon_r > 1$。在等离子体中 ε_r 可以小于 1，甚至为负。对于大多数线性介质，其磁导率与真空磁导率非常接近，μ_r 一般可视作 1。对于铁磁介质，$\mu_r >> 1$，通常是非线性的。

用麦克斯韦方程求解电磁问题时，首先要把场所在空间的介质特性描述出来。ε、μ、σ 是描述介质特性的量。这就是说，只有在所研究空间 ε、μ、σ 的具体表达式知道后，才能对麦克斯韦方程求解。所以，对于两无限大平行导电板[图 3－7（a）]空间电磁场问题的求解，首先要对所研究空间（$y = 0$ 到 $y =$

d 两平行板之间的空间）填充的介质特性进行具体描述。在图 3－7 所示情况下介电系数 ε 是 y 的函数，并表示为

$$\varepsilon(y)=\begin{cases}\varepsilon_1 & (0\leqslant y<d_1)\\ \varepsilon_2 & (d_1<y\leqslant d)\end{cases} \tag{3.4.17a}$$

其图解示于图 3－7（b）。

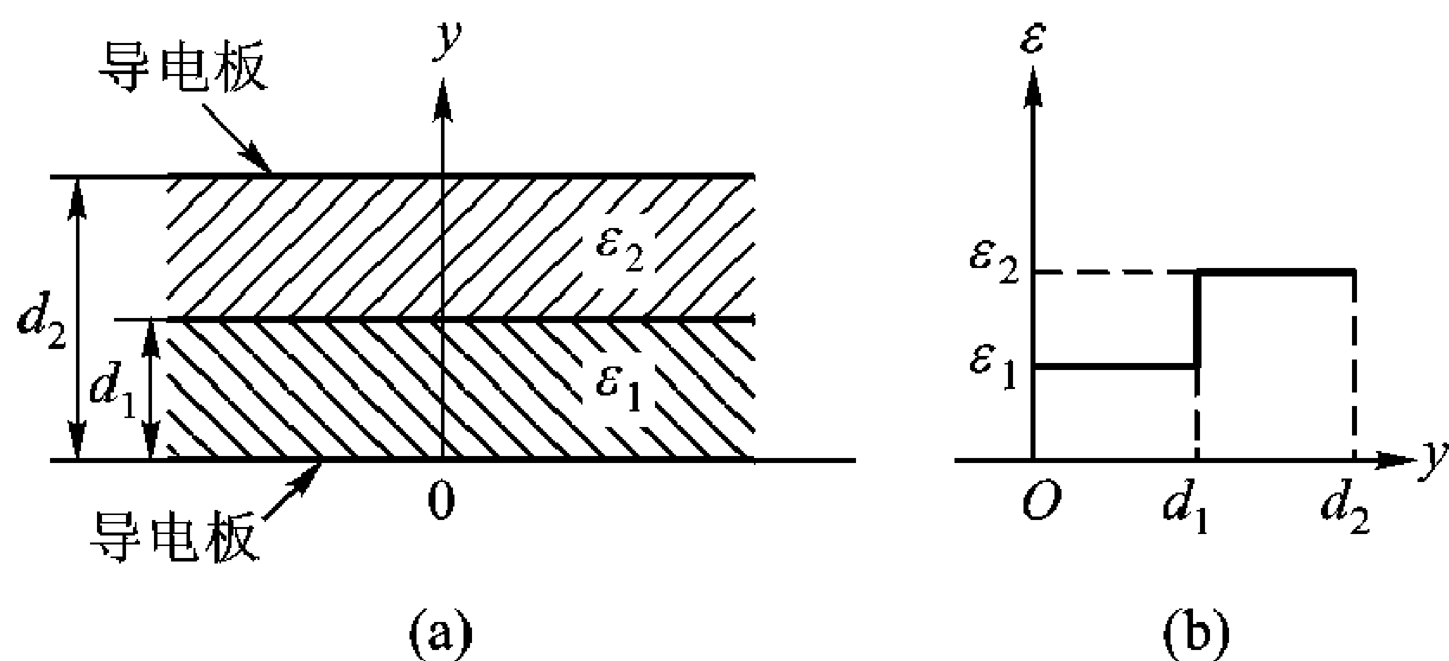


图 3－7　层状介质填充的平行导电板系统

（a）两层状介质填充的平行导电板系统　（b）导电板间介质介电系数分布

如果假定介质 1、2 是绝缘介质，不导电，其磁导率 μ_1、μ_2 近似为 μ_0，则得到

$$\mu_1=\mu_2=\mu_0 \tag{3.4.17b}$$

$$\sigma_1=\sigma_2=0 \tag{3.4.17c}$$

式（3.4.17）就是对我们所研究空间介质特性的具体描述。从麦克斯韦方程以及辅助方程（3.4.17），并在给定的边值条件下，就能得出图 3－7 所示系统场问题的解。因此我们对电磁问题的研究，一定要学会如何用 ε、μ、σ 描述介质的特性。

3.5　洛伦兹力

3.5.1　洛伦兹力方程

带电量 q、速度为 v 的质点在电磁场中受到的力为洛伦兹力方程所描述

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \tag{3.5.1}$$

力 F 的单位是牛顿（N），电量 q 的单位是库仑（C）。

洛伦兹力中第一项 $q\boldsymbol{E}$ 是电场力。如果把点电荷 q_1 作用于点电荷 q_2 的库仑力 F_e 理解为点电荷 q_1 产生的电场 $E=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon r^2}$ 对点电荷 q_2 的作用，那么洛伦兹力第一项反映的就是库仑力，它是带电体相互间作用规律的实验总结。第二

项磁场力也是实验规律的总结。实验得出通电导线在磁场中受力 $F_m = Id\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}$，$I$ 为导线上流过的电流，$d\boldsymbol{l}$ 的方向为导线上电流方向。如果电流 I 只是电荷 q 运动引起的，即 $Id\boldsymbol{l} = q\boldsymbol{v}$，此时 $F_m = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$。磁场力 $\boldsymbol{F}_m$ 正比于 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的叉积。静止电荷 $v = 0$，所以磁场对静止电荷不起作用。对运动电荷也仅当其速度 $\boldsymbol{v}$ 有与 $\boldsymbol{B}$ 垂直的分量时，$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \neq 0$，磁场才对运动电荷起作用。磁场对运动电荷的作用力总是与运动电荷的速度 v 垂直，所以磁场力总是使荷电质点运动轨迹弯转。

洛伦兹力方程将电磁学与力学联系起来。因为物质是由原子构成的，而原子由带负电的电子与带正电的核组成。所以洛伦兹方程描述了电磁场对构成物质的基本单元——电子和核（它们都可看成荷电质点）的作用，而物质对电磁场的作用则由麦克斯韦方程和物质的本构关系反映出来。

本书较少涉及洛伦兹力方程，当研究场与电荷相互作用时，洛伦兹力方程是必不可少的。下面我们用洛伦兹力方程推导等离子体的本构关系。

3.5.2 等离子体

等离子体是电离了的气体，含有大量带正电的离子和带负电的电子，与束缚在原子中的带负电的电子和带正电的核不同，等离子体中的电子和离子可以自由运动。离开地面 80 ~ 120 km 高空的电离层就是一个等离子体，电离层是由太阳辐射来的紫外光电离高空大气而形成的。

如果电场作用于等离子体，等离子体中的电子和离子将受电场力作用而运动。因为电子质量比离子质量小得多，离子的运动可忽略。对于时谐场，电子受到的力，按洛伦兹力方程为

$$\boldsymbol{F} = -e\boldsymbol{E} \tag{3.5.2}$$

式中 $e = 1.6 \times 10^{-19}$库，假定 $\boldsymbol{x}$ 为电子离开正离子的位移，按牛顿第二定律

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -m\omega^2\boldsymbol{x} \tag{3.5.3}$$

式中 $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg，为电子质量。ω 为时谐电场 $\boldsymbol{E}$ 的角频率。根据偶极子定义，偶极矩密度 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P} = -Ne\boldsymbol{x} \tag{3.5.4}$$

式中 N 为等离子体中单位体积内的电子数。将式(3.5.3)的 $\boldsymbol{x}$ 代入式(3.5.4)、再利用式(3.5.2)得到

$$\boldsymbol{P} = \frac{-Ne^2}{m\omega^2}\boldsymbol{E} \tag{3.5.5}$$

后面将证明，任何介质中 $\boldsymbol{D}$ 由自由空间部分 $\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 与介质极化产生的电偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 两部分构成。等离子体也是一种介质，所以等离子体中 $\boldsymbol{D}$ 也由自由空

间部分 $\varepsilon_0\boldsymbol{E}$ 与等离子体部分 $\boldsymbol{P}$ 构成，即

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}-\frac{Ne^2}{m\omega^2}\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\boldsymbol{E} \tag{3.5.6}$$

式中

$$\omega_p=\sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}} \tag{3.5.7}$$

叫做等离子体频率。所以等离子体可用一介电常数为

$$\varepsilon=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \tag{3.5.8}$$

的介质等效。

电离层中电子浓度随电离层离开地面的高度以及昼夜时间而变化。白天的典型值为 10^{12}电子/m^3，相应的 $\omega_p=5.64\times10^7$ rad/s，或 $f_p=9$ MHz。因此，如果电磁场的频率 $f\gg f_p$，电离层与自由空间无多大差别。但是对于较低频率的电磁场，ε 可以为负。第4章我们将对 ε 为负的介质进行讨论。

3.6　坡印廷定理

电场 $\boldsymbol{E}$ 的量纲是 V/m，磁场 $\boldsymbol{H}$ 的量纲是 A/m，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 乘积的量纲是 W/m^2，与功率流密度的量纲相同。所以 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 的乘积与电磁功率流有关。两矢量的乘积有点积和叉积，因为点积是标量，而功率流是矢量，所以我们定义一个矢量 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$，它是 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$与 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$的叉积，即

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.6.1}$$

矢量 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$是否表示电磁功率流尚需进一步分析。电磁运动服从麦克斯韦方程，关于电磁功率流的分析还得从麦克斯韦方程组出发。为此用 $\boldsymbol{E}$ 点乘式(3.1.17b)、$\boldsymbol{H}$ 点乘式(3.1.17a)，得到

$$\boldsymbol{H}(t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}(t)=-\mu\boldsymbol{H}(t)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{H}(t)}{\partial t} \tag{3.6.2}$$

$$\boldsymbol{E}(t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{J}(t)+\varepsilon\boldsymbol{E}(t)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}(t)}{\partial t} \tag{3.6.3}$$

这里我们利用了本构关系 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$。两式相减并利用恒等关系

$$\nabla\cdot[\boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}(t)]=\boldsymbol{H}(t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{E}(t)-\boldsymbol{E}(t)\cdot\nabla\times\boldsymbol{H}(t)$$

得到

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{S}(t)&=\nabla\cdot[\boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}(t)]\\&=-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}(t)\cdot\boldsymbol{H}(t)\right]-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)\right]-\boldsymbol{J}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

对上式两边在域 V 内作体积分并利用散度定理式(1.6.32)得到

$$\begin{aligned}\oint_S \boldsymbol{S}(t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_V [\nabla\cdot \boldsymbol{S}(t)]\mathrm{d}V\\ &= -\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left[\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}(t)\cdot\boldsymbol{H}(t)\right]\mathrm{d}V-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left[\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)\right]\mathrm{d}V\\ &\quad -\int_V[\boldsymbol{J}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)]\mathrm{d}V\end{aligned}\tag{3.6.5}$$

$\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}(t)\cdot\boldsymbol{H}(t)$，$\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)$具有单位体积能量的量纲。以后将证明，$\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}(t)\cdot\boldsymbol{H}(t)$表示单位体积中瞬时储存的磁场能，而$\frac{\varepsilon}{2}\boldsymbol{E}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)$表示单位体积中瞬时储存的电场能。根据电路原理 $\boldsymbol{J}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)$表示单位体积中的功率损耗，而 $-\boldsymbol{J}(t)\cdot\boldsymbol{E}(t)$表示源提供的功率。所以式(3.6.5)的右边表示体积 V 内源提供的功率以及 V 内储存能量随时间的减少率。根据能量守恒关系，它应当等于从体积 V 流出的功率。所以式(3.6.5)左边 $\oint_S \boldsymbol{S}(t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 就表示从 V 流出的电磁功率，而 $\boldsymbol{S}(t)$就表示电磁功率流。式(3.6.4)或(3.6.5)表示的电磁能流关系叫做坡印廷定理，而矢量 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r},t)$叫做瞬时坡印廷功率流。

对于时谐场，定义复数坡印廷功率流 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$，它是复矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$与 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$的共轭复矢量 $\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$的叉积

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})\tag{3.6.6}$$

记住，式(3.6.6)定义的复数坡印廷矢量不是时间 t 的函数。通过复数坡印廷功率流 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})$求瞬态坡印廷功率流 $\boldsymbol{S}(t)$的时间平均值$\langle\boldsymbol{S}(t)\rangle$极为方便：

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{S}(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{E}(x,y,z,t)\times\boldsymbol{H}(x,y,z,t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{E}(x,y,z,t)\times\boldsymbol{H}(x,y,z,t)\,\mathrm{d}(\omega t)\\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})]\end{aligned}\tag{3.6.7}$$

因此时间平均坡印廷功率流$\langle\boldsymbol{S}(t)\rangle$的计算可简化为取复数坡印廷功率流 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$实部的运算。注意本书瞬态坡印廷功率流与复数坡印廷功率流虽然用了相同的符号 $\boldsymbol{S}$，但瞬态坡印廷功率流都标明是 t 的函数，即 $\boldsymbol{S}(t)$，不会引起混淆。

复数坡印廷功率流的物理意义也可从复矢量形式的麦克斯韦方程得出，将 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 代入式(3.2.10)、(3.2.11)，得

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\tag{3.6.8}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{J}\tag{3.6.9}$$

式中 ε、μ 可以为复数，也可能与空间坐标有关，有

$$\varepsilon = \varepsilon' - \mathrm{j}\varepsilon''$$
$$\mu = \mu' - \mathrm{j}\mu''$$

以 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$的共轭复数 $\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$点乘式(3.6.8)，再用 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$点乘式(3.6.9)的复共轭，相减，如果媒质中只有传导电流，即 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_c(\boldsymbol{r}) = \sigma\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，可得

$$\nabla \cdot [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})] = -\mathrm{j}\omega[\mu|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2 - \varepsilon^*|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2] - \sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2 \tag{3.6.10}$$

或者

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) &= -\mathrm{j}\omega[\mu|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2 - \varepsilon^*|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2] - \sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2 \\ &= -\omega[\mu''|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2 + \varepsilon''|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2] - \sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2 \\ &\quad - \mathrm{j}2\omega\left[\frac{1}{2}\mu'|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon'|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2\right] \\ &= -p_r - \mathrm{j}2\omega(w_m - w_e)\end{aligned} \tag{3.6.11}$$

式中　$p_r = \mathrm{Re}[-\nabla \cdot \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r})] = \omega(\mu''|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2 + \varepsilon''|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2) + \sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$ (3.6.12)

$$w_m = \frac{1}{2}\mu'|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|^2 \tag{3.6.13}$$

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon'|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2 \tag{3.6.14}$$

w_e、w_m 分别表示时间平均电场能密度与磁场能密度，p_r 代表单位体积内电阻损耗与介质损耗。欧姆损耗由媒质的有限电导率引起，它等于$\sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2$，而介质损耗反映介质的极化或磁化跟不上电场或磁场的变化，即存在迟滞效应，产生迟滞损耗。例如水分子极化恢复力较强，在交变场中就存在迟滞损耗，而且电场随时间变化愈快，迟滞损耗功率就愈大，这部分损耗与欧姆损耗一起转化为热能。如对式(3.6.12)由封闭曲面 S 包围的元体积 V 积分，并利用矢量分析中的散度定理式(1.6.32)，得到

$$\begin{aligned}-\oint_S \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}_0 \mathrm{d}S &= \int_V [p_r + \mathrm{j}2\omega(w_m - w_e)]\mathrm{d}V \\ &= P_R + \mathrm{j}2\omega(W_m - W_e)\end{aligned} \tag{3.6.15}$$

$$P_R = \int_V \omega(\mu''|\boldsymbol{H}|^2 + \varepsilon''|\boldsymbol{E}|^2)\mathrm{d}V + \int_V \sigma|\boldsymbol{E}|^2 \mathrm{d}V \tag{3.6.16}$$

$$W_m = \int_V w_m \mathrm{d}V \tag{3.6.17}$$

$$W_e = \int_V w_e \mathrm{d}V \tag{3.6.18}$$

式中 $\boldsymbol{n}_0$ 为闭曲面 S 向外的法向单位矢量。式(3.6.15)左边 $-\oint_S \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}_0 \mathrm{d}S$ 表示通过闭曲面S 流入体积 V 的总电磁功率，它是复数。式(3.6.15)右边第一

项实部 P_R 表示体积 V 内的介质损耗与欧姆损耗；右边第二项虚部中 W_m、W_e 分别表示体积 V 内总的磁场能和电场能。所以式(3.6.15)表示流入闭曲面 S 包围的体积 V 内的复数坡印廷功率的实部等于体积 V 内平均损耗的功率。当体积 V 内储存的磁场能与电场能的时间平均值不相等时，对于时间呈现电性的或磁性的这部分平均净储能，需要用复数坡印廷功率流的虚部来平衡。在一个闭合的区域中所包含的电磁场系统与外界交换能量时，可以等效地表示成具有一定端口的网络系统，系统中贮存的电能和磁能的时间平均值之差可用网络输入阻抗的电抗部分等效地表示。

例 3-7　如果某区域内 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{x}_0E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$，假定 ε、μ 是实数，求 $\boldsymbol{E}(t)$、$\boldsymbol{H}(t)$、$\boldsymbol{S}(t)$、$\langle\boldsymbol{S}(t)\rangle$，以及电场能 $U_E(t)$，磁场能 $U_H(t)$ 及其平均值 $\langle U_E(t)\rangle$、$\langle U_H(t)\rangle$。

解：根据式(3.6.9)

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{y}_0E_0\frac{k}{\omega\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

所以

$$\boldsymbol{E}(t)=\mathrm{Re}[\boldsymbol{x}_0E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\boldsymbol{x}_0E_0\cos(\omega t-kz)$$

$$\boldsymbol{H}(t)=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{y}_0\frac{k}{\omega\mu}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\boldsymbol{y}_0\frac{k}{\omega\mu}E_0\cos(\omega t-kz)$$

$$\boldsymbol{S}(t)=\boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{z}_0\frac{k}{\omega\mu}E_0^2\cos^2(\omega t-kz)$$

$$\langle\boldsymbol{S}(t)\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\boldsymbol{z}_0\frac{k}{\omega\mu}\frac{E_0^2}{2}$$

$$U_E(t)=\frac{\varepsilon E_0^2}{2}\cos^2(\omega t-kz)$$

$$U_H(t)=\frac{k^2E_0^2}{2\mu\omega^2}\cos^2(\omega t-kz)$$

$$\langle U_E(t)\rangle=\frac{\varepsilon}{4}E_0^2$$

$$\langle U_H(t)\rangle=\frac{k^2}{4\omega^2\mu}E_0^2=\frac{\varepsilon}{4}E_0^2$$

例 3-8　由半径为 a 的两圆形板构成一平板电容器，间距为 d，其间充以介电常数为 ε、电导率为 σ 的介质，如图 3-8。假设两板间加电压 $V=V_m\cos\omega t$，电容器的边缘效应可忽略不计，电容器中电场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{z}_0\dfrac{V_m}{d}\cos\omega t$，求：

(1) 电容器中任一点之 $\boldsymbol{H}$；

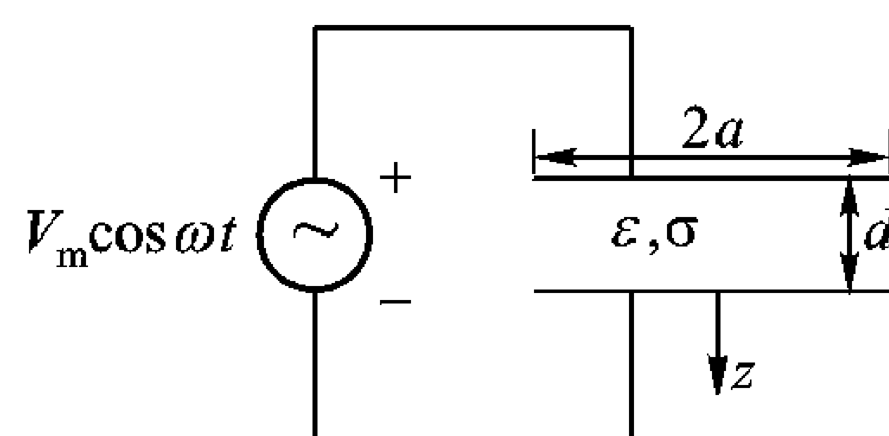


图 3-8　例 3-8 之图

(2) 坡印廷功率流的瞬时值 $\boldsymbol{S}(t)$;

(3) 电容器中热损耗功率 P;

(4) 证明供给电容器的平均功率等于其中的平均热损耗功率。

解:

(1) 电通量密度 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}=\boldsymbol{z}_0\dfrac{\varepsilon V_{\mathrm{m}}}{d}\cos\omega t$，位移电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}}=\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=-\boldsymbol{z}_0\dfrac{\omega\varepsilon V_{\mathrm{m}}}{d}\sin\omega t$，传导电流密度 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}=\sigma\boldsymbol{E}=\boldsymbol{z}_0\dfrac{\sigma V_{\mathrm{m}}}{d}\cos\omega t$，根据全电流定律 $\oint_l\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S(\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 得到

$$2\pi\rho H_{\varphi}=\pi\rho^2(\boldsymbol{J}_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{d}})=\pi\rho^2\left(\frac{\sigma V_{\mathrm{m}}}{d}\cos\omega t-\frac{\omega\varepsilon V_{\mathrm{m}}}{d}\sin\omega t\right)$$

所以

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\varphi}_0\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma V_{\mathrm{m}}}{d}\cos\omega t-\frac{\omega\varepsilon V_{\mathrm{m}}}{d}\sin\omega t\right)\rho$$

(2) $$\boldsymbol{S}(t)=\boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}(t)=\frac{V_{\mathrm{m}}}{d}\cos\omega t\times\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma V_{\mathrm{m}}}{d}\cos\omega t-\frac{\omega\varepsilon V_{\mathrm{m}}}{d}\sin\omega t\right)\rho\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{\varphi}_0$$
$$=-\boldsymbol{\rho}_0\left(\frac{\sigma V_{\mathrm{m}}^2}{2d^2}\cos^2\omega t-\frac{\omega\varepsilon V_{\mathrm{m}}^2}{4d^2}\sin2\omega t\right)\rho$$

(3) 热损耗功率

$$P=VI=VJ_{\mathrm{c}}\pi a^2=V_{\mathrm{m}}\cos\omega t\cdot\frac{\sigma V_{\mathrm{m}}}{d}\cos\omega t\pi a^2=\frac{\sigma\pi a^2}{d}V_{\mathrm{m}}^2\cos^2\omega t$$

平均功率损耗为

$$P_{\mathrm{av}}=\frac{1}{T}\int_0^T P\mathrm{d}t=\frac{\sigma\pi a^2}{2d}V_{\mathrm{m}}^2$$

(4) 供给电容器的功率:

将 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 写成复矢量形式:

$$\boldsymbol{E}=\frac{V_{\mathrm{m}}}{d}\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma V_{\mathrm{m}}}{d}+\mathrm{j}\frac{\omega\varepsilon V_{\mathrm{m}}}{d}\right)\rho\boldsymbol{\varphi}_0$$

供给电容器功率流密度

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{V_{\mathrm{m}}}{d}\left(\frac{\sigma V_{\mathrm{m}}}{d}-\mathrm{j}\frac{\omega\varepsilon V_{\mathrm{m}}}{d}\right)\rho(\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{\varphi}_0)\right]\right]$$

进入电容器的功率为

$$P'_{\mathrm{av}}=\oint_S\boldsymbol{S}_{\mathrm{av}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint\frac{\sigma V_{\mathrm{m}}^2a}{4d^2}(-\boldsymbol{\rho}_0)\cdot(-\boldsymbol{\rho}_0)\mathrm{d}S=\frac{\sigma\pi a^2}{2d}V_{\mathrm{m}}^2$$

$P_{av} = P'_{av}$，所以源供给电容器的功率 P'_{av}等于平均热损耗功率 P_{av}。

3.7　电磁场的几个基本原理和定理

下列基本原理和定理表明电磁场的一些基本性质，它们都是从麦克斯韦方程导出的，在电磁问题求解中占有重要地位。有些原理或定理只在一定条件下成立，应用时要注意是否符合规定的条件。

3.7.1　叠加定理

如果在我们所研究的区域内及边界上，媒质的 ε、μ、σ 都与场强无关，即我们处理的是线性媒质，那么麦克斯韦方程所描述的系统就是线性系统；根据线性系统的叠加原理，若 $\boldsymbol{E}_i$、$\boldsymbol{D}_i$、$\boldsymbol{B}_i$、$\boldsymbol{H}_i$，其中 i 从 1 到 n，是给定边界条件下麦克斯韦方程的多个解，则 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i$、$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{D}_i$、$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{B}_i$、$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{H}_i$ 必是麦克斯韦方程在同一边界条件下的解，这就是叠加定理。

3.7.2　时变电磁场的惟一性定理

通过麦克斯韦方程组求解时变场，有一个问题首先要搞清楚，我们所得到的解是否惟一？在什么条件下才是惟一的？这就是时变场的惟一性定理要回答的问题。

对于一个正确规定的问题，惟一性定理保证有一个而且只有一个解。假定感兴趣的区域用 V 表示，而且它被一个闭合表面 S 所包围。假设 V 内的一组源对场量产生两个不同的解，并令 $\boldsymbol{E}_a$ 和 $\boldsymbol{H}_a$ 表示一组解，$\boldsymbol{E}_b$ 和 $\boldsymbol{H}_b$ 表示另一组解，两组解均满足麦克斯韦方程。这两组解之差用 $\delta\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{E}_b$ 和 $\delta\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_a - \boldsymbol{H}_b$ 表示。惟一性定理要求 $\delta\boldsymbol{E} = \delta\boldsymbol{H} = 0$，现证明如下。

由麦克斯韦方程的线性性质，显然 $\delta\boldsymbol{E}$ 和 $\delta\boldsymbol{H}$ 满足 V 中的无源麦克斯韦方程

$$\nabla \times \delta\boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\,\varepsilon\delta\boldsymbol{E} + \sigma\delta\boldsymbol{E} \tag{3.7.1a}$$

$$\nabla \times \delta\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\delta\boldsymbol{H} \tag{3.7.1b}$$

重复类似于 3.6 节中导出复数坡印廷定理的步骤，可得到关系

$$\nabla \cdot (\delta\boldsymbol{E} \times \delta\boldsymbol{H}^*) = -\mathrm{j}\omega\left[\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2 - \varepsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\right] - \sigma|\delta\boldsymbol{E}|^2 \tag{3.7.2a}$$

或

$$\int_S \delta\boldsymbol{E} \times \delta\boldsymbol{H}^* \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\mathrm{j}\omega\int_V \left[\mu|\delta\boldsymbol{H}|^2 - \varepsilon^*|\delta\boldsymbol{E}|^2\right]\mathrm{d}V - \int_V \sigma|\delta\boldsymbol{E}|^2\,\mathrm{d}V \tag{3.7.2b}$$

为使上式左方的面积分为零，则要求右方的体积分为零。在右方体积分的三项中被积函数 $|\delta\boldsymbol{E}|^2$ 及 $|\delta\boldsymbol{H}|^2$ 为非负函数，使等式右方为零的惟一可能是 $|\delta\boldsymbol{E}|^2$ 及 $|\delta\boldsymbol{H}|^2$ 均为零。这意味着区域 V 内的场只有惟一的一组解。

如果对于 V 内场的任何可能解，在 V 的边界面 S 上电场或磁场的切向分量要求取确定值，那么对于所假定的 V 内的两组解在 S 面上应有

$$(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

或

$$(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\times\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

在 S 的每一个面元上如果上面的条件能够保证成立，就可使式(3.7.2b)左方的面积分为零。因此电磁场的惟一性定理可表述如下：对于一个被闭合面 S 包围的区域 V，如果 S 面上的电场或磁场的切向分量给定，或者在 S 面上的部分区域给定 $\boldsymbol{E}$ 的切向分量，在 S 的其余表面给定 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量，那么在区域 V 内的电磁场是惟一确定的。

3.7.3　镜像原理

镜像原理是由惟一性定理导出的，它实际上是等效性原理在理想导体边界情况下的应用。

当源靠近理想导体壁时，所产生的场相当于原有的源和它对该壁作为镜面产生的镜像一起建立的场。确定镜像的原则是，它与原有的源共同建立的场在边界上满足理想导体的边界条件(理想导体的边界条件在第5章专门讨论)。这样求源靠近理想导体壁产生的场转化为求原有的源与其镜像产生的场，使场的求解大为简化。如何根据边界条件确定镜像将在以后的有关章节中讨论，下面是相应的结论。

电荷对平面理想导体壁的镜像是另一侧等距处与原电荷大小相等、符号相反的电荷。

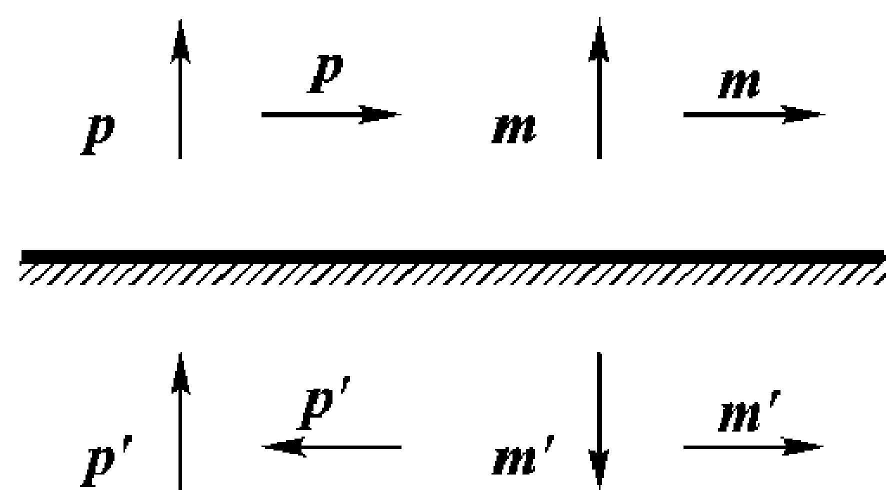


图3－9　电偶极子及磁偶极子在理想导体表面的镜像

电流元即交变电偶极子对理想导体平面表面的镜像如图3－9所示。值得注意的是与界面垂直的电流元其镜像为同方向的电流元，而与界面平行的电流元其镜像为反向的电流元。等效磁流元即磁偶极子在理想导体表面的镜像也示于图3－9，它与电流元镜像的关系相反。

3.7.4　等效原理

由惟一性定理可得到等效原理。在某一空间区域内，能够产生同样场的两种源，称其在该区域内是等效的。很多场合下，用等效源代替实际源，会给解

题带来很大方便。

按照等效原理，如果源在体积 V 内，欲求 V 外某一点场时，可以这样处理：假设 V 内为零场，此时封闭面 S 上出现了不连续，为满足边界条件，可假定 S 上有切向场 $\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}_0$，$\boldsymbol{n}_0$ 为 S 法线方向的单位矢量，$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 为 S 面上的场。这样 V 内一次源的影响就为边界面上的二次源 $\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}_0$ 所代替。根据惟一性定理可以看出，二次源可以产生惟一的与真实源相同的场。

应用等效原理解题时，我们往往把二次源放到我们所“感兴趣”的区域的边界上，二次源在我们感兴趣的区域内产生与真实源相同的解，但在我们“不感兴趣”的区域，二次源的解或与真实源产生的解不同，或甚至是错误的。这是我们在应用等效原理时要注意的。

前面所引进的二次源是一种等效源，或者说是一种虚源。其中 $\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H}$ 是容易理解的，它相当于电流密度矢量(第 5 章将专门讨论)，记作 $\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_s$。对照 $\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H}$，对偶地把 $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}_0$ 叫做磁流密度矢量，记作 $\boldsymbol{J}_{ms}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}_0$。因而这里所引进的新的波源磁流，实际上就是切向电场，这纯粹是为了数学上的方便。但是真正的波源还是电荷和电流，因为切向电场实际上也是由电荷和电流产生的。

已经知道，位移电流密度和传导电流密度与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的关系为

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$$

引进磁流密度后，仿此也可写出

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{J}_m-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}$$

引入虚拟磁流后，按照连续性原理，必定有磁荷，于是有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_m=-\frac{\partial\rho_m}{\partial t}$$

由于旋度的散度为零，可以推出

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=\rho_m$$

引进磁荷和磁流后，麦克斯韦方程组变为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{E}&=-\boldsymbol{J}_m-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}\\\nabla\times\boldsymbol{H}&=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}\\\nabla\cdot\boldsymbol{D}&=\rho\\\nabla\cdot\boldsymbol{B}&=\rho_m\end{aligned}\right\}\tag{3.7.3}$$

式中 ρ_m 为磁荷密度，单位为 $\mathrm{Wb/m^3}$，$\boldsymbol{J}_m$ 为磁流密度，单位为 $\mathrm{V/m^2}$。

3.7.5 对偶定理

引进磁荷和磁流后的麦克斯韦方程(3.7.3)中关于电的量和磁的量具有对

偶性。为此我们写出只由电荷、电流作为源激发的和只由等效磁荷、等效磁流作为源激发的电磁场方程组和电流连续方程：

电型源		磁型源	
$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=0$	(3.7.4a)	$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{J}_\mathrm{m}$	(3.7.5a)
$\nabla\times\boldsymbol{H}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=\boldsymbol{J}$	(3.7.4b)	$\nabla\times\boldsymbol{H}-\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}=0$	(3.7.5b)
$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\varepsilon$	(3.7.4c)	$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$	(3.7.5c)
$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$	(3.7.4d)	$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\rho_\mathrm{m}/\mu$	(3.7.5d)
$\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\rho=0$	(3.7.4e)	$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_\mathrm{m}+\mathrm{j}\omega\rho_\mathrm{m}=0$	(3.7.5e)

不难看出这两组方程式之间存在着明显的对应关系，也就是说如果将上两组方程式中的所有场量和源量作如下代换：

$\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{E}\Rightarrow\boldsymbol{H}$
$\boldsymbol{H}\Rightarrow-\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{H}\Rightarrow-\boldsymbol{E}$
$\varepsilon\Rightarrow\mu$	$\varepsilon\Rightarrow\mu$
$\mu\Rightarrow\varepsilon$	$\mu\Rightarrow\varepsilon$
$\rho\Rightarrow\rho_\mathrm{m}$	$\rho_\mathrm{m}=-\rho$
$\boldsymbol{J}\Rightarrow\boldsymbol{J}_\mathrm{m}$	$\boldsymbol{J}_\mathrm{m}\Rightarrow-\boldsymbol{J}$

电型源方程变为磁型源方程，而磁型源方程则变为电型源方程。电型源方程和磁型源方程式的这种对应形式称为二重性或对偶性。

电磁场方程式的二重性提供了这样一种便利，如果知道一个问题(例如电型源问题)的解就可由对偶关系得出它的对偶问题(为一磁型源问题)的解，而无需重复求解方程。由电基本振子[图 3-10(a)]的辐射场写出磁基本振子[图 3-10(b)]的辐射场可作为二重性应用的简单例子。

因为，引入磁流、磁荷概念后，这两种基本辐射单元极其相似。电基本振子天线表面上有交变电流，在天线的两端电流为零，而有电荷的堆积，电流和电荷之间满足连续性方程。作为实际可行的磁振子的裂缝天线，其口径上有切向电场，相当于磁流密度，在裂缝的两端切向电场为零，即磁流为零，因而裂缝的两端也相当于磁荷的堆积。电基本振子、磁基本振子天线在第 9 章会深入讨论。

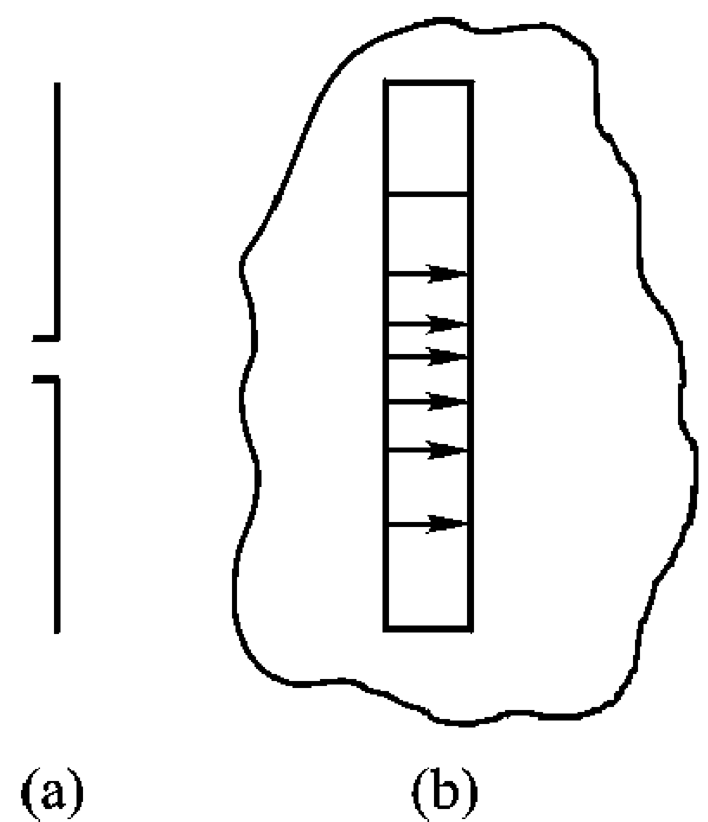


图 3-10　电振子与磁振子的对偶

(a) 电振子

(b) 磁振子(裂缝)

3.7.6　互易定理

电磁互易定理反映两组不同的场源之间的影响和响应关系。其数学形式导出如下。

考虑同一线性介质中的两组频率相同的源 $\boldsymbol{J}^{a}$、$\boldsymbol{J}_{m}^{a}$ 和 $\boldsymbol{J}^{b}$、$\boldsymbol{J}_{m}^{b}$。我们用 $\boldsymbol{E}^{a}$、$\boldsymbol{H}^{a}$ 表示源 a 产生的场，用 $\boldsymbol{E}^{b}$、$\boldsymbol{H}^{b}$ 表示源 b 产生的场，写出相应的场方程式

$$\nabla\times\boldsymbol{E}^{a}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}^{a}-\boldsymbol{J}_{m}^{a} \tag{3.7.6a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}^{a}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}^{a}+\boldsymbol{J}^{a} \tag{3.7.6b}$$

和

$$\nabla\times\boldsymbol{E}^{b}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}^{b}-\boldsymbol{J}_{m}^{b} \tag{3.7.7a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}^{b}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}^{b}+\boldsymbol{J}^{b} \tag{3.7.7b}$$

以 $\boldsymbol{E}^{b}$ 点乘 $\nabla\times\boldsymbol{H}^{a}$ 的方程，$\boldsymbol{H}^{b}$ 点乘 $\nabla\times\boldsymbol{E}^{b}$ 的方程，所得两式相减后为

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}^{b}\times\boldsymbol{H}^{a})=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}^{b}\cdot\boldsymbol{E}^{a}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}^{a}\cdot\boldsymbol{H}^{b}+\boldsymbol{E}^{b}\cdot\boldsymbol{J}^{a}+\boldsymbol{H}^{a}\cdot\boldsymbol{J}_{m}^{b}$$

再将上式的 a 和 b 互换得

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}^{a}\times\boldsymbol{H}^{b})=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}^{a}\cdot\boldsymbol{E}^{b}+\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}^{b}\cdot\boldsymbol{H}^{a}+\boldsymbol{E}^{a}\cdot\boldsymbol{J}^{b}+\boldsymbol{H}^{b}\cdot\boldsymbol{J}_{m}^{a}$$

上面得到的后一式减去前一式，有

$$-\nabla\cdot(\boldsymbol{E}^{a}\times\boldsymbol{H}^{b}-\boldsymbol{E}^{b}\times\boldsymbol{H}^{a})=\boldsymbol{E}^{a}\cdot\boldsymbol{J}^{b}+\boldsymbol{H}^{b}\cdot\boldsymbol{J}_{m}^{a}-\boldsymbol{E}^{b}\cdot\boldsymbol{J}^{a}-\boldsymbol{H}^{a}\cdot\boldsymbol{J}_{m}^{b} \tag{3.7.8}$$

如果在区域 V 内无源，$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_{m}=0$，式(3.7.8)化为

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}^{a}\times\boldsymbol{H}^{b}-\boldsymbol{E}^{b}\times\boldsymbol{H}^{a})=0$$

此式在 V 上积分，应用散度定理化为面积分后得

$$\int_{S}(\boldsymbol{E}^{a}\times\boldsymbol{H}^{b}-\boldsymbol{E}^{b}\times\boldsymbol{H}^{a})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \tag{3.7.9}$$

式(3.7.9)称为洛仑兹引理，或洛仑兹互易定理。如果区域 V 内有源，对式(3.7.8)积分后得

$$-\int_{S}(\boldsymbol{E}^{a}\times\boldsymbol{H}^{b}-\boldsymbol{E}^{b}\times\boldsymbol{H}^{a})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{V}(\boldsymbol{E}^{a}\cdot\boldsymbol{J}^{b}-\boldsymbol{H}^{a}\cdot\boldsymbol{J}_{m}^{b}-\boldsymbol{E}^{b}\cdot\boldsymbol{J}^{a}+\boldsymbol{H}^{b}\cdot\boldsymbol{J}_{m}^{a})\,\mathrm{d}V \tag{3.7.10}$$

在实际问题中，源总是局限于有限空间的。以后将证明局限于有限空间的源在无穷远处的电场和磁场之间的关系为

$$E_{\theta}=\eta H_{\varphi},\quad E_{\varphi}=-\eta H_{\theta} \tag{3.7.11}$$

这里 $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$ 为介质的空间波阻抗。如果将式(3.7.10)的积分扩展至全空间，而 S 变为半径无穷大的球面，利用式(3.7.11)可以证明式(3.7.10)右方 S 面上的积分为零，便得到互易定理

$$\int_{V}(\boldsymbol{E}^{a}\cdot\boldsymbol{J}^{b}-\boldsymbol{H}^{a}\cdot\boldsymbol{J}_{m}^{b})\,\mathrm{d}V=\int_{V}(\boldsymbol{E}^{b}\cdot\boldsymbol{J}^{a}-\boldsymbol{H}^{b}\cdot\boldsymbol{J}_{m}^{a})\,\mathrm{d}V \tag{3.7.12}$$

式(3.7.12)的积分区域 V 是全空间。如果在有界区域的边界面上式(3.7.10)左方面积分为零，例如理想导体包围的闭合区域，那么这时互易定理式(3.7.12)也适用。

下面我们来解释互易定理的物理意义。首先我们注意积分中的量不是复共

轭量，因此一般来说式(3.7.12)中的积分并不表示功率。Rumsey将这两个积分称为反应(reaction)。例如，式(3.7.12)的左方的积分是场 a 对于源 b 的反应，并利用符号表示为

$$\langle a,b\rangle=\int_V(\boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{J}^b-\boldsymbol{H}^a\cdot\boldsymbol{J}_m^b)\,dV \tag{3.7.13}$$

而式(3.7.12)右方的积分是场b对于源a的反应，用符号⟨b,a⟩表示。于是互易定理式(3.7.12)用反应可表示为

$$\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle \tag{3.7.14}$$

反应概念可以看作是彼此独立的场与源之间响应的量度。下面通过简单的二端口网络予以说明。

图3－11(a)示出一个给定的电流源 $\boldsymbol{J}^b$ 通过二端口网络的开路端与场a之间的作用，V^a、I^a 分别是场a在二端口网络开路端产生的电压和电流，场a和源b的反应为

$$\langle a,b\rangle=\int_V\boldsymbol{E}^a\cdot\boldsymbol{J}^b dV=I^b\int\boldsymbol{E}^a\cdot d\boldsymbol{l}=-I^bV^a \tag{3.7.15}$$

所以当单位电流源作用于二端口网络时，网络输出端场a与输入端单位电流源b的反应⟨a,b⟩就是网络输出端电压 V^a 的负值。

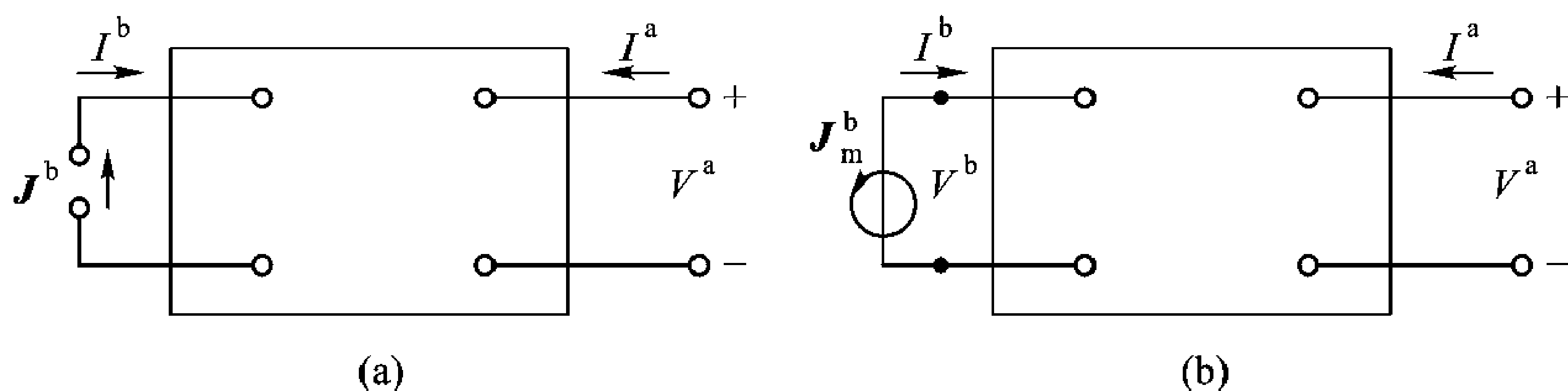


图3－11　电流源与磁流源对电路的作用

(a) 电流源对电路的作用　(b) 磁流源对电路的作用

再看图3－11(b)。该图示出了给定的磁流源 $\boldsymbol{J}_m^b$ 与场a通过二端口网络的相互作用，场a与磁流源之间的反应为

$$\langle a,b\rangle=\int_V-\boldsymbol{H}^a\cdot\boldsymbol{J}_m^b dV=-I_m^b\oint\boldsymbol{H}^a\cdot d\boldsymbol{l}=-V^bI^a \tag{3.7.16}$$

注意到 $\oint\boldsymbol{H}^a\cdot d\boldsymbol{l}$ 积分中，积分路径是逆时针的，而图3－11(b)所指示电流 I^a 是流入网络的，在安培定律中略去位移电流，便得到

$$\oint\boldsymbol{H}^a\cdot d\boldsymbol{l}=I^a$$

I_m^b 是略去位移电流后在磁流环的横截面流过的电流

$$-I_m^b = -\int_S \boldsymbol{J}_m^b \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \nabla \times \boldsymbol{E}^b \cdot d\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{E}^b \cdot d\boldsymbol{l} = -V^b$$

这个关系式表明，磁流源相当于电压源。式(3.7.16)表示当单位磁流源作用于网络时，网络输出端场 a 与输入端单位磁流源 b 的反应〈a,b〉就是网络输出端电流 I^a 的负值。

继续以前面的二端口网络为例，利用上面的分析结果，可以从场的互易定理得出网络的互易定理。二端口网络阻抗矩阵的定义是

$$\begin{bmatrix} V^a \\ V^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} \\ Z_{ba} & Z_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I^a \\ I^b \end{bmatrix} \tag{3.7.17}$$

现在我们用互易定理证明非对角阻抗矩阵元的对称性。

当端口 b 加单位电流源时，得到

$$\langle a, b\rangle = -V^a$$

而当端口 a 加单位电流源时,得到

$$\langle b, a\rangle = -V^b$$

由式(3.7.17)又得到

$$V^a = Z_{ab} I^b = Z_{ab}$$

$$V^b = Z_{ba} I^a = Z_{ba}$$

按互易定理有

$$\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$$

即

$$-V^a = -V^b$$

所以

$$Z_{ab} = Z_{ba}$$

这就是说在线性电路问题中，熟知的二端口网络非对角阻抗矩阵元的对称性实际上是互易定理的具体表现。

应当强调指出的是，互易定理与介质的性质有关。只是在一定类型的介质中才有互易关系式(3.7.14)，而在一些特殊介质中，如磁化等离子体、磁化铁氧体，互易关系式(3.7.14)不再成立，这样的介质称为不可逆介质。

由洛伦兹互易定理可以证明，同一天线作为发射天线的特性和作为接收天线的特性相同；在波导或谐振腔中，同一个探极作为激励器和作为接收器的特性相同。

本章要点

- 麦克斯韦方程是支配电磁运动的基本方程。麦克斯韦方程不是从几个公理推

导出来的，而是根据科学实验总结出来的电磁运动的基本规律，麦克斯韦方程是正确的，因为宏观世界电磁运动都遵循麦克斯韦方程。

- 得出麦克斯韦方程所依据的基本实验规律是，法拉第电磁感应定理、安培全电流定理、高斯定理(或库仑定理)以及磁通连续性原理。麦克斯韦的贡献在于在安培定理中引入位移电流的概念，推广了安培定理，正是由于位移电流概念的提出，从麦克斯韦方程预言电磁波的存在，赫兹在 1886 ~ 1889 通过实验证实电磁波的存在，并导致马可尼(G. Marconi)在 1895 年和波波夫(A. C. Popov)在 1896 年成功地进行了无线电报传送实验，从而开创了人类应用无线电波的新纪元。
- 积分形式的麦克斯韦方程组描述空间某一局部区域场的平均性质，而微分形式的麦克斯韦方程描述场在空间每一点的性质，当积分形式的麦克斯韦方程其积分区域收缩为一点，其极限就是微分形式的麦克斯韦方程，联系微分形式与积分形式的麦克斯韦方程的桥梁就是斯托克斯定理与散度定理。
- 对于时谐场，引入复矢量概念后，就得到复矢量形式的麦克斯韦方程组。注意复矢量形式的电磁场量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{H}$ 只是空间坐标的函数，与时间无关。复矢量形式的电磁场量乘上 $e^{j\omega t}$取实部才是时变电磁场量。引入复矢量概念后，电磁场量对时间的微分、积分简化为乘、除 $j\omega$ 的代数运算，场量乘积时间平均值的计算简化为取实部的代数运算。
- 麦克斯韦方程包含电流与电荷连续方程，如果将电流与电荷的连续方程看作基本方程，那么麦克斯韦方程中只有两个旋度方程是独立的方程。两个旋度方程加上电流与电荷连续方程这 3 个方程中有 5 个矢量，1 个标量。每个矢量又有 3 个标量，共有 16 个标量。两个旋度方程是矢量方程，电流与电荷连续方程是标量方程，加起来才 7 个独立的标量方程，尚需 9 个独立的标量方程才能对电磁问题进行求解。这 9 个方程可从物质的本构关系得到。
- 物质的本构关系是：$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{J}_c=\sigma\boldsymbol{E}$。介质的介电常数 ε、磁导率 μ、电导率 σ 是描述介质特性的参数。介质可按 ε、μ、σ 进行分类。所谓介质的线性与非线性，均匀与非均匀，各向同性与各向异性，色散与非色散，无耗与有耗，都是由 ε、μ、σ 的性质决定的。线性、各向同性、均匀的介质叫简单介质。
- 麦克斯韦方程描述源对场的作用，即由电荷、电流产生场，而场对源的作用就由洛伦兹力方程描述，洛伦兹力方程也是实验规律的科学总结。场对物质的作用通过电场力与磁场力进行，注意磁场力对静止电荷不起作用，对运动电荷的作用不仅与速度大小有关，还与方向有关，磁场力总与荷电质点运动的方向垂直。
- 电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 乘积具有功率量纲，坡印廷矢量 $\boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}(t)$表示电磁功率流，引入复数坡印廷矢量 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$后，$\boldsymbol{E}(t)\times\boldsymbol{H}(t)$时

间平均值的计算简化为对 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{H}^*(\boldsymbol{r})$取实部的运算。

坡印廷定理反映电磁运动中的能量关系。

- 如果媒质是线性的，麦克斯韦方程组也是线性的，满足叠加定理。
- 惟一性定理保证在一定边值条件下麦克斯韦方程有一个而且只有一个解。由惟一性定理可得到等效原理。在某一空间区域内，能够产生同样场的两种源，称其在该区域内是等效的。电磁场方程的对偶原理或二重性原理提供了这样一种便利，如果知道了一个问题(如电型源问题)的解，就可对偶地得出它的对偶问题(为一磁型源问题)的解，而无需重复求解过程。

  从惟一性定理可得出镜像原理，它实际上是等效原理在理想导体边界情况下的应用。
- 电磁互易定理反映两组不同场源之间的影响和响应关系，用“反应”表示其数学关系是$\langle a,b\rangle=\langle b,a\rangle$。互易定理与介质性质有关，只是在一定类型的介质中互易定理才成立。在旋性介质中互易定理不再成立。由场的互易定理可以得到电路的互易定理。

习题

3.1　求以下几个量的量纲：

(1) $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}$；(2) $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}$；(3) $\boldsymbol{S}$。

3.2　写出以下时谐矢量的复矢量表示。

(1) $\boldsymbol{V}(t)=3\cos(\omega t)\boldsymbol{x}_0+4\sin(\omega t)\boldsymbol{y}_0+\cos(\omega t+\pi/2)\boldsymbol{z}_0$

(2) $\boldsymbol{E}(t)=(3\cos\omega t+4\sin\omega t)\boldsymbol{x}_0+8(\cos\omega t-\sin\omega t)\boldsymbol{z}_0$

(3) $\boldsymbol{H}_t=0.5\cos(kz-\omega t)\boldsymbol{x}_0$

3.3　从下面复矢量

(1) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{x}_0-\mathrm{j}\boldsymbol{y}_0$

(2) $\boldsymbol{C}=\mathrm{j}(\boldsymbol{x}_0-\mathrm{j}\boldsymbol{y}_0)$

(3) $\boldsymbol{C}=\exp(-\mathrm{j}kz)\boldsymbol{x}_0+\mathrm{j}\exp(\mathrm{j}kz)\boldsymbol{y}_0$

写出相应的时谐矢量。

3.4　无源空间 $\boldsymbol{H}=z\boldsymbol{y}_0+y\boldsymbol{z}_0$，$\boldsymbol{D}$ 随时间变化吗？

3.5　假定($\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{H}_1$ 和 $\boldsymbol{D}_1$)、($\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{H}_2$ 和 $\boldsymbol{D}_2$)分别为源($\boldsymbol{J}_1$、ρ_{v1})、($\boldsymbol{J}_2$、ρ_{v2})激发的满足麦克斯韦方程的解。求源为($\boldsymbol{J}_t=\boldsymbol{J}_1+\boldsymbol{J}_2$, $\rho_{vt}=\rho_{v1}+\rho_{v2}$)时麦克斯韦方程的解。在你得出的解中应用了什么原理？

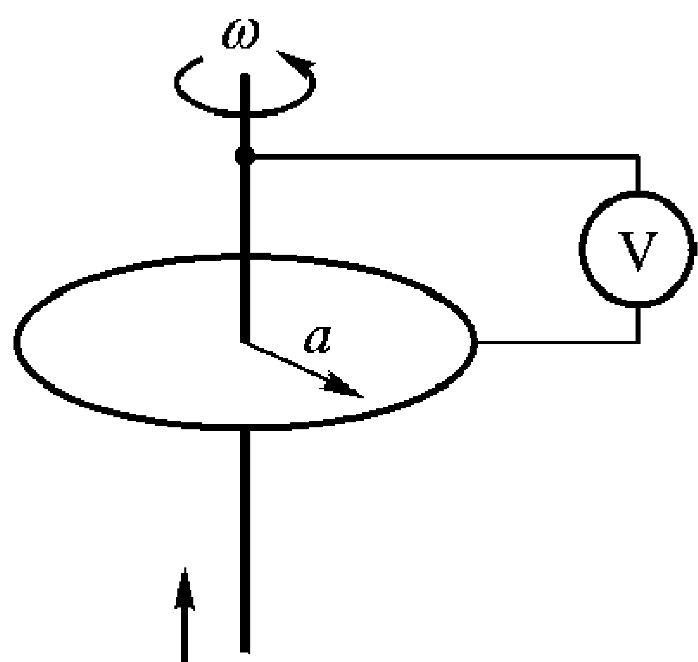
3.6　如果在某一表面 $\boldsymbol{E}=0$，是否就可得出在该表面$\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0$？为什么？

3.7　如果在一条直线上电场 $\boldsymbol{E}=0$，是否总意味着$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$？如果不是，请举例说明。

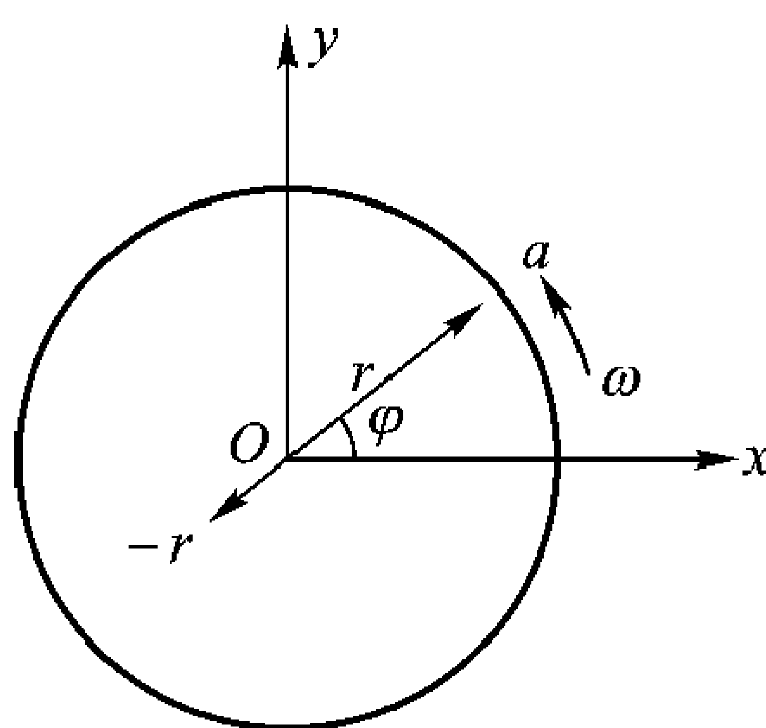
3.8　对于调幅广播，频率 f 从 500 kHz 到 1 MHz，假定电离层电子浓度 $N=10^{12}/\mathrm{m}^3$，确定电离层有效介电系数 ε_e 的变化范围。

3.9　一半径为 a 的导体圆盘以角速度 ω 在均匀磁场中作等速旋转，设圆盘与磁场互相垂

直，如题图 3.9，试求圆盘中心与它边缘之间的感应电动势。



题图 3.9



题图 3.10

3.10 一点电荷(电量为 10^{-5} C)作圆周运动，其角速度 $\omega = 1\,000$ rad/s，圆周半径 $r = 1$ cm，如题图 3.10，试求圆心处位移电流密度。

3.11 假定 $\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{x}_0 + \mathrm{j}\boldsymbol{y}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}$，$\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{y}_0 - \mathrm{j}\boldsymbol{x}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}$，求用 z、ωt 表示的 $\boldsymbol{S}$ 以及 $\langle \boldsymbol{S} \rangle$。

3.12 证明 $\boldsymbol{S} \neq \mathrm{Re}\,[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$。

3.13 证明 $\boldsymbol{S} \neq \mathrm{Re}\,[\boldsymbol{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \times \boldsymbol{H}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$。

3.14 求在电场 $E = 10^4$ V/m 或磁场 $B = 10^4$ G (高斯 G = 10^{-4} Wb/m^2)两种情况下，比较单位体积中储存的电场能与磁场能的差别。

第4章　均匀平面波

本章从描述电磁运动的基本方程——麦克斯韦方程及物质的本构关系出发，研究在简单介质中电磁运动的基本形式——平面波及其主要特征。所谓简单介质就是线性、均匀、各向同性的介质。4.1节得出电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 满足的波方程，4.2节从波方程得到简单介质中的平面波解，4.3、4.4节讨论平面波的极化特性以及平面波在有耗介质中的传播，4.5节介绍色散与群速的基本概念，4.6节证明电磁波沿某一方向传播可与特定参数传输线上电压、电流波的传播等效，即电磁波传播的传输线模型。

4.1　波方程

3.4节已分析过，麦克斯韦方程组中两个旋度方程是独立的。在两个旋度方程中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 耦合在一起。从解方程角度看，先要将 $\boldsymbol{E}$ 跟 $\boldsymbol{H}$ “去耦”，即从两个旋度方程消去 $\boldsymbol{H}$（或 $\boldsymbol{E}$），然后得到只关于 $\boldsymbol{E}$（或 $\boldsymbol{H}$）的方程。

本节讨论无源、简单介质中麦克斯韦方程的解，所谓无源，就是指所研究的区域内不存在产生电磁场的源 $\boldsymbol{J}$ 与 ρ_v。对于简单介质，ε、μ 是常量。在这种特定情况下，将物质的本构关系式(3.4.1)、(3.4.2)代入麦克斯韦方程(3.2.10)～(3.2.13)，得到

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{4.1.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{4.1.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{4.1.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{4.1.4}$$

在(4.1.1)、(4.1.2)两个方程中，只有 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 两个独立的场量，但 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 耦合在一起。为了从这两个方程得到只关于 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 的方程，对式(4.1.1)取旋度，并将式(4.1.2)代入，得到

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\mathrm{j}\omega\mu\ (\nabla \times \boldsymbol{H}) = -\mathrm{j}\omega\mu\ (\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}) = \omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E}$$

利用恒等关系 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E}$，而根据式(4.1.3)，$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$，所以上式成为

$$\nabla^2\boldsymbol{E} + \omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{E} = 0 \tag{4.1.5}$$

同样对式(4.1.2)取旋度，将式(4.1.1)代入，并利用式(4.1.4)及上面的矢量运

算恒等关系，得到

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} + \omega^2 \mu\varepsilon \boldsymbol{H} = 0 \tag{4.1.6}$$

式(4.1.5)、(4.1.6)可合并写成

$$(\nabla^2 + k^2)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases} = 0 \tag{4.1.7}$$

式中

$$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \tag{4.1.8}$$

在自由空间或真空中，$\mu = \mu_0$，$\varepsilon = \varepsilon_0$，$k$ 记作 k_0，并有

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \tag{4.1.9}$$

式(4.1.5)、(4.1.6)或式(4.1.7)叫做无源简单介质中的波方程，在这个方程中 $\boldsymbol{E}$ 跟 $\boldsymbol{H}$ 不再耦合在一起。$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 叫做传播常数，其物理意义以后会深入讨论。式(4.1.7)在形式上与传输线上电压 V 电流 I 满足的波方程类似。V、I 是标量，而 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 是矢量，所以式(4.1.7)叫做矢量波方程。

4.2 平面电磁波

要从无源、简单介质中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 满足的波方程得到具体电磁问题的解，还要给出特定的边界条件。本节研究边界趋于无穷远的情况。传输线理论告诉我们，趋于无穷远的均匀传输线上只有入射波，没有反射波。由此可作出推论，在边界趋于无穷远的情况下，均匀介质中不存在从无穷远反射回来的波。

在直角坐标系中 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 可表示为

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0 + E_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0 + E_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0 \tag{4.2.1}$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z) = H_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0 + H_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0 + H_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0 \tag{4.2.2}$$

将上述 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 表达式代入波方程(4.1.7)有

$$(\nabla^2 + k^2)\begin{cases}[E_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0 + E_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0 + E_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0]\\ [H_x(x,y,z)\boldsymbol{x}_0 + H_y(x,y,z)\boldsymbol{y}_0 + H_z(x,y,z)\boldsymbol{z}_0]\end{cases} = 0 \tag{4.2.3}$$

要使上式成立，只有等式左边每个分量都等于零，即

$$(\nabla^2 + k^2)\begin{cases}E_x(x,y,z)\\ E_y(x,y,z)\\ E_z(x,y,z)\end{cases} = 0 \tag{4.2.4a}$$

$$(\nabla^2 + k^2)\begin{cases}H_x(x,y,z)\\ H_y(x,y,z)\\ H_z(x,y,z)\end{cases} = 0 \tag{4.2.4b}$$

所以对式(4.2.3)的求解归结为解标量波方程

$$(\nabla^2 + k^2)\Phi(x, y, z) = 0 \tag{4.2.5}$$

式(4.2.5)可用熟知的分离变量法求解。设 $\Phi(x, y, z)$可分离成

$$\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \tag{4.2.6}$$

将式(4.2.6)代入式(4.2.5)得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)X(x)Y(y)Z(z) = 0$$

或

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}Y(y)Z(z) + \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}X(x)Z(z) + \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}X(x)Y(y) + k^2 X(x)Y(y)Z(z) = 0$$

等式两边除以 $X(x)Y(y)Z(z)$得到

$$\frac{\dfrac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{X(x)} + \frac{\dfrac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}{Y(y)} + \frac{\dfrac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}}{Z(z)} + k^2 = 0 \tag{4.2.7}$$

等式左边第一、二、三项分别只是 x、y、z 的函数，要使它们加起来为常数 $-k^2$，只能是每一项都等于某一待定常数 $-k_x^2$，$-k_y^2$，$-k_z^2$，即

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0 \tag{4.2.8a}$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0 \tag{4.2.8b}$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k_z^2 Z(z) = 0 \tag{4.2.8c}$$

以及

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \tag{4.2.9}$$

式(4.2.8a、b、c)的解分别为

$$X(x) \sim e^{-jk_x x}$$

$$Y(y) \sim e^{-jk_y y}$$

$$Z(z) \sim e^{-jk_z z}$$

$e^{-jk_x x}$等表示沿 x 方向传播到无穷远的波，另一个解 $e^{jk_x x}$等表示逆 x 方向由无穷远传播来的波，因为假定边界趋于无穷远，不存在反射波，所以这个解可以不予考虑。

根据式(4.2.6)，可得

$$\Phi(x, y, z) \sim e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{4.2.10}$$

式中

$$\boldsymbol{k} = k_x \boldsymbol{x}_0 + k_y \boldsymbol{y}_0 + k_z \boldsymbol{z}_0 \tag{4.2.11}$$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{x}_0 + y\boldsymbol{y}_0 + z\boldsymbol{z}_0$$

$\boldsymbol{k}$ 叫做波矢，其绝对值 k 叫做传播常数，k^2 满足的方程(4.2.9)，叫做介质的色散方程。所以电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 在均匀介质中每一分量的解为

$$E_i(x,y,z) = E_{0i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \text{式中 } i = x, \ y, \ z$$

$$H_i(x,y,z) = H_{0i}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \text{式中 } i = x, \ y, \ z$$

进一步得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}(x,y,z) &= \boldsymbol{x}_0 E_{0x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{y}_0 E_{0y}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{z}_0 E_{0z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\ &= \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

式中

$$\boldsymbol{E}_0 = E_{0x}\boldsymbol{x}_0 + E_{0y}\boldsymbol{y}_0 + E_{0z}\boldsymbol{z}_0 \tag{4.2.13}$$

同理

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}(x,y,z) = \boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{4.2.14}$$

式中

$$\boldsymbol{H}_0 = H_{0x}\boldsymbol{x}_0 + H_{0y}\boldsymbol{y}_0 + H_{0z}\boldsymbol{z}_0 \tag{4.2.15}$$

计及时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$后，其解为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{4.2.16}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{4.2.17}$$

这里我们省略了取实部的运算符号 Re，以后遇到类似情况不再特别说明。从形式上看式(4.2.12)、(4.2.14)表示电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 的解是一个常数矢量 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{H}_0$ 与一个指数函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$的乘积。即方向由常数矢量 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{H}_0$ 决定，大小由标量函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$决定。这个解我们以后把它叫做平面波。在深入讨论其物理意义之前，熟悉对式(4.2.12)、(4.2.14)所表示的场量进行散度、旋度运算是十分必要的。

例 4-1 求场量 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$的 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ 与 $\nabla\times\boldsymbol{E}$、$\nabla^2\boldsymbol{E}$。

解： 因为

$$\begin{aligned} \nabla(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= -\mathrm{j}(k_x\boldsymbol{x}_0 + k_y\boldsymbol{y}_0 + k_z\boldsymbol{z}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= -\mathrm{j}\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

再利用矢量运算恒等关系式(1.6.50)、(1.6.51)得到

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{E} &= \nabla\cdot(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{E}_0\cdot\nabla(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla\cdot\boldsymbol{E}_0 \\ &= -\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = -\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

$$\begin{aligned} \nabla\times\boldsymbol{E} &= \nabla\times(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = \nabla(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})\times\boldsymbol{E}_0 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla\times\boldsymbol{E}_0 \\ &= -\mathrm{j}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = -\mathrm{j}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

$$\nabla\cdot\nabla\boldsymbol{E} = \nabla\cdot\nabla(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = \nabla^2(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}) = -k^2\boldsymbol{E} \tag{4.2.21}$$

波方程的解式(4.2.12)、(4.2.14)有丰富的内涵：

1. $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 三者相互垂直，且构成右手螺旋关系，模 $|\boldsymbol{E}|$ 与 $|\boldsymbol{H}|$ 之比为一常数，叫做波阻抗。将式(4.2.12)、(4.2.14)代入麦克斯韦方程组中两个旋度方程可得到

$$\boldsymbol{H}_0=\frac{1}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 \tag{4.2.22}$$

$$\boldsymbol{E}_0=-\frac{1}{\omega\varepsilon}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_0 \tag{4.2.23}$$

引入单位波矢 $\boldsymbol{\kappa}_0$ 使得 $\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\boldsymbol{\kappa}_0=1$，$\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{\kappa}_0$，则式(4.2.22)、(4.2.23)成为

$$\boldsymbol{H}_0=Y\boldsymbol{\kappa}_0\times\boldsymbol{E}_0 \tag{4.2.24}$$

$$\boldsymbol{E}_0=-Z\boldsymbol{\kappa}_0\times\boldsymbol{H}_0 \tag{4.2.25}$$

式中

$$Z=\frac{1}{Y}=\omega\mu/k=k/\omega\varepsilon=\sqrt{\mu/\varepsilon} \tag{4.2.26}$$

Z、Y 叫做均匀介质中平面波的本征阻抗或本征导纳。本征阻抗也叫波阻抗，习惯上也用 η 表示。对于自由空间，波阻抗为$\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}=377\ \Omega$，习惯上用 η_0 表示。由两个散度方程 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$，$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$ 及式(4.2.24)、(4.2.25)还可得到 $\boldsymbol{E}_0$，$\boldsymbol{H}_0$，$\boldsymbol{\kappa}_0$ 三者正交：

$$\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\boldsymbol{H}_0=0 \tag{4.2.27a}$$

$$\boldsymbol{\kappa}_0\cdot\boldsymbol{E}_0=0 \tag{4.2.27b}$$

$$\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{H}_0=0 \tag{4.2.27c}$$

因此我们可以选择一个特定的坐标系使得

$$\boldsymbol{E}_0=E_0\boldsymbol{x}_0 \tag{4.2.28a}$$

$$\boldsymbol{H}_0=H_0\boldsymbol{y}_0 \tag{4.2.28b}$$

$$\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{z}_0 \tag{4.2.28c}$$

在这个特定坐标系中，电场、磁场、波矢各只有一个分量。于是式(4.2.12)、(4.2.14)成为

$$\boldsymbol{E}=E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\boldsymbol{x}_0 \tag{4.2.29}$$

$$\boldsymbol{H}=H_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\boldsymbol{y}_0 \tag{4.2.30}$$

一般情况下 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 各有 3 个分量。

如果我们定义 z 为纵向，则在这个特定坐标系中，电场、磁场都没有纵向分量。电场、磁场都没有纵向分量的场叫做横电磁模或 TEM 模。平行双导线、同轴线中电磁场就属于 TEM 模。

2. 电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 取平面波形式的解。对式(4.2.12)乘 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ 再取实部得到电场 $\boldsymbol{E}$ 的瞬时表达式

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})=\boldsymbol{E}_0\cos(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \tag{4.2.31}$$

在前面讨论的特定坐标系中 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{H}_0$、$\boldsymbol{k}$ 如式(4.2.28)所示，则上式成为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{x}_0 E_0\cos(\omega t-kz) \tag{4.2.32}$$

式(4.2.32)正是第一章讨论过的波动表达式，它表示沿 z 方向(也就是 $\boldsymbol{k}$ 方向)传播的波，波长 λ 及等相位点运动速度 v_{p} 为

$$\lambda=\frac{2\pi}{k} \tag{4.2.33}$$

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{4.2.34}$$

式(4.2.34)表示波运动的速度等于介质中的光速。

真空中 $\mu=\mu_0$，$\varepsilon=\varepsilon_0$，传播常数 $k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=k_0$，这时等相位点运动速度

$$\frac{\omega}{k_0}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c=3\times10^8\ \mathrm{m/s} \tag{4.2.35}$$

即真空中光速，而波长

$$\lambda_0=\frac{2\pi}{k_0}=\frac{c}{f} \tag{4.2.36}$$

其中 f 为波的频率。

参看图 4－1，在与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的平面内，$\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{k}$ 上的投影都等于 $\overline{OP}$，所以在此平面内的每一点 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ 都相等，也就是说在该平面波的相位到处都一样。这就是我们把式(4.2.12)、(4.2.14)叫做平面波的原因。而且只要 k 是实数，电场 $\boldsymbol{E}$ 或磁场 $\boldsymbol{H}$ 的幅值对于一给定的常数相平面是均匀的，一个平面波具有均匀的幅度，叫做均匀平面波。

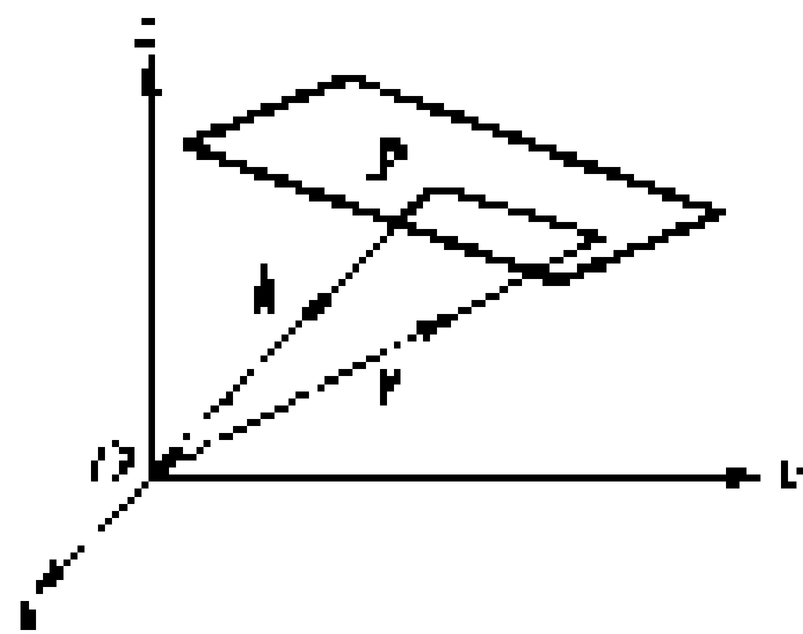


图 4－1　与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的等相位面

由上面的分析可知，平面波的性质主要由波矢 $\boldsymbol{k}$ 决定，因为 $\boldsymbol{k}$ 的方向就是波传播的方向，波长 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}$，等相位点运动速度 $v_{\mathrm{p}}=\omega/k$，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 三者相互垂直构成右手螺旋关系，等相位面是与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的平面。

平面波是被理想化了的。例如从很远的天线辐射来的波严格地说是球面波，但如果观察点被限制在一个局部的小区域，就可近似为一平面波。

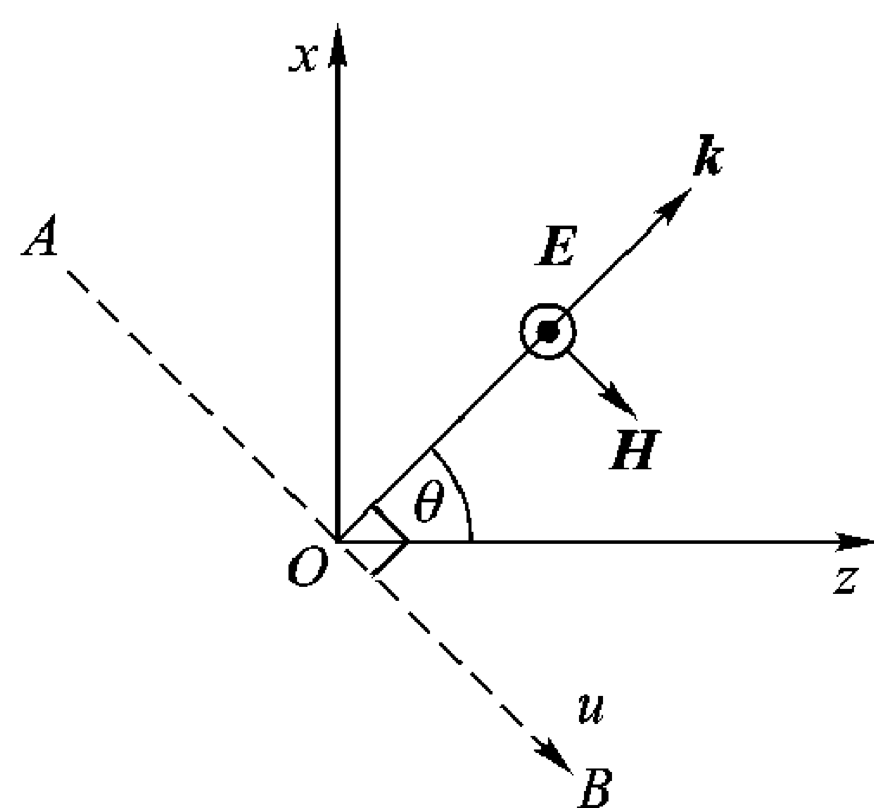


图 4－2　平面波，其传播方向与 z 轴夹角为 θ

例 4－2　平面波传播方向与 z 轴夹角为 θ，电场垂直纸面(即 y 方向)见图 4－2，问磁场 $\boldsymbol{H}$

在什么方向？

解：因为平面波的电场 $\boldsymbol{E}$，磁场 $\boldsymbol{H}$ 以及波矢 $\boldsymbol{k}$ 三者相互垂直并构成右手螺旋关系，根据图 4－2，$\boldsymbol{E}$ 从纸面出来，$\boldsymbol{H}$ 一定平行于纸面且跟 $\boldsymbol{k}$ 垂直，所以 $\boldsymbol{H}$ 平行于图 4－2 的 AOB 线，此外 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 三者又构成右手螺旋关系，所以 $\boldsymbol{H}$ 在 OB 方向，如果 $\boldsymbol{H}$ 的方向为 $\boldsymbol{u}_0$，则 $\boldsymbol{u}_0 = z_0\sin\theta - \boldsymbol{x}_0\cos\theta$。

例 4－3　在 $\varepsilon_r\varepsilon_0$、$\mu_0$ 介质中电场 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0 E_0 e^{-j2k_0 z}$，$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，$\omega = 2\pi\times 10^6$ rad/s，求介质的相对介电常数 ε_r，等相位面、波长 λ、相速 v_p、波阻抗 η 及磁场 $\boldsymbol{H}$。

解：由 $\boldsymbol{E}$ 的指数项表达式可知，$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_r\varepsilon_0} = 2\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 2k_0$，所以 $\varepsilon_r = 4$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = kz = 2k_0 z$，即 $\boldsymbol{k}$ 与 z_0 方向一致，与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的等相位面就是与 z 轴垂直的平面。则

波长

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2k_0} = \frac{2\pi}{2\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{2\pi\times 3\times 10^8}{2\times 2\pi\times 10^6} = 150\ \text{m}$$

相速

$$v_p = \frac{\omega}{2k_0} = \frac{\omega}{2\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{c}{2} = 1.5\times 10^8\ \text{m/s}$$

波阻抗

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{377}{2} = 187.5\ \Omega$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{\nabla\times\boldsymbol{E}}{-j\omega\mu_0} = \frac{-j2k_0 z_0\times\boldsymbol{E}}{-j\omega\mu_0} = \boldsymbol{y}_0\frac{2}{\eta_0}E_0 e^{-j2k_0 z}$$

例 4－4　从微波炉泄漏出的微波场在某一点测得其电场强度为 1 V/m，请问该点功率密度是多少？对人体有否危害？

解：将式(4.2.12)、(4.2.14)代入式(3.6.8)得到时间平均的坡印廷矢量为

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2}\text{Re}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right] = z_0\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}|E_0|^2$$

将 $E_0 = 1$ 以及自由空间的 ε_0、μ_0 代入，得到

$$\langle S_z\rangle = \frac{1}{2\times 120\pi}\ \text{W/m}^2 = 0.133\ \mu\text{W/cm}^2$$

按美国制定的安全标准，人暴露在微波场中微波功率密度不超过 10 mW/cm^2，时间不得超过 6 min，所以上述微波泄漏对人不会有损害。

4.3　极化

电磁波的极化描述电磁波运动的空间性质。

对于时谐电磁场，空间固定点的电场 $\boldsymbol{E}$ 随时间作简谐变化。波的极化可以用固定点的电场矢量末端点在与波矢 $\boldsymbol{k}$ 垂直的平面内投影随时间运动的轨迹来描述。如果电场矢量末端点运动轨迹是一条直线，这种波叫做线极化波。如果末端点运动轨迹是一圆，叫做圆极化波。如果末端点运动轨迹是一椭圆，就叫做椭圆极化波。太阳光、普通照明光源发出的光可以是随机极化的，这种电磁波叫做非极化波。电磁波也可能是部分极化。部分极化波可以看成是极化波与非极化波的混合。

将式(4.2.32)重写如下

$$\boldsymbol{E}(z,t)=E_0\cos(\omega t-kz)\boldsymbol{x}_0$$

在 z 的任何位置，电场 $\boldsymbol{E}$ 矢量末端点轨迹随时间变化，但总是在 x 轴上，最大位移为 E_0，因此式(4.2.32)表示的平面波是线极化波。

现在考虑下式表示的平面波

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{x}_0E_{xm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_a)}+\boldsymbol{y}_0E_{ym}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_b)} \tag{4.3.1}$$

式中 φ_a、φ_b 为电场 x 分量、y 分量的初相。根据时谐矢量的复矢量表示的定义，可得

$$E_x(z,t)=\mathrm{Re}\left[E_{xm}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_a)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=E_{xm}\cos(\omega t-kz+\varphi_a) \tag{4.3.2a}$$

$$E_y(z,t)=\mathrm{Re}\left[E_{ym}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz-\varphi_b)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=E_{ym}\cos(\omega t-kz+\varphi_b) \tag{4.3.2b}$$

式中 E_{xm}，E_{ym}为实数。为了得到电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 末端点在 $x-y$ 平面随时间变化的轨迹方程，需将式(4.3.2a)与式(4.3.2b)中 $\omega t-kz$ 消去得到关于 E_x、E_y 的方程。分以下几种情况：

线极化

定义 $\varphi=\varphi_b-\varphi_a$，如果 $\varphi=0$ 或 π，那么 E_x、E_y 满足的方程为

$$E_y=\pm\left(\frac{E_{ym}}{E_{xm}}\right)E_x \tag{4.3.3}$$

在 E_x-E_y 平面，这是关于斜率为 $\pm\frac{E_{ym}}{E_{xm}}$的直线。$\varphi=0$ 取正号，$\varphi=\pi$ 取负号。$\varphi=\pi$ 的情况见图 4－3。

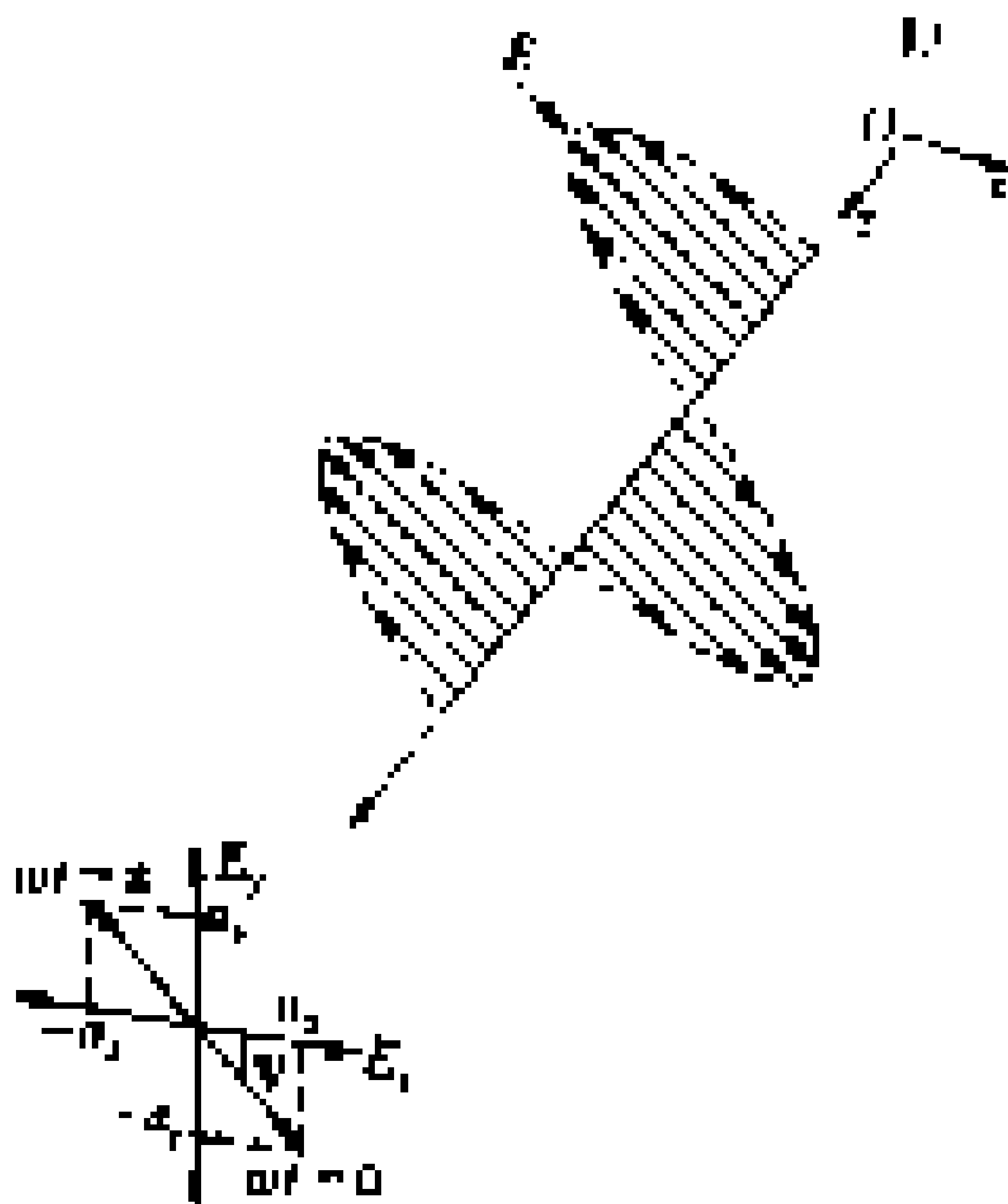


图 4－3　线极化

圆极化

如果 $\varphi=\varphi_b-\varphi_a=\pm\frac{\pi}{2}$，$A=\frac{E_{ym}}{E_{xm}}=1$，先考虑 $\varphi=\pi/2$，$A=1$，式(4.3.2)成为

$$E_x = E_{xm}\cos(\omega t - kz + \varphi_a) \tag{4.3.4a}$$

$$E_y = -E_{xm}\sin(\omega t - kz + \varphi_a) \tag{4.3.4b}$$

消去 t，得到

$$E_x^2 + E_y^2 = E_{xm}^2 \tag{4.3.5}$$

其图解在 $E_x - E_y$ 平面这是一个圆，所以是圆极化的。圆的半径等于 E_{xm}，注意电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 末端点随时间是顺时针转的，如果用左手顺着旋转方向，大拇指就指向 z，故称左手极化波。当 $\varphi = -\pi/2$，$A = 1$ 时，也得到一个圆极化波，但这是右手圆极化波，即当右手四指顺着矢量端点旋转时，大拇指就是 $+z$ 的方向。由螺旋天线辐射的右旋圆极化波，其电场矢量末端点运动轨迹见图 4-4。

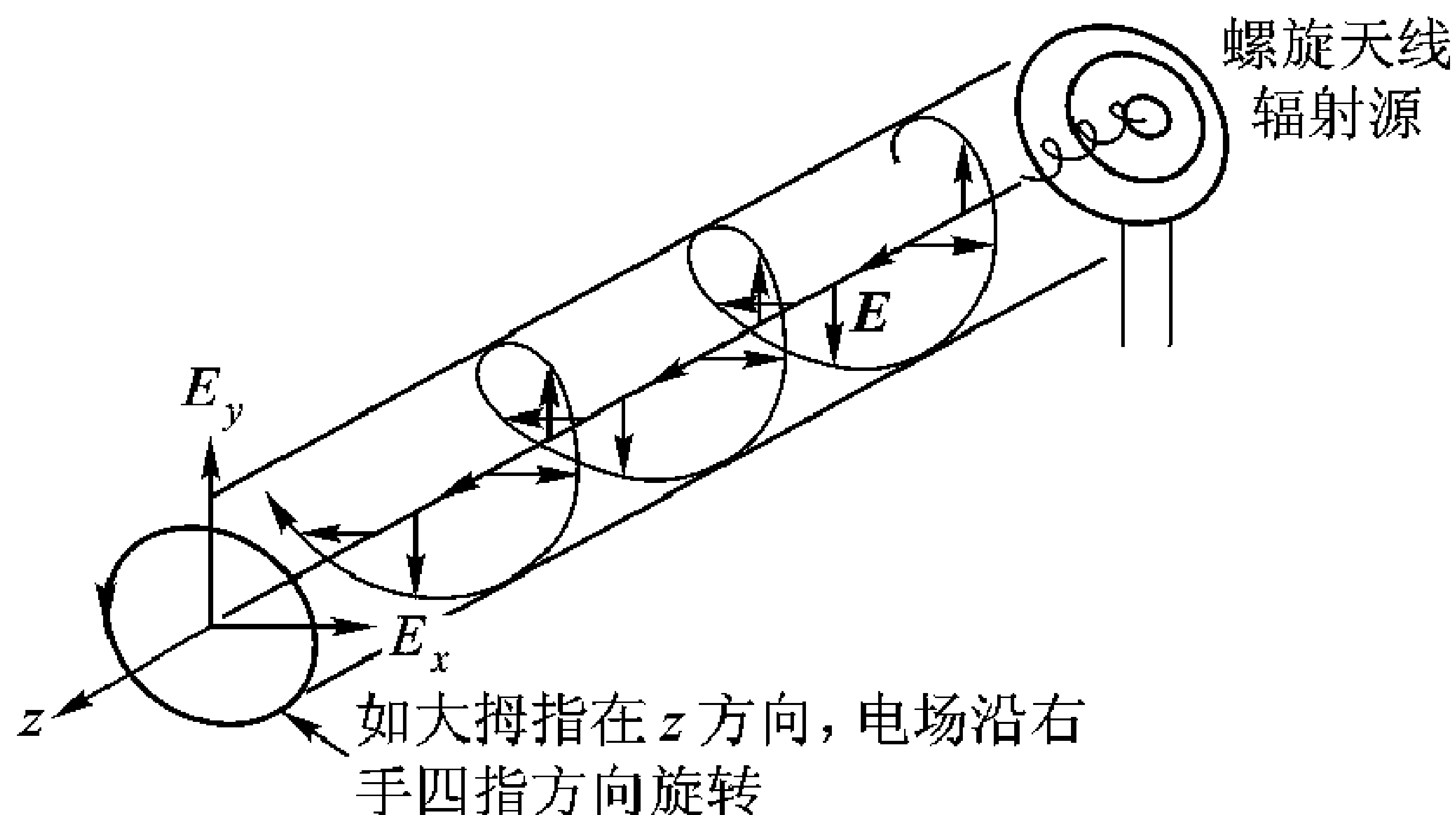


图 4-4　圆极化(右旋)

椭圆极化

除了线极化和圆极化这两种特殊情况外，式(4.3.1)表示的平面波都是椭圆极化的。

由式(4.3.2)及 $\varphi = \varphi_b - \varphi_a$ 的定义可得

$$\frac{E_x}{E_{xm}}\sin\varphi_b - \frac{E_y}{E_{ym}}\sin\varphi_a = \cos(\omega t - kz)\sin\varphi \tag{4.3.6a}$$

$$\frac{E_x}{E_{xm}}\cos\varphi_b - \frac{E_y}{E_{ym}}\cos\varphi_a = -\sin(\omega t - kz)\sin\varphi \tag{4.3.6b}$$

求以上两式的平方和，则可消去式中的 $\omega t - kz$，得到

$$\frac{E_x^2}{E_{xm}^2} + \frac{E_y^2}{E_{ym}^2} - \frac{2\cos\varphi}{E_{xm}E_{ym}}E_xE_y - \sin^2\varphi = 0 \tag{4.3.7}$$

这是一个椭圆方程，它说明 E_x、E_y 合成矢量 E 的端点轨迹为椭圆(图 4-5)，故称为椭圆极化。椭圆的中心在原点，椭圆内切于边长为 $2E_{xm}$、$2E_{ym}$的矩形。椭圆

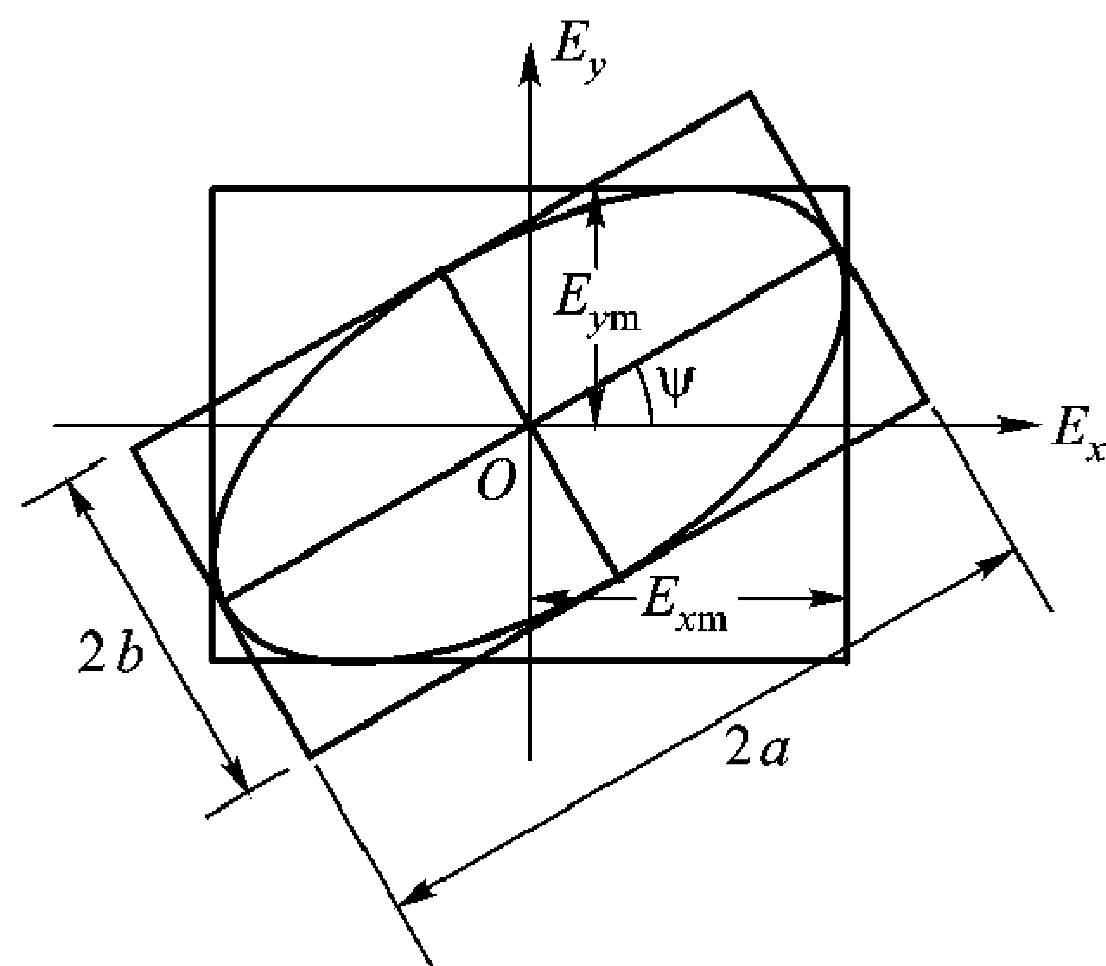


图 4-5　椭圆极化

的长轴 $2a$、短轴 $2b$ 以及椭圆的取向角 ψ 满足

$$a^2 + b^2 = E_{xm}^2 + E_{ym}^2 \tag{4.3.8a}$$

$$\pm ab = E_{xm}E_{ym}\sin\varphi \tag{4.3.8b}$$

$$\tan 2\psi = \frac{2E_{xm}E_{ym}}{E_{xm}^2 - E_{ym}^2}\cos\varphi \tag{4.3.8c}$$

为了预示电场矢量末端点运动轨迹的形状与旋转方向，我们把前面几种情况都表示在一复平面上，在该平面上每一点都对应一幅度 A 与相位 φ（见图 4-6），假定复矢量表示的电场

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{x}_0 E_x + \boldsymbol{y}_0 E_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{4.3.9}$$

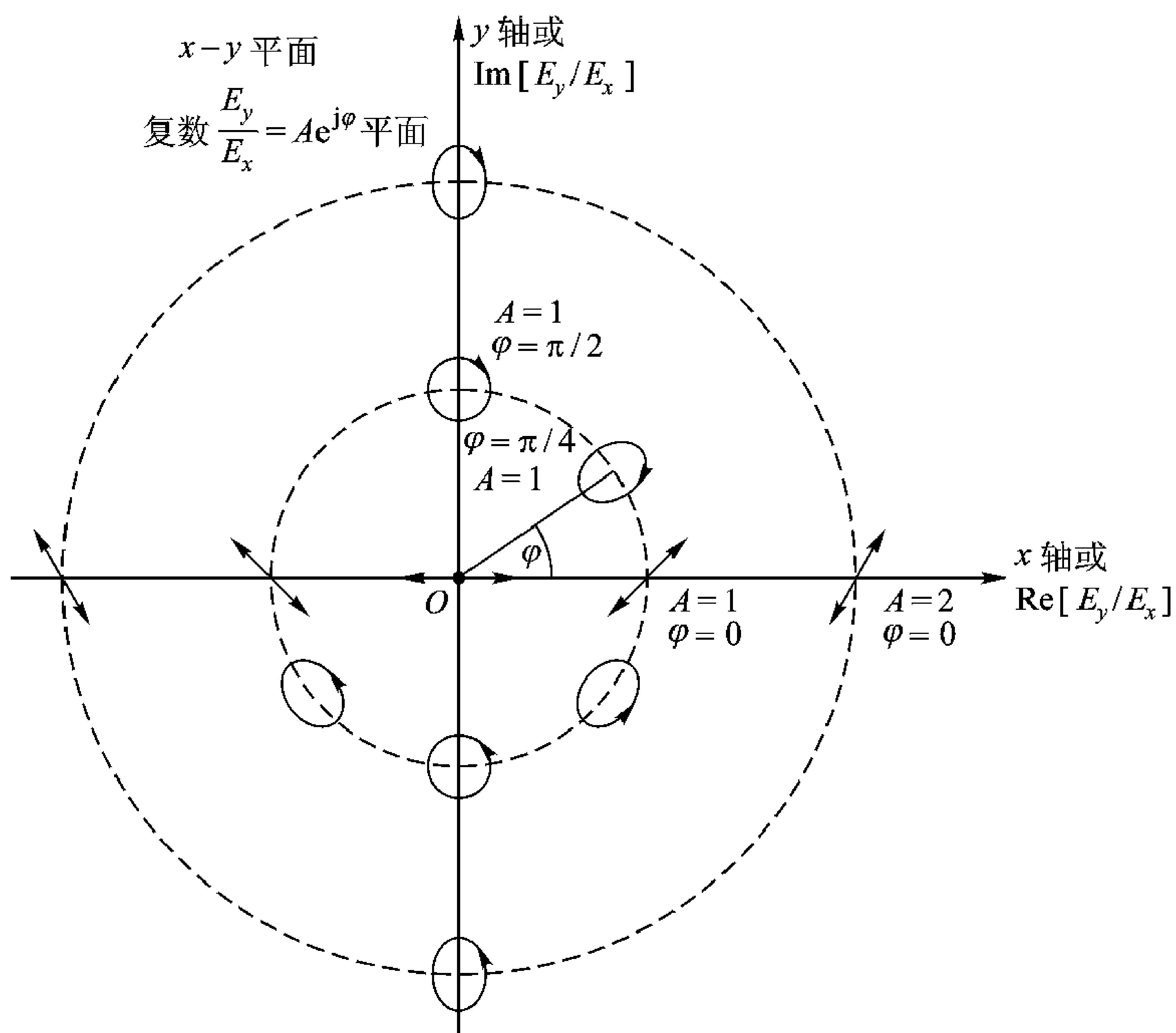


图 4-6　极化图（波的极化取决于比值 $\frac{E_y}{E_x}$，波的传播方向为 z_0）

A 和 φ 由下式定义：

$$E_y/E_x = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{4.3.10}$$

那么对于线极化波，E_y/E_x 在该复平面对应的点就是实轴，$\varphi = 0$ 或 π。对于圆极化，在该复平面对应的点就是 $A = 1$，$\varphi = \pm\pi/2$。进一步研究表明，如果 E_y/E_x 落在上半平面，都是左手椭圆极化的，落在下半平面都是右手椭圆极化的。当虚轴 $y\to\infty$ 时，近似为线极化波，因为此时电场的 E_x 分量可略去。

例 4－5　当 $E_{xm}=E_{ym}$，$\varphi_b-\varphi_a=\pi/2$，$\boldsymbol{E}$ 由式(4.3.1)表示，求出磁场矢量末端点的运动轨迹。

解：由麦克斯韦方程(4.1.1)以及式(4.3.1)表示的电场，磁场 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{x}_0\frac{E_{ym}}{\eta_0}e^{j\varphi_b}e^{-jkz}+\boldsymbol{y}_0\frac{E_{xm}}{\eta_0}e^{j\varphi_a}e^{-jkz}$$

所以在时域中磁场分量 H_x，H_y 为

$$H_x(z,t)=\frac{E_{xm}}{\eta_0}\sin(\omega t-kz+\varphi_a)$$

$$H_y(z,t)=\frac{E_{xm}}{\eta_0}\cos(\omega t-kz+\varphi_a)$$

因此

$$H_x^2+H_y^2=\left(\frac{a}{\eta_0}\right)^2$$

磁场矢量末端运动轨迹也是一个圆，与式(4.3.4)比较，在 $kz=\varphi_a$，$\omega t=0$ 时，$\boldsymbol{E}$ 在 x 方向，$\boldsymbol{H}$ 在 y 方向，随时间演变，它们按同样方向旋转，且永远相互垂直，见图 4－7。

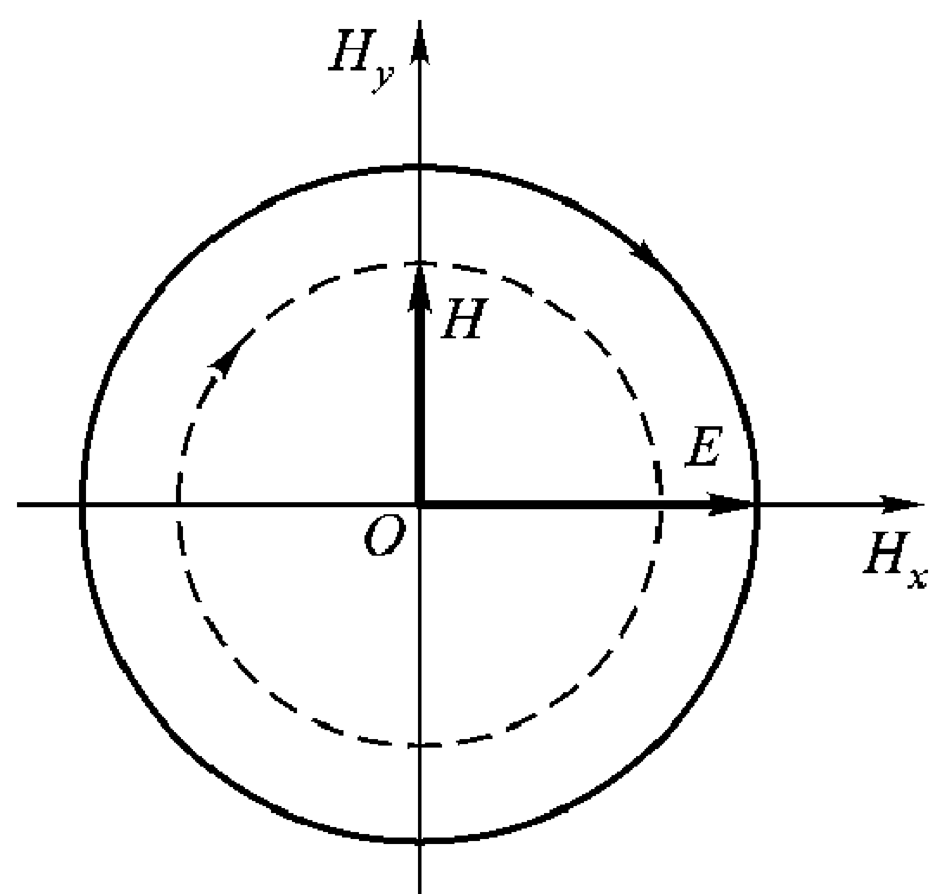


图 4－7　圆极化波的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 场

无线电波与电视信号的接收

调幅电台辐射的电磁波其电场垂直于地面平行于天线塔。所以收音机天线就要安置得与电场方向平行即与地面垂直接收效果才最好。但是对于电视广播，电场 $\boldsymbol{E}$ 与地面平行，所以电视机接收天线就要与地面平行，且对准电视发射台方向。很多调频广播电台，波是圆极化的，接收天线就可任意放置，只要对准电视信号发来的方向。

应用正交极化的通信系统

为了增加特定频率范围内的通信容量，某些卫星通信系统利用正交极化的两个波束，使通信容量比单极化通信系统增加一倍。

4.4　有耗介质中的平面波

导体是非常重要的一类介质，电导率 σ (单位是 S/m)是其特征参数。对于各向同性导体，欧姆定律为

$$\boldsymbol{J}_c = \sigma \boldsymbol{E} \tag{4.4.1}$$

$\boldsymbol{J}_c$ 是传导电流密度。计及传导电流密度后，安培全电流定律的微分形式为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega \boldsymbol{D} + \boldsymbol{J}_c$$

对于各向同性介质，将 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{J}_c = \sigma \boldsymbol{E}$ 代入安培全电流定律描述的方程，得到

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\left(\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}\right)\boldsymbol{E}$$

如果我们定义复介电常数

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega} \tag{4.4.2}$$

那么，复介电常数的虚部就表示介质电导率的影响，这里我们用 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 表示复介电常数。

引入复介电常数后，麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega\mu \boldsymbol{H} \tag{4.4.3a}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = j\omega\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{E} \tag{4.4.3b}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{4.4.3c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{4.4.3d}$$

对式(4.4.3a)两边取旋度并将式(4.4.3b)代入，可得到波方程

$$(\nabla^2 + \omega^2\mu\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}})\boldsymbol{E} = 0$$

或

$$(\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{E} = 0$$

式中

$$k^2 = \omega^2\mu\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{4.4.4}$$

其解也是平面波，如在特定坐标系下，使得 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 都只有一个分量，便得到

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0 E_0 e^{-jkz} \tag{4.4.5a}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{y}_0\left(\frac{E_0}{\eta}\right)e^{-jkz} \tag{4.4.5b}$$

式中

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}} \tag{4.4.6}$$

η 为导电介质的波阻抗。因为 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 是复数，所以导电介质中 k、η 都是复数，定义

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2} = k_r - jk_i \tag{4.4.7}$$

式中 $\sigma/\omega\varepsilon$ 叫做导电介质的损耗正切。并有

$$\eta = |\eta| e^{j\varphi} \tag{4.4.8}$$

$|\eta|$、φ 分别为复数本征阻抗 η 的模和相角。k_r，k_i 分别为 k 的实部和虚部，并假定为正实数，k_i 前面取负号使所得到的解当 k_i 取正实数时有物理意义。将式(4.4.6)、(4.4.7)代入式(4.4.5)，得到

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0 E_0 e^{-k_i z} e^{-jk_r z} = \boldsymbol{x}_0 E_x \tag{4.4.9}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{y}_0 \frac{E_0}{|\eta|} e^{-k_i z} e^{-jk_r z} e^{-j\varphi} \tag{4.4.10}$$

$\boldsymbol{E}$ 的瞬时值为

$$E_x = E_0 e^{-k_i z} \cos(\omega t - k_r z) \tag{4.4.11}$$

式(4.4.11)表示的波 z 方向传播的速度为

$$v = \frac{\omega}{k_r}$$

随着波向 $+z$ 方向传播，幅度则按指数规律衰减，其衰减速率为 k_i，单位为奈贝每米(N/m)。如果式(4.4.7) k_i 前面取 $+$ 号，则随着波向 $+z$ 方向传播，幅度不断增加，不符合实际情况，所以 k_i 前应取负号。现在我们定义穿透深度 d_p，当 $k_i z = k_i d_p = 1$ 时，按式(4.4.11)，场幅度衰减到 $z=0$ 处的 $1/e$。显然 d_p 为

$$d_p = \frac{1}{k_i}$$

以上讨论表明，当介电常数 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_r - j\varepsilon_i$ 为复数时，虚部 ε_i 的影响就是使正 z 方向传播的波衰减，故虚部 ε_i 表示介质的损耗。

为简化书写，以后不再区分用 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ 表示的复介电常数以及 ε 表示的实介电常数，不管介质有耗还是无耗都用 ε 表示。下面分几种情况分析电导率 σ 对波传播的影响。

电导率很小的介质

电导率很小的介质，其 $\sigma/\omega\varepsilon \ll 1$，式(4.4.7)可近似为

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)} \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - j\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right)$$

所以

$$k_r = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{4.4.12a}$$

$$k_i = \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{4.4.12b}$$

因此在电导率很小的介质中，波以传播常数 k_r 沿正 z 方向传播，其幅度不断衰减，衰减速率为 k_i (N/m)，每行进 d_p 距离，其值为

$$d_p = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \tag{4.4.13}$$

场衰减到 1/e。

电磁波穿透冰层的深度

冰的电导率很小，$\sigma \approx 10^{-6}$ S/m，$\varepsilon \approx 3.2\varepsilon_0$，损耗正切 $= 10^{-6}/(2\pi f \times 3.2 \times 8.85 \times 10^{-12}) = 5.6 \times 10^3/f$，当频率在兆赫范围，损耗正切是很小的。其穿透深度 $d_p \approx 9.5$ km，这就是说在兆赫频率范围内，电磁波用于探测冰层厚度是很好的。美国阿波罗登月飞行也利用兆赫范围频率电磁波，因在该频率范围月球表面电导率也很低，电磁波有较大的穿透深度。

对于更高的频率，由于冰层中含有气泡，气泡中空气对高频电磁波产生散射，上面简单的模型对于更高频率的电磁波不再适用。

电导率很大的介质

电导率很大的介质叫良导体，$\sigma/\omega\varepsilon \gg 1$，此时 k 近似为

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^{1/2} \approx \sqrt{\omega\mu\left(\frac{\sigma}{2}\right)}(1 - \mathrm{j}) \tag{4.4.14}$$

因此穿透深度为

$$d_p = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} = \delta \tag{4.4.15}$$

δ 表示 d_p 很小很小，习惯上叫做趋肤深度。这就是说对于良导体电磁场主要集中在表面趋肤深度 δ 厚度的薄层内，这种效应叫做趋肤效应。

完纯导体

对于完纯导体，$\sigma \to \infty$，趋肤深度 $\delta \to 0$，导体内没有电磁场，此时欧姆定律，

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$$

因为 $\sigma \to \infty$，欲保证表面电流有限，$\boldsymbol{E} \to 0$。

对于 Au，Ag，Cu，Al 等良导体，可被视为完纯导体，例如 Cu 的电导率 $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m。某些金属在极低温度下呈超导特性，叫做超导体，超导铅在 4.2 K 对于直流其电导率 σ 大于 2.7×10^{20} S/m。

例 4－6 海水的 $\sigma = 4$ S/m，$\varepsilon = 81\varepsilon_0$，$\mu = \mu_0$，求 60 Hz，1 MHz，100 MHz 3 个频率下海水的复介电常数 ε。

解：

$$\varepsilon = 81\varepsilon_0 - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}$$

$$= 81\varepsilon_0\left(1 - \mathrm{j}\frac{\sigma}{81\omega\varepsilon_0}\right)$$

$$
=\begin{cases}81\varepsilon_0\ (1-\mathrm{j}1.48\times10^7) & (f=60\ \mathrm{Hz})\\ 81\varepsilon_0\ (1-\mathrm{j}8.9\times10^2) & (f=1\ \mathrm{MHz})\\ 81\varepsilon_0\ (1-\mathrm{j}8.9) & (f=100\ \mathrm{MHz})\end{cases}
$$

虚部越大，表示导电性能越好，所以对于频率低于 100 MHz 电磁波，海水可视作导体。

例 4－7　海水的特征参数同例 4－6，$f=100$ Hz，水表面电场强度为 1 V/m，问 100 m 深处电场强度多大？

解： 当 $f=100$ Hz 时

$$
\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}=\frac{4\times36\pi\times10^9}{2\pi\times10^2\times81}>>1
$$

所以对 100 Hz 频率，海水是良导体，可用式(4.4.15)求出

$$
d_{\mathrm{p}}=\frac{1}{\sqrt{\pi\times10^2\times4\pi\times10^{-7}\times4}}=25.2\ \mathrm{m}
$$

所以 100 m 深处场强为

$$
\mathrm{e}^{-100/25.2}\times1\ \mathrm{V/m}=0.018\ 8\ \mathrm{V/m}
$$

例 4－8　继续例 4－7，水表面功率密度是多少？

解： 用式(4.4.9)～(4.4.10)得到

$$
\langle S\rangle=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\frac{E_0^2}{|\eta|}(\mathrm{e}^{-2k_iz}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi})\,z_0\right]=\frac{E_0^2}{2|\eta|}\mathrm{e}^{-2k_iz}\cos\varphi z_0
$$

因为

$$
\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}=\varepsilon-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}=81\times8.854\times10^{-12}-\mathrm{j}\frac{4}{2\pi\times100}\approx-\mathrm{j}6.37\times10^{-3}
$$

$$
\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\sqrt{4\pi\times\frac{10^{-7}}{-\mathrm{j}6.37\times10^{-3}}}=1.4\times10^{-2}\sqrt{\mathrm{j}}
$$

所以

$$
|\eta|=1.4\times10^{-2}
$$

$$
\varphi=45^\circ
$$

在 $z=0$ 处，$|E|=1$ V/m，所以

$$
\langle S\rangle=z_0 25.3\ \mathrm{W/m^2}
$$

潜艇间通信

由于电磁波在海水中传播衰减很快，这给潜艇间通信带来了困难。海水的相对介电常数差不多为 81，平均电导率为 4 S/m，从式(4.4.7)可得衰减常数

$$
k_i=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/4}\sin\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\right]
$$

随着频率增加，损耗不断增加，在很高的频率，式(4.4.12b)适用，有

$$k_{\mathrm{i}}=\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}=83.8\ \mathrm{N/m}=728\ \mathrm{dB/m}$$

这个衰减系数非常大，波每传播4 mm距离，功率就衰减一半。

为使损耗减小，工作频率必须降低，但是即使 $f=1$ kHz，衰减还是较大，按式(4.4.7)有

$$k_{\mathrm{i}}=0.126\ \mathrm{N/m}=1.1\ \mathrm{dB/m}\qquad (\text{频率为 1 kHz 时})$$

因此，在1 kHz频率，电磁波在海水中传播100 m，其衰减达到110 dB。如应用更低的频率，可传播的信号速率就很小。

例4-9 为屏蔽电磁波，屏蔽室铜包层厚度要大于5倍趋肤深度，如果要屏蔽的电磁波频率范围为10 kHz~100 MHz，求铜外包层的厚度(用mm表示)。

解：对于Cu，$\mu=\mu_0$，$\varepsilon=\varepsilon_0$，$\sigma=5.8\times10^7$ S/m，当 $f=10^4$ Hz时

$$\frac{\sigma}{\omega}=\frac{5.8\times10^7\times36\pi\times10^9}{2\pi\times10^4}>>1$$

所以铜是良导体，用式(4.4.15)计算

$$d_{\mathrm{p}}=\frac{1}{\sqrt{\pi\times10^4\times4\pi\times10^{-7}\times5.8\times10^7}}=0.66\ \mathrm{mm}$$

所以铜包层厚度要大于3.3 mm。

随频率升高，趋肤深度减小，3.3 mm厚度的Cu包层对于屏蔽10 kHz到100 MHz电磁波是足够的。

微波炉

微波炉中的磁控管将50 Hz的市电功率转换为微波功率(一般工作频率为915 MHz、2450 MHz)，再用微波对食物加热。用微波加热食物的原理是多数食物对于微波为有耗介质，微波穿透这些食物时，在食物内部的微波损耗就转变为热。特点是升温速度快，而且可从食物内部热起来。牛排的损耗正切很大，所以牛排可用微波烹饪。因为聚乙烯的介电常数接近自由空间介电常数，损耗很小，对微波可看作透明，所以这种材料可做加热食物的容器。

牛排的介电常数近似为 $\varepsilon=40(1-\mathrm{j}0.3)\varepsilon_0$，在 $f=3$ GHz时，其复数波数

$$k=402-\mathrm{j}59$$

穿透深度 $d_{\mathrm{p}}=1/k_{\mathrm{i}}=1.7$ cm，所以在接近牛排表面0.85 cm的范围内，微波功率损耗为63%，尚有37%功率可用于加热离表面0.85 cm以内的牛排。

4.5 色散与群速

色散的名称来源于光学。当一束阳光投射到三棱镜上时，在棱镜的另一边

就可看到赤、橙、黄、绿、蓝、青、紫七色光散开的图像。这就是光波段电磁波的色散现象，这是由于不同频率的光在棱镜中具有不同的介电系数(或折射率)，即具有不同的相速度所致。对于理想介质，$k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，$k$ 与 ω 成正比，相速 v_p 与频率 ω 无关，所以理想介质是非色散介质。如果 k 与 ω 不成线性关系，相速 v_p 与 ω 有关，这种介质就称为色散介质。对于有损耗介质，有

$$k=\omega\sqrt{\mu\tilde{\varepsilon}}=\omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1-\mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}$$

k 是 ω 的复杂函数，v_p 与 ω 有关，所以有耗介质一定色散的。反过来，色散介质一定是有损耗的。

引起色散的原因是多方面的，介质色散只是其一。其他原因引起的色散，本书后面还会讨论。

当信号加到电磁波载体上传播时，因为任何信号可表示为任一时间函数，我们总可用傅里叶展开将信号表示为无数不同频率正弦波的叠加。如果每个频率正弦波的相速相同，那么信号传播一段距离后其合成波形与初始波形不会有变化。如果信号所包含的各频率分量相速不等，那么信号传播一段距离后，信号各分量合成的波形将与起始时的波形不同。图 4-8 表示矩形脉冲波经光纤长距离传输后因色散畸变为一钟形波，光脉冲变宽后有可能使接收端的前后两个脉冲无法分辨，从而限制光纤传输的最大码率。

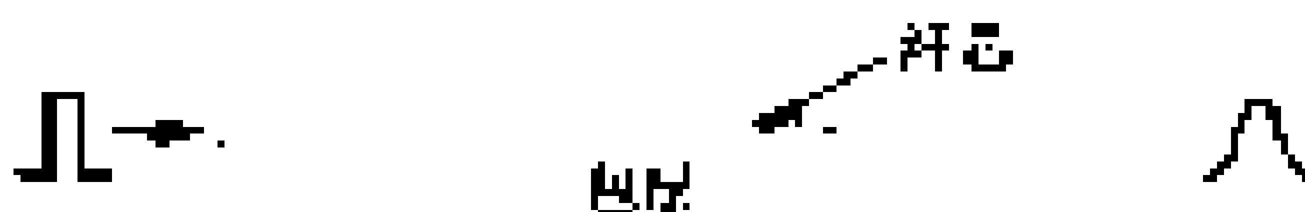


图 4-8 光纤色散引起传输信号的畸变

以 $E(z,t)=E_0\cos(\omega t-kz)$ 表示的平面波是在时间、空间上无限延伸的单频率的电磁波，叫做单色波。单色波不能传播信息。信号加到电磁波上就不再是单色波。非单色波的传播与单色波的传播有什么区别呢？下面考虑一种最简单的情况，传播的信号只含两个频率分量，一个比载波 ω_c 略高，为 $\omega_c+\mathrm{d}\omega$，另一个比 ω_c 略低，为 $\omega_c-\mathrm{d}\omega$，其瞬时表达式为

$$E(t)=E_0\cos(\omega_c-\mathrm{d}\omega)t+E_0\cos(\omega_c+\mathrm{d}\omega)t$$

此信号沿波导传播 z 距离后，两个波的合成为

$$E(z,t)=E_0\cos\left[(\omega_c-\mathrm{d}\omega)t-(k_{z_c}-\mathrm{d}k_z)z\right]+\cos\left[(\omega_c+\mathrm{d}\omega)t-(k_{z_c}+\mathrm{d}k_z)z\right]$$

上式可写成更简洁的形式

$$E(z,t)=2E_0\cos\left[(\mathrm{d}\omega)t-(\mathrm{d}k_z)z\right]\cos(\omega_c t-k_{z_c}z)$$

因此，该信号可看成是一高频载波 $\cos(\omega_c t-k_{z_c}z)$，其振幅被低频波 $\cos\left[(\mathrm{d}\omega)t-(\mathrm{d}k_z)z\right]$调制，见图 4-9。类似于式(1.3.4)的推导，振幅包络的传播速度为

$$V_g = \mathrm{d}\omega / \mathrm{d}k_z \tag{4.5.1}$$

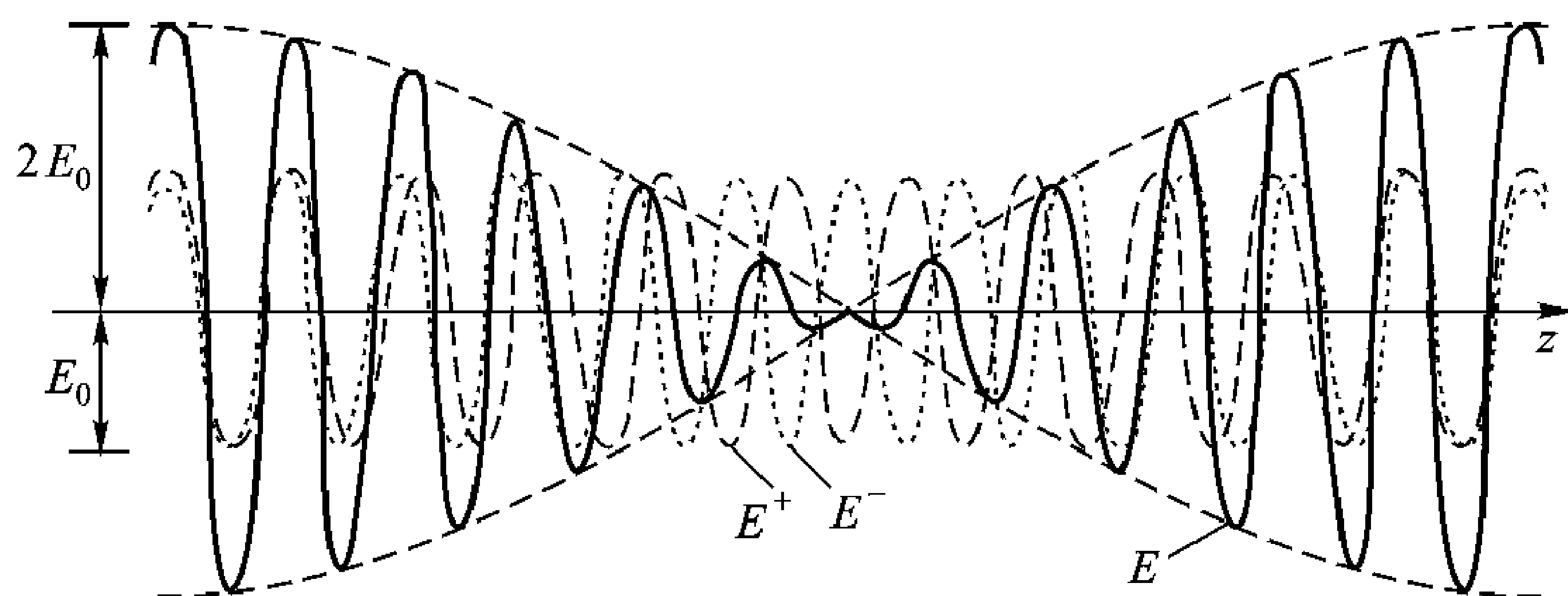


图 4－9　合成波的振幅被 Δω 的波所调制

如果有更复杂的信号波形，信号中包含更多的频率分量，假定波导(导引电磁波的结构)色散比较小，那么在一个不大的频率范围内，整个信号包络可近似为以 v_g 速度在传播。

信号包络运动的速度才真正表示信号传播的速度，也就是电磁能流运动的速度，故称 v_g 为波导的群速。

利用 $v_p = \omega / k_z$ 表达式，群速可进一步表示为

$$v_g = \frac{v_p}{1 - \frac{\omega}{v_p}\left(\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega}\right)} \tag{4.5.2}$$

由式(4.5.2)可见，如果 v_p 与频率无关，即 $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} = 0$，则群速等于相速，$v_g = v_p$。对于以前讨论的平行双导线、同轴线，当工作于 TEM 模时，v_p 与频率无关，v_p 等于 v_g，且都等于传输线所在介质的光速。

$$v_p = v_g = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

当 $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} \neq 0$ 时，即相速是频率的函数时，$v_g \neq v_p$，这时又分两种情况：当 $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} < 0$ 时，$v_g < v_p$，这类色散称为正常色散；当 $\frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}\omega} > 0$ 时，$v_g > v_p$，这类色散被称为非正常色散。这里“正常”、“非正常”并没有特别的含义，只是表示两种不同的色散类型。

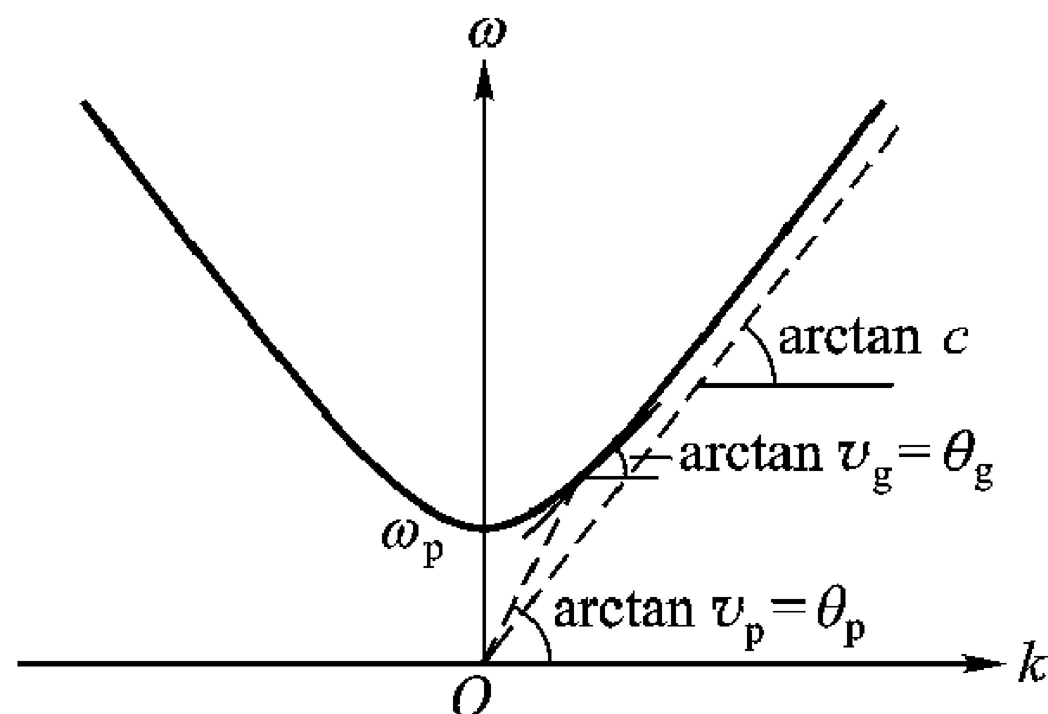


图 4－10　等离子体色散曲线

色散特性 $k(\omega)$ 在 $\omega - k$ 平面上表示为一条曲线，图 4－10 是典型的等离子体

的色散曲线。曲线上任一点与原点连线斜率 $\tan\theta_p$ 表示该点相速 v_p，而切线斜率 $\tan\theta_g$ 表示该点群速 v_g，θ_p、θ_g 的意义亦示于图 4-10 中。因为根据式(3.5.8)，对于等离子体，$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0(1-\omega_p^2/\omega^2)}$，当 $\omega=\omega_p$ 时，$k=0$，$\omega\to\infty$ 时，$k=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$。对于无色散介质，色散曲线是从原点出发斜率为 $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 的直线。

4.6 平面波传播的传输线模型

如果我们把前面得到的关于 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 平面波解与第 2 章传输线上电压、电流波的解作一比较，不难发现两者十分相似。如果能将电磁波的传播用传输线上电压、电流波的传播等效，这将十分有助于对电磁波传播的理解，同时也可借用成熟的传输线理论与技术处理电磁波的传播问题。本节将证明如果电磁波按 TE、TM 模分解，那么对每种模式的横向电磁场量沿纵向的传播就可用传输线上电压、电流的传播等效。

4.6.1 TEM 模传播的传输线模型

对于式(4.2.29)、(4.2.30)表示的 TEM 模，波沿纵向 z 轴传播，电场只有 x 分量，磁场只有 y 分量，两者都没有纵向分量[如图 4-11(a)]，即

$$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{x}_0$$

$$E_x=E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{4.6.1}$$

$$\boldsymbol{H}=H_y\boldsymbol{y}_0$$

$$H_y=H_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\frac{E_0}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{4.6.2}$$

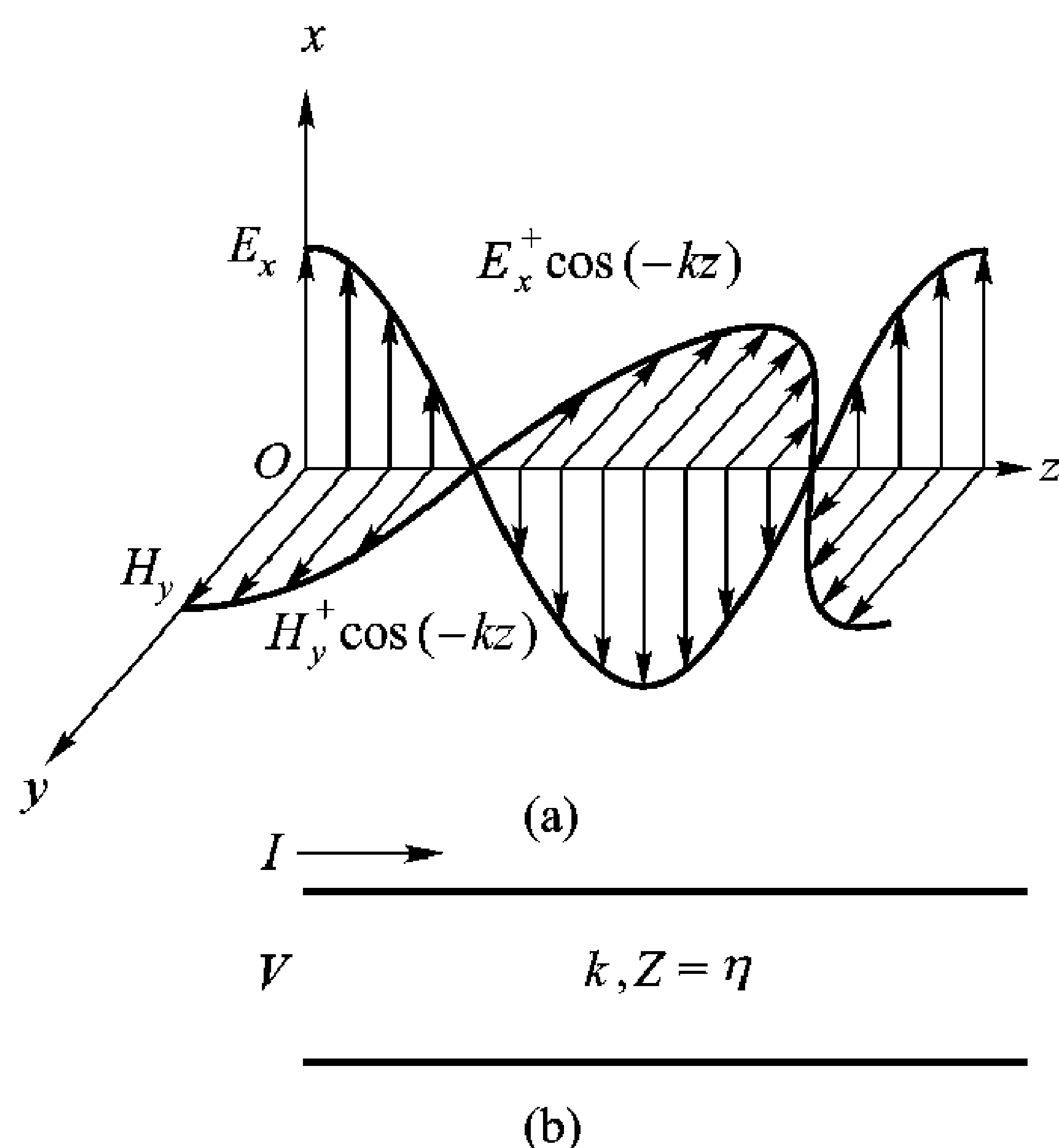


图 4-11 TEM 模的传输线模型

(a) TEM 模场 (b) 等效传输线

如果我们把 E_x 写成模式函数 φ 与电压 $V(z)$ 的乘积，H_y 写成模式函数 φ 与电流 $I(z)$ 的乘积，即

$$E_x=\varphi V(z)$$

$$H_y=\varphi I(z)$$

式中

$$V(z)=E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \tag{4.6.3}$$

$$I(z)=\frac{E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}}{\eta} \tag{4.6.4}$$

$$\varphi=1$$

那么 $V(z)$、$I(z)$ 将满足传输线方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}kZI(z) & (4.6.5) \\ \dfrac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}kYV(z) & (4.6.6) \end{cases}$$

式中

$$Z = \frac{1}{Y} = \eta \tag{4.6.7}$$

Z 为传输线的特征阻抗，Y 为特征导纳，k 为传输线的传播常数。

这就是说就平面波沿波矢 k 方向（z 方向）的传播与特征阻抗为 η，传播常数为 k 的传输线上电压、电流波的传播相当[见图 4 - 11（b）]。

4.6.2 TE 模传播的传输线模型

TE 模场分布的特点是对于所选定的纵向（一般取 z 为纵向）电场 $\boldsymbol{E}$ 只有横向分量，没有纵向分量。如果坐标系的选择使得波矢 $\boldsymbol{k}$ 只有 k_x、k_z 两个分量，即 $\boldsymbol{k}$ 在 $x-z$ 平面内，$k_y=0$，就表示场在 y 方向没有变化。电场与 $\boldsymbol{k}$ 垂直，即与 $x-z$ 平面垂直，故只有 y 分量 E_y。因为 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 三者相互垂直，构成右手螺旋关系，所以 $\boldsymbol{H}$ 在 $\boldsymbol{k}$ 所在的 $x-z$ 平面，但与 $\boldsymbol{k}$ 垂直，如图 4 - 12（a）。因为 $\boldsymbol{k}$ 只有两个分量，$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$，所以在图 4 - 12（a）所示坐标系中

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = (k_x\boldsymbol{x}_0+k_z\boldsymbol{z}_0)\cdot(x\boldsymbol{x}_0+y\boldsymbol{y}_0+z\boldsymbol{z}_0) = k_x x + k_z z$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{y}_0 E_y = -\boldsymbol{y}_0 E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{4.6.8}$$

式中

$$E_y = -E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{4.6.9}$$

利用旋度方程 $-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} = \nabla\times\boldsymbol{E} = \nabla\times\boldsymbol{y}_0E_y = \boldsymbol{z}_0\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \boldsymbol{x}_0\dfrac{\partial E_y}{\partial z}$，得到

$$\boldsymbol{H} = H_x\boldsymbol{x}_0 + H_z\boldsymbol{z}_0 \tag{4.6.10}$$

$$H_x = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{k_z}{\omega\mu}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{4.6.11}$$

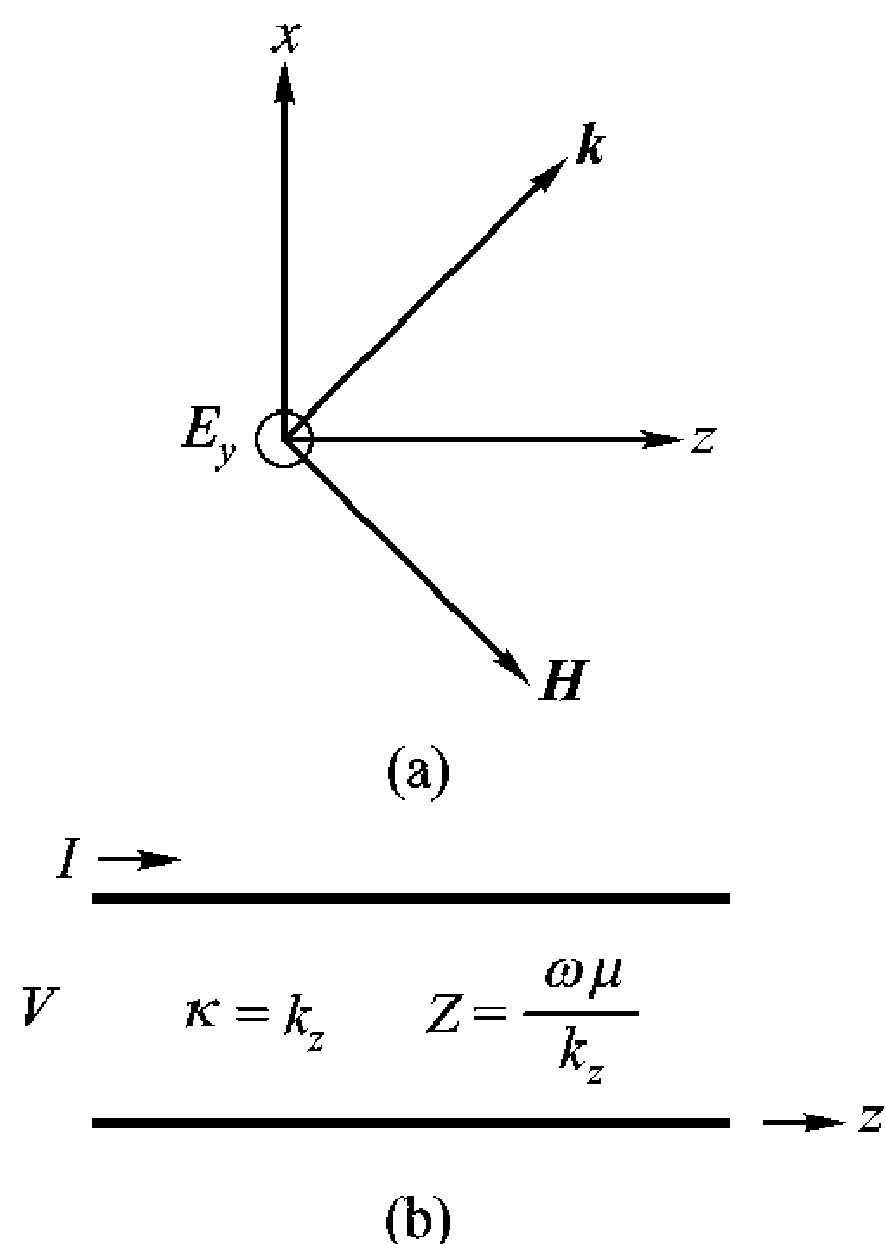


图 4 - 12 均匀介质中 TE 模传播的传输线模型

（a）TE 模场量表示及其坐标系

（b）TE 模 z 方向波传播的等效传输线模型，κ 是等效传输线传播常数

$$H_z = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{k_x}{\omega\mu}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{4.6.12}$$

如果我们定义 E_y 为模式函数 $\varphi(x)$ 与其幅值 $V(z)$ 的乘积，H_x 为模式函数 $\varphi(x)$ 与其幅值 $I(z)$ 乘积，即

$$E_y = -\varphi(x)V(z) \tag{4.6.13}$$

$$H_x = \varphi(x)I(z) \tag{4.6.14}$$

式中

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x} \tag{4.6.15}$$

$$V(z) = E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{4.6.16}$$

$$I(z) = \frac{k_z}{\omega\mu} E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$$

那么 $V(z)$、$I(z)$也满足传输线方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}kZI(z) & (4.6.17) \\ \dfrac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}kYV(z) & (4.6.18) \end{cases}$$

式中

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{\omega\mu}{k_z} \tag{4.6.19}$$

模式函数 $\varphi(x)$表示场在 x 方向的分布，而 $V(z)$、$I(z)$表示场 E_y、H_x 沿纵向 z 的分布。

式(4.6.9)或式(4.6.13)前面加一负号是保证坡印廷功率流$\frac{1}{2}\mathrm{Re}(E_y \boldsymbol{y}_0 \times H_x^* \boldsymbol{x}_0)$与传输线上沿 $+z$ 方向传播的平均功率$\frac{1}{2}\mathrm{Re}(V(z)I^*(z))$相等。

式(4.6.13)、(4.6.14)与式(4.6.17)、(4.6.18)表明，如果把 TE 模电场、磁场的横向分量分解成模式函数 $\varphi(x)$与其幅值 $V(z)$或 $I(z)$的乘积，则其幅值 $V(z)$、$I(z)$满足传输线方程，传输线的传播常数等于 k_z，特征阻抗 $Z=\omega\mu/k_z$，电场 E_y、磁场 H_x 沿纵向 z 的变化与传输线上电压 V、电流 I 变化相当。式(4.6.13)右边的负号保证功率流在 $+z$ 方向。图 4－12(b)就是 TE 模传播的传输线模型。

4.6.3　TM 模传播的传输线模型

所谓 TM 模，对于所选定的纵方向(一般为 z)，磁场 $\boldsymbol{H}$ 只有横向分量，没有纵向分量。与 TE 模的分析一样，坐标系的选择使得 k 在 $x-z$ 平面内没有 y 方向分量，即 $\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{x}_0 + k_z\boldsymbol{z}_0$，$k_y = 0$，因而 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_x x + k_z z$。磁场 $\boldsymbol{H}$ 垂直于 $\boldsymbol{k}$ 所在的 $x-z$ 平面，只有 y 分量 H_y，电场 $\boldsymbol{E}$ 在 $\boldsymbol{k}$ 所在平面内有两个分量，即 $\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{x}_0 + E_z\boldsymbol{z}_0$，但与 $\boldsymbol{k}$ 垂直，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 三者也构成右手螺旋关系，如图 4－13(a)。在这种特定坐标系下，磁场 $\boldsymbol{H}$ 可表示成

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{y}_0 H_y = \boldsymbol{y}_0 H_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{4.6.20}$$

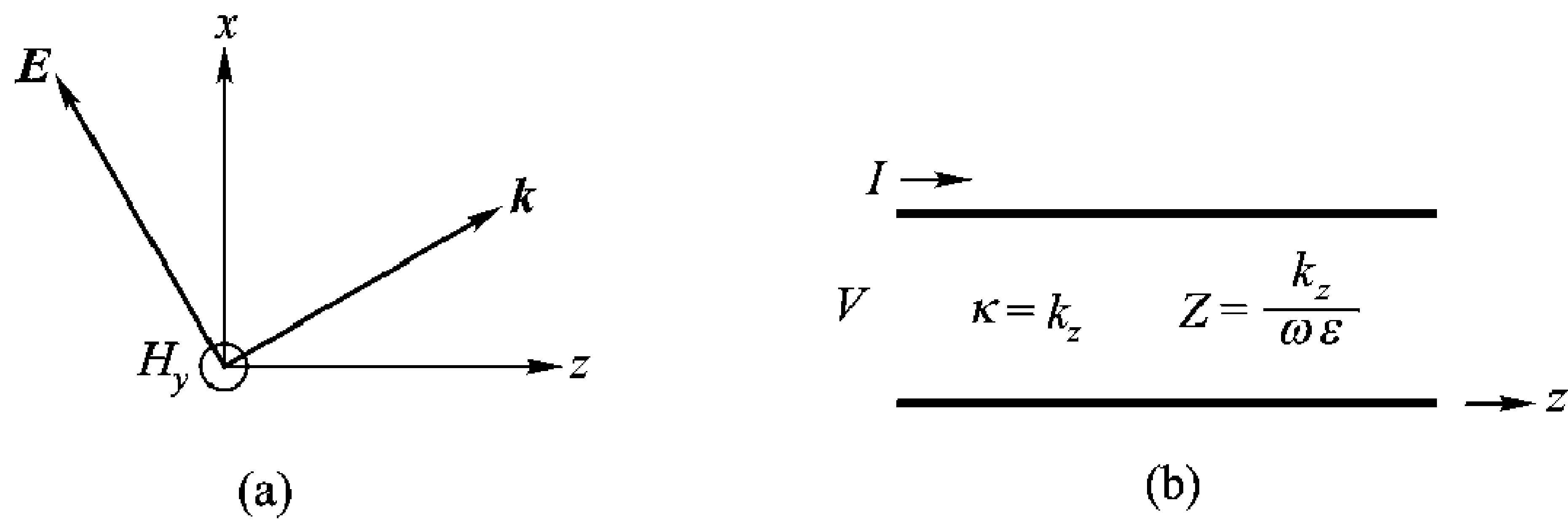


图4-13 均匀介质中TM模传播的传输线模型

(a) TM模场量表示及其坐标系

(b) TM模 z 方向波传播的等效传输线模型，κ 是传输线传播常数

式中

$$H_y = H_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{4.6.21}$$

利用旋度方程，$\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} = \nabla \times \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{y}_0 H_y = \boldsymbol{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x} - \boldsymbol{x}_0 \frac{\partial H_y}{\partial z}$，得到

$$\boldsymbol{E} = E_x \boldsymbol{x}_0 + E_y \boldsymbol{y}_0 \tag{4.6.22}$$

$$E_x = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} H_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{4.6.23}$$

$$E_z = -\frac{k_x}{\omega\varepsilon} H_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{4.6.24}$$

如果定义

$$E_x = \varphi(x) V(z) \tag{4.6.25}$$

$$H_y = \varphi(x) I(z) \tag{4.6.26}$$

式中

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x} \tag{4.6.27}$$

$$V(z) = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} H_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{4.6.28}$$

$$I(z) = H_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{4.6.29}$$

那么 $V(z)$、$I(z)$ 也满足传输线方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}kZI(z) & (4.6.30) \\ \dfrac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}kYV(z) & (4.6.31) \end{cases}$$

式中

$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} \tag{4.6.32}$$

模式函数 $\varphi(x)$ 表示场在 x 方向变化，而 $V(z)$、$I(z)$ 表示场沿纵向的变化。式(4.6.30)、(4.6.31)表明，对于TM模，当把横向场量分解为模式函数

$\varphi(x)$与其幅值 $V(z)$、$I(z)$的乘积，则 $V(z)$、$I(z)$满足传输线方程，传输线的传播常数等于 k_z，特征阻抗 $Z = k_z/\omega\varepsilon$。因此就横向场量的纵方向变化而言，与传输线上电压 $V(z)$、电流 $I(z)$变化相当，见图 4－13（b）。

4.6.4　电磁波传播传输线模型的一般证明

前面分析平面波传播的传输线模型是在特定的坐标系下进行的，在这个特定坐标系下，$\boldsymbol{k}$ 只有两个分量，电场 $\boldsymbol{E}$ 只有横向场量 E_y（对于 TE 模而言）或磁场 $\boldsymbol{H}$ 只有横向场量 H_y（对于 TM 模而言），模式函数 $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}$ 也很简单。传输线方程的得出似乎缺乏普遍性。下面将证明，只要将电磁场分解成 TE 及 TM 两种模式，电磁场量又分解成横向场量 $\boldsymbol{E}_t$、$\boldsymbol{H}_t$ 与纵向场量 E_z、H_z，并将横向场量 $\boldsymbol{E}_\mathrm{t}$、$\boldsymbol{H}_\mathrm{t}$ 再分解成模式函数 $\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{h}$ 与其幅值 $V(z)$、$I(z)$的乘积，那么 $V(z)$、$I(z)$就满足传输线方程。下面以 TE 模为例给予证明。对于 TE 模如定义 z 为纵向，则

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}'_\mathrm{t}(\boldsymbol{r}) \tag{4.6.33}$$

$$E'_z = 0 \tag{4.6.34}$$

$$\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}'_\mathrm{t}(\boldsymbol{r}) + H'_z \boldsymbol{z}_0 \tag{4.6.35}$$

式中，上标“′”表示属于 TE 模的量，$\boldsymbol{E}'_\mathrm{t}$、$\boldsymbol{H}'_\mathrm{t}$ 中下标 t 表示与纵向 z 垂直的横向场分量，即 $\boldsymbol{E}'_\mathrm{t}$、$\boldsymbol{H}'_\mathrm{t}$ 在与 z 轴垂直的平面内。再将 $\boldsymbol{E}'_\mathrm{t}(\boldsymbol{r})$分解成模式函数 $\boldsymbol{e}'(\rho)$与模式函数的幅值 $V'(z)$的乘积，而将 $\boldsymbol{H}'_\mathrm{t}(\boldsymbol{r})$分解成模式函数 $\boldsymbol{h}'(\rho)$与其幅值 $I'(z)$的乘积，即

$$\boldsymbol{E}'_\mathrm{t}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})V'(z) \tag{4.6.36}$$

$$\boldsymbol{H}'_\mathrm{t}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})I'(z) \tag{4.6.37}$$

式中

$$\boldsymbol{\rho} = x\boldsymbol{x}_0 + y\boldsymbol{y}_0 \tag{4.6.38}$$

所以

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{x}_0 + y\boldsymbol{y}_0 + z\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{\rho} + z\boldsymbol{z}_0$$

显然，$\boldsymbol{E}'_\mathrm{t}$、$\boldsymbol{H}'_\mathrm{t}$ 的方向完全由 $\boldsymbol{e}'(\rho)$、$\boldsymbol{h}'(\rho)$表示，也就是说 $\boldsymbol{e}'(\rho)$、$\boldsymbol{h}'(\rho)$均与 z 轴垂直，模式函数 $\boldsymbol{e}'(\rho)$、$\boldsymbol{h}'(\rho)$表示场在与 z 轴垂直的横截面中分布，场沿 z 方向变化则完全由 $V'(z)$、$I'(z)$表示。现在要问，横向场量 $\boldsymbol{E}'_\mathrm{t}$、$\boldsymbol{H}'_\mathrm{t}$ 作这样的分解后，模式函数 $\boldsymbol{e}'(\rho)$、$\boldsymbol{h}'(\rho)$以及模式函数的幅值 $V'(z)$、$I'(z)$满足什么方程？因为 $\boldsymbol{E}'$、$\boldsymbol{H}'$ 要满足麦克斯韦方程，所以 $\boldsymbol{e}'(\rho)$、$\boldsymbol{h}'(\rho)$以及 $V'(z)$、$I'(z)$满足的方程必须从麦克斯韦方程得到。

定义横向算符

$$\nabla_\mathrm{t} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 \tag{4.6.39}$$

根据 ∇_t 的这一定义，算符

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{x}_0 + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0 = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0 \tag{4.6.40}$$

$$\nabla_t \cdot \nabla_t = \nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{4.6.41}$$

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{4.6.42}$$

现将式(4.6.39)、(4.6.40)以及式(4.6.33)、(4.6.36)代入无源空间(即 $\rho_v = 0$)的散度方程

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

得到 $\left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right) \cdot E'_t(\boldsymbol{r}) = \left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right) \cdot [\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) V'(z)] = 0$。

因为 $\boldsymbol{e}'(\rho)$ 与 z 轴垂直，$\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) = 0$，故由上式得到

$$\nabla_t \cdot [\boldsymbol{e}'(\rho) V'(z)] = 0$$

$V'(z)$ 与横向坐标无关，因此

$$\nabla_t \cdot \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) = 0 \tag{4.6.43}$$

将式(4.6.33) ~ (4.6.35)以及式(4.6.39)、(4.6.40)代入旋度方程

$$\nabla \times H' = \mathrm{j}\omega\varepsilon E'$$

得到

$$\left(\nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{z}_0\right) \times (\boldsymbol{H}'_t + H_z\boldsymbol{z}_0) = \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}' = \mathrm{j}\omega\varepsilon(\boldsymbol{E}'_t + E'_z\boldsymbol{z}_0)$$

等式两边纵向、横向两个分量分别相等，由纵向分量相等可得

$$\nabla_t \times \boldsymbol{H}'_t = \mathrm{j}\omega\varepsilon E'_z z = 0$$

再将式(4.6.37)代入上式

$$\nabla_t \times [\boldsymbol{h}'(\rho) I'(z)] = 0$$

因为 $I'(z)$ 与横向坐标无关，故得

$$\nabla_t \times h'(\boldsymbol{\rho}) = 0 \tag{4.6.44}$$

将式(4.6.42)及式(4.6.33)、(4.6.36)代入波方程

$$(\nabla^2 + k^2)\boldsymbol{E} = 0$$

得到

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) V'(z) = 0$$

或

$$\nabla_t^2 [\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) V'(z)] + \frac{\partial^2}{\partial z^2}[\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) V'(z)] + k^2 [\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) V'(z)] = 0$$

等式两边用 $\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) V'(z)$ 去除，得到

$$\frac{\nabla_{\mathrm{t}}^{2}\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})}{\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})}+\frac{\dfrac{\partial^{2}V'(z)}{\partial z^{2}}}{V'(z)}+k^{2}=0$$

等式左边第一项只是横向坐标 ρ 的函数,第二项只是纵向坐标 z 的函数,它们加起来等于常数 $-k^2$,这只有每一项都等于一常数才有可能,令 $\dfrac{\partial^2 V'(z)}{\partial z^2}\Big/V'(z)=-k_z^2$,可得

$$\frac{\mathrm{d}^{2}V'(z)}{\mathrm{d}z^{2}}+k_{z}^{2}V'(z)=0 \tag{4.6.45}$$

$$\nabla_{\mathrm{t}}^{2}\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})+(k^{2}-k_{z}^{2})\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})=0$$

令

$$k_{\mathrm{t}}^{2}=k^{2}-k_{z}^{2} \tag{4.6.46}$$

得到

$$(\nabla_{\mathrm{t}}^{2}+k_{\mathrm{t}}^{2})\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})=0 \tag{4.6.47}$$

式(4.6.45)表示的二阶微分方程可用两个耦合的一阶微分方程表示,即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}V'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k_{z}Z'I'(z) & (4.6.48)\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}I'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k_{z}Y'V'(z) & (4.6.49)\end{cases}$$

式中 $Z'=1/Y'$, Z' 到底表示什么,还不清楚,为此利用旋度方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}'=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}'$$

或

$$\left(\nabla_{\mathrm{t}}+\frac{\partial}{\partial z}z_{0}\right)\times\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}=-\mathrm{j}\omega\mu(\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}+H'_{z}z_{0})$$

等式两边横向、纵向分量分别相等,由横向分量相等,得到

$$\frac{\partial}{\partial z}(z_{0}\times\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}})=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial z}[z_{0}\times\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})V'(z)]=-\mathrm{j}\omega\mu[\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})I'(z)]$$

给一限制条件:

$$\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})\times\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})=z_{0} \tag{4.6.50}$$

其物理意义是 $\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})$、$\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})$只表示 $\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}$ 在横截面分布,$\boldsymbol{E}'_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{H}'_{\mathrm{t}}$ 大小全部由 $V'(z)$、$I'(z)$表示,因而 $\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})$、$\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})$相当于单位向量,或基函数。那么上式成为

$$\frac{\mathrm{d}V'(z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}\omega\mu I'(z)$$

并可进一步改写成

$$\frac{\mathrm{d}V'(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z\frac{\omega\mu}{k_z}I'(z)$$

将上式与式(4.6.48)比较不难得出

$$Z' = \frac{1}{Y'} = \frac{\omega\mu}{k_z} \tag{4.6.51}$$

而时间平均纵向坡印廷功率流

$$\begin{aligned} P'_z &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}'^*)\cdot z_0\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[(\boldsymbol{E}'_t\times\boldsymbol{H}'^*_t)\cdot z_0\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left[(\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})V'(z))\times(\boldsymbol{h}'^*(\boldsymbol{\rho})I'^*(z))\right]\cdot z_0\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[V'(z)I'^*(z)\left[\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})\times\boldsymbol{h}'^*(\boldsymbol{\rho})\right]\cdot z_0\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[V'(z)I'^*(z)\right] \end{aligned} \tag{4.6.52}$$

这里我们应用了模式函数归一化的条件，$\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho})$，$\boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho})$只表示方向，不表示大小，即 $\boldsymbol{e}'(\rho)\times\boldsymbol{h}'^*(\rho)=z_0$。式(4.6.52)表示，传输线传送的功率$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[V'(z)I'^*(z)\right]$正好等于坡印廷功率流的纵向($z$ 方向)分量，也就是 z 方向的坡印廷功率流。

　　对于TM模，定义

$$\boldsymbol{E}''(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}''_t(\boldsymbol{r}) + E''_z(\boldsymbol{r})z_0 \tag{4.6.53}$$

$$\boldsymbol{H}''(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}''_t(\boldsymbol{r}) \tag{4.6.54}$$

$$H''_z(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{4.6.55}$$

$$\boldsymbol{E}''_t(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}''(\boldsymbol{\rho})V''(z) \tag{4.6.56}$$

$$\boldsymbol{H}''_t(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{h}''(\boldsymbol{\rho})I''(z) \tag{4.6.57}$$

经过类似推导可得模式函数满足

$$\nabla_t\cdot\boldsymbol{h}''(\boldsymbol{\rho}) = 0 \tag{4.6.58}$$

$$\nabla_t\times\boldsymbol{e}''(\boldsymbol{\rho}) = 0 \tag{4.6.59}$$

$$\boldsymbol{e}''(\rho)\times\boldsymbol{h}''(\rho) = z_0 \tag{4.6.60}$$

$$(\nabla_t^2 + k_t^2)\boldsymbol{h}''(\boldsymbol{\rho}) = 0 \tag{4.6.61}$$

$$k_t^2 = k^2 - k_z^2$$

而模式函数 $V''(z)$、$I''(z)$满足传输线方程

$$\frac{\mathrm{d}V''(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_zZ''I''(z) \tag{4.6.62}$$

$$\frac{\mathrm{d}I''(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_zY''V''(z) \tag{4.6.63}$$

式中

$$Z'' = \frac{1}{Y''} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon} \tag{4.6.64}$$

并有时间平均纵向坡印廷功率流

$$P''_z = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[V''(z)I''^*(z)\right] \tag{4.6.65}$$

为了便于比较，现把 TE、TM 模传输线模型的有关公式列于表 4－1。

表 4－1 TE、TM 模场量的有关公式

TE 模	TM 模
$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}'_t$	$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}''_t + E''_z \boldsymbol{z}_0$
$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}'_t + H'_z \boldsymbol{z}_0$	$H = H''_t$
$\boldsymbol{E}'_z = 0$	$H''_z = 0$
$\boldsymbol{E}'_t = \boldsymbol{e}'(\rho)V'(z)$	$\boldsymbol{E}''_t = \boldsymbol{e}''(\rho)V''(z)$
$\boldsymbol{H}'_t = \boldsymbol{h}'(\rho)I'(z)$	$\boldsymbol{H}''_t = \boldsymbol{h}''(\rho)I''(z)$
$\nabla_t \cdot \boldsymbol{e}' = 0$	$\nabla_t \cdot \boldsymbol{h}'' = 0$
$\nabla_t \times \boldsymbol{h}' = 0$	$\nabla_t \times \boldsymbol{e}'' = 0$
$(\nabla_t^2 + k_t^2)\boldsymbol{e}' = 0$	$(\nabla_t^2 + k_t^2)\boldsymbol{h}'' = 0$
$k_t^2 = k^2 - k_z^2$	$k_t^2 = k^2 - k_z^2$
$\boldsymbol{h}' = \boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{e}'$	$\boldsymbol{e}'' = -\boldsymbol{z}_0 \times \boldsymbol{h}''$
$\dfrac{\mathrm{d}V'(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k'_z Z' I'(z)$	$\dfrac{\mathrm{d}V''(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k''_z Z'' I''(z)$
$\dfrac{\mathrm{d}I'(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k'_z Y' V'(z)$	$\dfrac{\mathrm{d}I''(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k''_z Y'' V''(z)$
$Z' = \dfrac{1}{Y'} = \dfrac{\omega\mu}{k'_z}$	$Z'' = \dfrac{1}{Y''} = \dfrac{k''_z}{\omega\varepsilon}$

由表 4－1 可见，电磁场用 TE 及 TM 两种模式的场叠加表示后，本来要解耦合的三维波方程简化为解二维的波方程

$$(\nabla^2 + k_t^2)\begin{cases} \boldsymbol{e}' = 0 & (\text{TE 模}) \\ \boldsymbol{h}'' = 0 & (\text{TM 模}) \end{cases} \tag{4.6.66}$$

以及耦合的一维传输线方程

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Z I(z) \tag{4.6.67}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Y V(z) \tag{4.6.68}$$

$$k_z^2 = k^2 - k_t^2 \tag{4.6.69}$$

$$Z = \frac{1}{Y}\begin{cases} \omega\mu / k_z & \text{（TE 模）} \\ k_z / \omega\varepsilon & \text{（TM 模）} \end{cases} \tag{4.6.70}$$

因此，只从解方程的角度看，把电磁波分解成 TE 及 TM 两种模式的场，其优越性是十分明显的。值得指出的是，许多实际的波导往往只工作于 TE 或 TM 模式中的一种。因此把电磁波分成 TE、TM 两种模式，不仅给数学分析带来方便，也便于实际应用。

二维特征波方程(4.6.66)中的本征值 k_t 也叫做横向传播常数，由具体波导的横向边界条件确定。与本征值 k_t 相应的本征函数 $\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{h}$ 通常叫做模式函数。模式函数只与横向坐标有关，表示场在横截面的分布。模式函数的幅值 $V(z)$、$I(z)$满足传输线方程(4.6.67)、(4.6.68)，其传播常数 k_z 及特征阻抗 Z（或特征导纳 Y）由式(4.6.69)、(4.6.70)决定。

因此，就波沿纵向 z 轴的传播而言，电磁波按 TE、TM 模式分开后，波导可用式(4.6.67)、(4.6.68)所示的传输线等效，而等效传输线传送的功率就等于波的纵向功率流。

从表 4-1 可见，对于电场 TE 模的散度 $\nabla \cdot \boldsymbol{e}' = 0$，TM 模的旋度 $\nabla \times \boldsymbol{e}'' = 0$，而 1.6.6 节中亥姆霍兹定理告诉我们，任一矢量场可分解为一个散度等于零的场和另一个旋度等于零的场之和。由此可知，把电磁场分解为 TE 与 TM 两种模场的叠加是完备的，它与亥姆霍兹定理是一致的。

现在我们把电磁波传播的传输线模型的物理意义归纳如下：

首先把电磁波按 TE、TM 模式分解，再将横向场量表示成模式函数与其幅值的乘积。模式函数 $\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{h}$ 只是横向坐标的函数，表示场在横截面分布，由二维波方程描述。模式函数的幅值 $V(z)$、$I(z)$只与纵向坐标有关，并满足传输线方程。传输线的传播常数等于波的纵向传播常数，传输线传送的功率等于波的纵向功率流。波的一个传播模式与一个特定参数(k_z、Z)的传输线等效。如果存在无限多个模式，就要用无限多对传输线等效。所以当波用传输线等效时，按 TE、TM 模分解后横向场量 $\boldsymbol{E}_t$、$\boldsymbol{H}_t$ 分离为模式函数与其幅值的乘积，只是其幅值沿纵向的变化规律与一特定参数传输线上电压、电流的变化规律相当。波传播的传输线模型不反映电磁场在横截面内的分布情况。横截面内场分布要通过解模式函数 $\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{h}$ 满足的二维波方程得到。如果我们只对波的远距离传播感兴趣，不关心场在横截面的具体分布，波的传输线模型对分析、理解波沿纵向传播十分有效。

需要指出的是，纵向、横向是相对而言的，究竟哪一个方向选为纵向，要视具体问题而定。研究不均匀问题时，通常选择不均匀方向为纵向。为求横截面 $x-y$ 内的场分布，我们有时选择 x 或 y 方向为纵向，这时 x、y 方向模式函数幅值 V、I 的变化规律也就反映了场在横截面的分布。所以尽管波的传输

线模型并不反映场在横截面的分布信息，但如果我们把横向选为纵向，仍可用波导的传输线模型得到横截面的场分布，以后我们将结合具体例子予以说明。因此电磁波传播的传输线模型是分析电磁波传播问题的有效方法。

对于边界趋于无穷远的无源、简单介质，通过解模式函数满足的二维波方程(4.6.66)及传输线方程(4.6.67)～(4.6.68)也可得到平面波解。因为用分离变量法解式(4.6.66)，当边界趋于无穷远时，其解取形式 $e^{-jk_x x}e^{-jk_y y}$。而传输线趋于无穷远时，只有入射波，没有反射波，所以电压、电流取 $e^{-jk_z z}$的入射波解。因为横向场量 $\boldsymbol{E}_t$、$\boldsymbol{H}_t$ 可分解为模式函数与其幅值(电压或电流)的乘积，故横向场量解的一般形式是 $e^{-jk_x x}e^{-jk_y y}e^{-jk_z z}=e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$，这就是平面波。

例 4-10　如图 4-14，自由空间 TE 平面波波矢 $\boldsymbol{k}_0$ 在 $x-z$ 平面内，与 z 轴夹角 $\theta=30°$，给出波在 z 方向、x 方向传播的等效传输线模型。

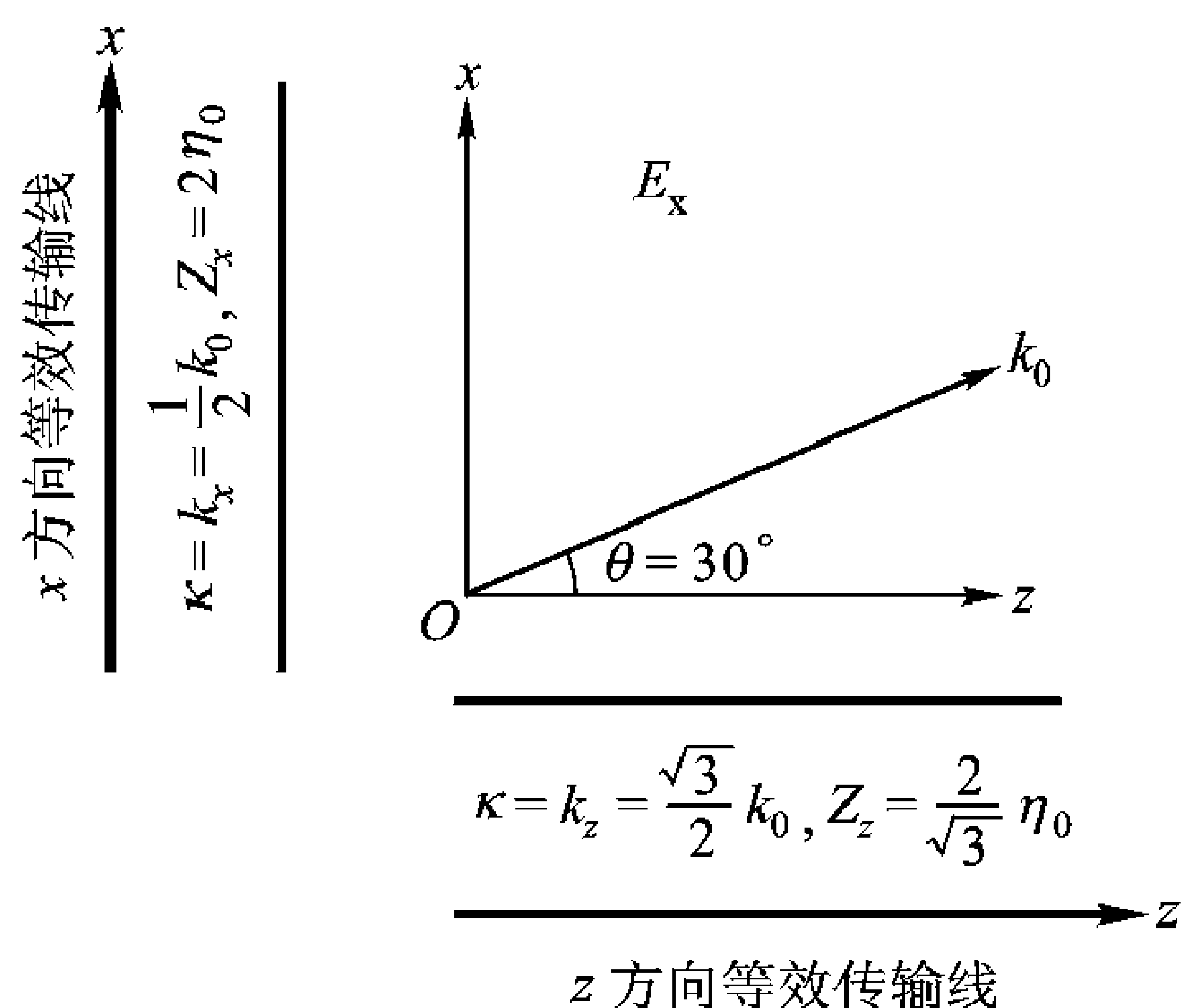


图 4-14　自由空间 TE 平面波沿 z 方向、x 方向传播的传输线模型

解：对于 x 方向波传播的等效传输线，传播常数 $\kappa=k_x=k_0\sin 30°=\frac{k_0}{2}$，特征阻抗

$$Z_x=\frac{\omega\mu}{k_x}=\frac{\omega\mu}{k_0/2}=2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=2\eta_0$$

对于 z 方向波传播的等效传输线，传播常数

$$\kappa=k_z=k_0\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}k_0$$

特征阻抗

$$Z_z=\frac{\omega\mu}{k_z}=\frac{\omega\mu}{\frac{\sqrt{3}}{2}k_0}=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\eta_0$$

本章要点

- 如果把电流与电荷的连续方程作为一基本方程，那么麦克斯韦方程中只有两个旋度方程是独立的。这两个方程中 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 是耦合在一起的。如果我们研究的空间不存在激励电磁场的源，媒质又是简单介质，从 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 耦合的两个旋度方程消去 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 就得到 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{H}$ 满足的波方程 $(\nabla^2+k^2)\begin{cases}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{H}\end{cases}=0$。

- 当研究空间的边界趋于无穷远，用分离变量法得到波方程的解 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$，即 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 的解为常矢量 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{H}_0$ 乘上一指数函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$，矢量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 的方向由常矢量 $\boldsymbol{E}_0$、$\boldsymbol{H}_0$ 决定，大小由指数函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$ 决定，这个解叫平面波，因为波的等相位面是一个平面。
- 平面波 $\boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$(或 $\boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$)的特征主要由波矢 $\boldsymbol{k}$ 决定。$\boldsymbol{k}$ 的方向即波传播的方向，波长 $\lambda=\frac{2\pi}{k}$，相速 $v_{\mathrm{p}}=\frac{\omega}{k}$，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 三者相互垂直构成右手螺旋关系，在与 $\boldsymbol{k}$ 垂直的平面内相位相等。
- 平面波 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 模值之比为波阻抗 $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$，对于自由空间 $\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=377\ \Omega$。
- k 与 ω 的关系描述传播电磁波介质的色散特性：k 与 ω 呈线性关系，相速 v_{p} 与频率 ω 无关，叫做无色散介质；反之，k 与 ω 不呈线性关系，相速 v_{p} 与频率 ω 有关，就存在色散。色散特性可用 $\omega-k$ 平面上的曲线表示，曲线上任一点与原点连线斜率表示该频率点相速 v_{p}，而切线斜率就表示该频率点群速 v_{g}，相速表示等相位点运动速度，群速则表示信号传播的速度。色散特性也可用有效介电系数 ε_{e} 与波长 λ 或频率 f 关系、相速 v_{p} 与频率 f 关系表示。
- 电磁波运动的空间性质用极化表示，它可用电场矢量末端点运动轨迹在与波矢 k 垂直的平面内的投影来区分。如果电场矢量末端点运动轨迹的投影为一直线的叫线极化，为一圆的叫圆极化，为一椭圆的叫椭圆极化。
- 在导电介质中，电导率 σ 为有限值，有欧姆损耗，所以导电介质是有耗介质。有耗介质可用介电系数为复数的介质等效。引入复介电系数概念后，传播常数 k、波阻抗 η 均是复数，k 的实部 k_{r} 表示波的传播，虚部 k_{i} 表示波的衰减。
- 电磁波的传播可用传输线上电压、电流波的传播等效，这就是所谓的波传播的传输线模型。传输线模型的要点是，首先将场分解成 TE 与 TM 两种模式，再将场量分解为横向场量($\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}$)与纵向场量($\boldsymbol{E}_z$、$\boldsymbol{H}_z$)，进一步又将横向场量分解为模函数与其幅值乘积，即 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\rho})V(z)$，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\rho})I(z)$。模式函数的幅值 $V(z)$、$I(z)$满足传输线方程，其传播常数等于纵向传播常数 k_z，特征阻抗 $Z_{\mathrm{c}}=\omega\mu/k_z$（对于 TE)或 $Z_{\mathrm{c}}=k_z/\omega\varepsilon$（对于 TM)，传输线传送功率等于波的纵向功率流 p_z。电磁波传播的传输线模型将使我们利用成熟的传输线理论来处理复杂的场问题。

习题

4.1　写出 ω、k、f、T、λ 的单位。

4.2　氦氖激光器输出波长为 6.328×10^{-7} m，计算它的 f，T，k。

4.3　已知均匀平面电磁波在均匀媒质中传播，其电场强度的表示式为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{y}_0E_y=\boldsymbol{y}_0 10\cos(\omega t-kz+30°)$ mV/m，工作频率 $f=150$ MHz，媒质的参数为 $\mu_r=1$，$\varepsilon_r=4$，$\sigma=0$，试求：

(1) 相位常数 k、相速 v_p、波长 λ 和波阻抗 η。

(2) $t=0$、$z=1.5$ m 处，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{S}(t)$、$\langle\boldsymbol{S}\rangle$ 各为多少？

(3) 在 $z=0$ 处，E 第一次出现最大值(绝对值)的时刻 t 等于多少？

4.4　已知自由空间电磁波的 f_0、λ_0、k_0、v_0。当它进入介质，其介电常数为 $4\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$，求介质中电磁波的 f、λ、k 及 v。

4.5　$\boldsymbol{E}=E_0e^{jkz}\boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{H}=H_0e^{jkz}\boldsymbol{y}_0$ 满足自由空间麦克斯韦方程，问题如下：

(1) 用 E_0、ε_0、μ_0 表示 H_0 和 k。

(2) 这个解是不是均匀平面波？波沿什么方向传播？并求出波速 v 与时间平均坡印廷矢量 $<\boldsymbol{S}>$。

4.6　商用调幅广播电台覆盖地域最低信号场强为 25 mV/m，问与之相联系的最小功率密度是多少？最小磁场是多大？

4.7　在无耗的自由空间中，平面电磁波的平均能流密度为 0.26 μW/m^2，平面波沿 z 方向传播，其工作频率 $f=150$ MHz，电场强度的表示式为 $E=E_m\cos(\omega t-kz+60°)$。试求在 $z=10$ m 处，$t=0.1$ μs 时的 E、H、S。

4.8　求下列场的极化性质。

(1) $\boldsymbol{E}=(j\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{y}_0)e^{-jkz}$

(2) $\boldsymbol{E}=[(2+j)\boldsymbol{x}_0+(3-j)\boldsymbol{z}_0]e^{-jky}$

(3) $\boldsymbol{E}=[(1+j)\boldsymbol{y}_0+(1-j)\boldsymbol{z}_0]e^{-jkx}$

(4) $\boldsymbol{E}=(j\boldsymbol{x}_0+j2\boldsymbol{y}_0)e^{jkz}$

4.9　设有一椭圆极化波，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{x}_0E_{xm}\cos(\omega t-kz)+\boldsymbol{y}_0E_{ym}\cos(\omega t-kz+\pi/2)$，试将其分解为旋向相反、振幅不等的两个圆极化波。

4.10　一线极化波电场的两个分量为 $E_x=6\cos(\omega t-kz-30°)$，$E_y=8\cos(\omega t-kz-30°)$，试将它分解成振幅相等、旋向相反的两个圆极化波。

4.11　自由空间沿 z 方向传播的均匀平面波 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0e^{-jkz}$，式中 $\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{E}_r+j\boldsymbol{E}_i$，且 $\boldsymbol{E}_r=2E_i=b$，b 为实常数，$\boldsymbol{E}_r$ 在 x 方向，$\boldsymbol{E}_i$ 与 x 轴夹角为 60°，试求电场强度和磁场强度瞬时值，并说明波的极化。

4.12　均匀平面波的频率为 10 MHz，设地球的 $\mu=\mu_0$，$\varepsilon=4\varepsilon_0$，$\sigma=10^{-4}$ S/m，求地球的衰减常数与趋肤深度。

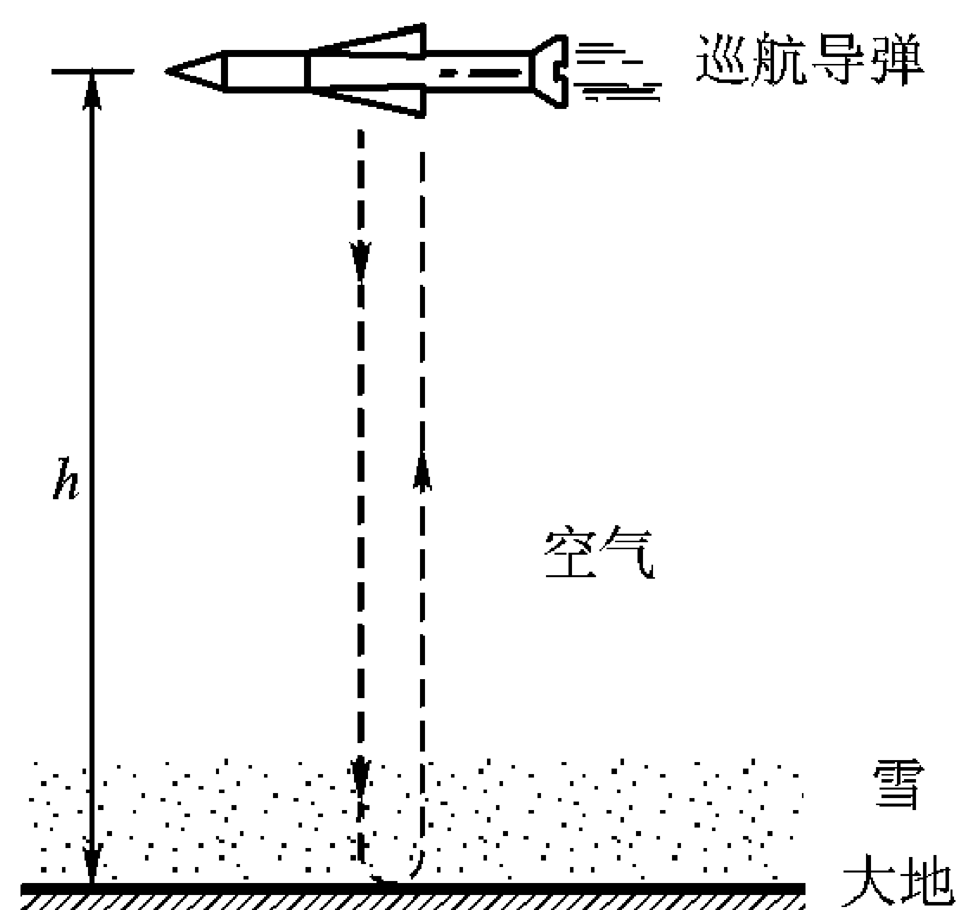
4.13　用上例数据，设地球表面电场强度为 1 V/m，求地球表面功率密度。

4.14　一平面电磁波从空气垂直地向海面传播，已知某海域海水的参数为 $\varepsilon_r=80$，$\sigma=1$ S/m，$\mu_r=1$，平面电磁波在海平面处的场强表示式为：$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{x}_0 1\,000\,e^{-k_i z}e^{j(\omega t-k_r z)}$ V/m，工作波长为 300 m。试求电场强度的振幅为 1 μV/m 时离海面的距离，并写出这个位置上的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 之表示式。

4.15　巡航导弹用雷达测量其飞行高度(见题图 4.15)，雷达工作频率为 3 GHz。假定地面为 1 m 厚的干雪覆盖，试求：

(1) 雷达测得的巡航导弹飞行高度，与巡航导弹实际离开地面高度有否差别？

(2) 不计空气而只考虑地面覆盖的雪对传播电磁波损耗以及空气与雪交界面的反射损耗的影响，计算由于1 m厚的雪引起的雷达信号的衰减(用dB表示)，假定3 GHz时雪的$\varepsilon = 1.5\varepsilon_0$，$\tan\delta = 9\times10^{-4}$。



题图4.15

4.16　设某海域海水低频时可以用$\varepsilon = 81\varepsilon_0$，$\mu = \mu_0$，$\sigma = 4$ S/m介质表示，平面波波矢$\boldsymbol{k}$与x轴夹角为30°，给出波沿x方向传播的传输线模型(给出等效传输线的特征参数)。

第5章　波的反射与折射及多层介质中波的传播

在第4章中我们从麦克斯韦方程和物质的本构关系出发，得出在边界趋于无穷远的简单介质中电磁波以平面波的形式传播的结论。但我们通常遇到的介质多数是不均匀的。即使是均匀介质，实际上也很难做到延伸至无穷远。因而在我们所研究的空间中，介质的介电系数 ε、磁导率 μ 一般是不均匀的。那么，在不均匀介质中波怎么传播？

两均匀介质在 $z=0$ 处相接构成的介质交界面[图5-1(a)]就是最基本的不均匀介质系统，介电系数 ε 沿 z 轴的分布在 $z=0$ 处发生突变[图5-1(b)]。电磁波从 $z<0$ 区域投射到介质交界面，一部分被反射，一部分透过介质交界面在 $z>0$ 区域继续传播。电磁波在介质交界面的反射、折射是本章讨论的主题之一。

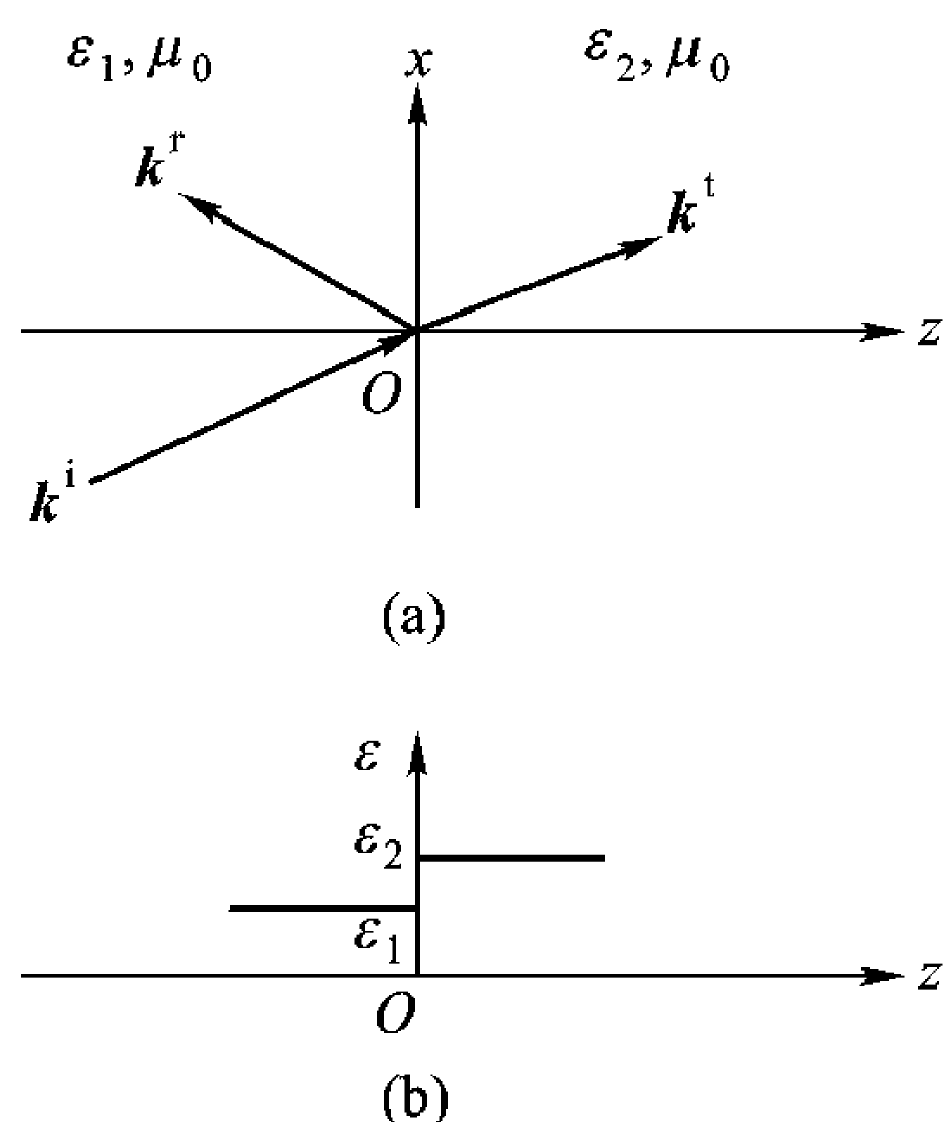


图5-1　介质交界面

注：$\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}}$、$\boldsymbol{k}^{\mathrm{r}}$、$\boldsymbol{k}^{\mathrm{t}}$ 分别为入射波、反射波、折射波波矢

介质交界面对平面波的反射、折射也是研究多层介质中波传播问题的基础。多层介质中波的传播是本章讨论的又一主题。

电磁波在两介质交界面的反射、折射必须服从麦克斯韦方程。要注意的是在介质交界面 ε 不连续，导数不存在，微分形式的麦克斯韦方程不能直接应用，但我们可以用差分近似微分，或从积分形式的麦克斯韦方程出发导出交界面电磁场量必须满足的关系——边界条件。本章5.1节讨论介质交界面的边界条件；5.2节利用边界条件得出介质交界面对电磁波的反射、折射的基本规律，有趣的是介质交界面对平面波的反射、折射与级连传输线上电压、电流波的传播类似；5.3节讨论介质交界面对波的反射、折射的两个特征角——临界角与布儒斯特角；5.4、5.5节分别讨论吸收介质边界面以及介质-导体界面的反射与折射；5.6节用传输线模型分析多层平板介质系统，即用路的方法处理多层平板介质系统中复杂的场问题；5.7节用传输线模型分析多层介质中波传播的瞬态响应。

5.1　边界条件

见图 5-2，跨越交界面取一矩形截面，l、w 分别为矩形的长边与窄边，坐标轴的选择使得 x 与交界面相切，y 与交界面的法线 $\boldsymbol{n}_0$ 平行，而 z 与纸面垂直并离开纸面。取旋度方程 $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}$ 的 z 分量，得到

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + \mathrm{j}\omega D_z$$

其差分形式是

$$\frac{H_{4\mathrm{n}} - H_{3\mathrm{n}}}{l} - \frac{H_{1\mathrm{t}} - H_{2\mathrm{t}}}{w} = J_z + \mathrm{j}\omega D_z$$

或者

$$H_{2\mathrm{t}} - H_{1\mathrm{t}} = J_z w + \left(\mathrm{j}\omega D_z + \frac{H_{3\mathrm{n}} - H_{4\mathrm{n}}}{l}\right)w \tag{5.1.1}$$

以上有关量下标 n、t 表示与交界面垂直或平行的量。现在使矩形截面收缩到一个点，且窄边 w 比长边 l 更快趋于零，矩形截面最终收缩为一线，且线的长度接近于一个点。

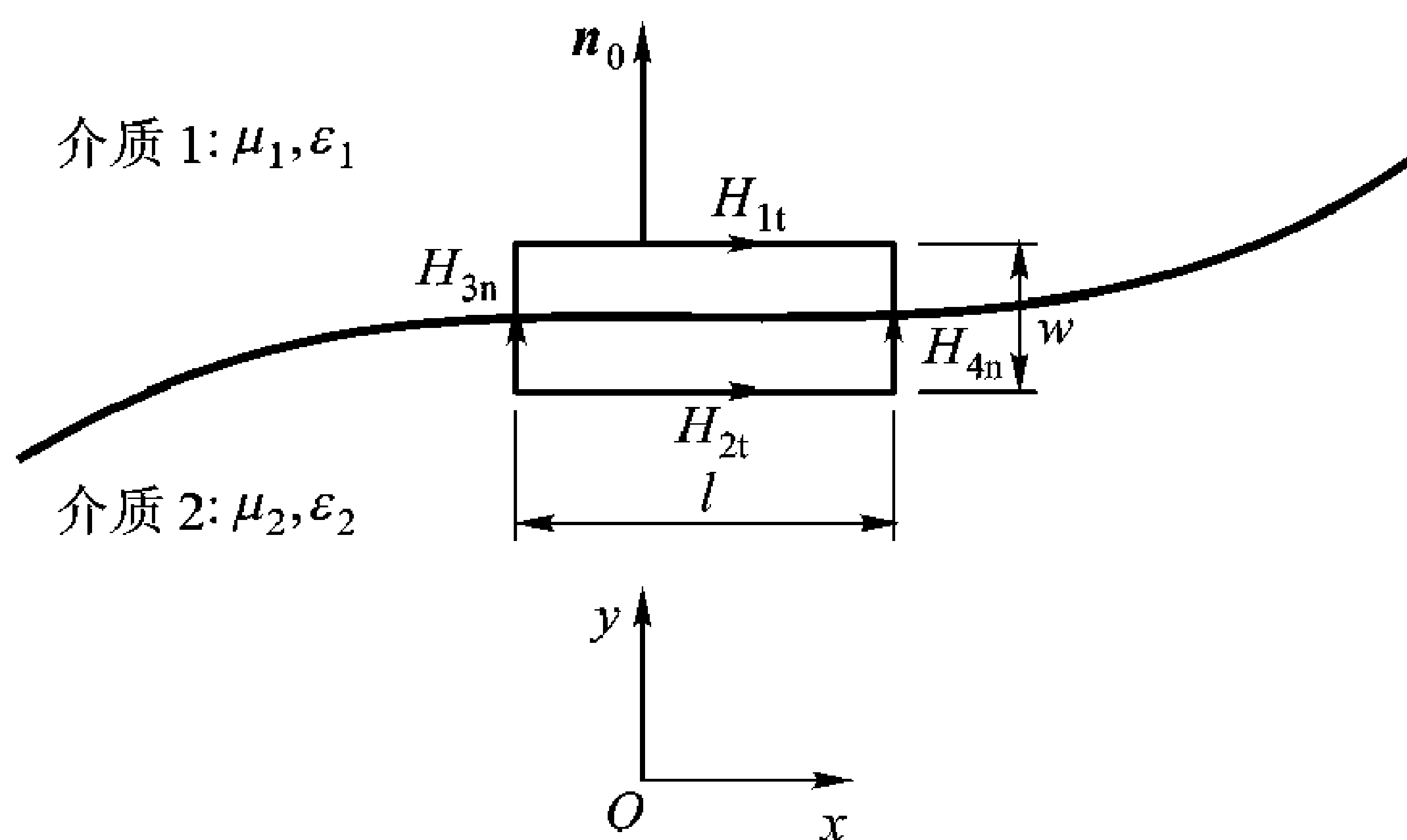


图 5-2　两不同介质的交界面，单位矢量 $\boldsymbol{n}_0$ 垂直于界面，由介质 2 指向介质 1，是位置的函数

第 4 章我们已讨论过，对于良导体电磁场主要存在于趋肤深度的厚度内。对于完纯导体趋肤深度为零，电流集中于导体表面，叫做表面电流。表面电流密度 $\boldsymbol{J}_s$ 可以看作是下式的极限

$$\boldsymbol{J}_s = \lim_{w \to 0} \boldsymbol{J}_v w \tag{5.1.2}$$

式中 $\boldsymbol{J}_v$ 为电流体密度。当 $w \to 0$ 时，式 (5.1.1) 成为

$$H_{2\mathrm{t}} - H_{1\mathrm{t}} = \boldsymbol{J}_s$$

更一般的表达式是

$$\boldsymbol{n}_0 \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{J}_s \tag{5.1.3}$$

$\boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{H}_2$ 分别为交界面两旁介质 1 和介质 2 中的磁场，$\boldsymbol{J}_s$ 为交界面上的面电流密度。

同样的分析应用于另一旋度方程 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega \boldsymbol{B}$ 的 z 分量，可得

$$\boldsymbol{n}_0 \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0 \tag{5.1.4}$$

式(5.1.3)、(5.1.4)所表示的边界条件简述如下：

在介质交界面切向电场连续，而切向磁场不连续，其不连续值等于表面电流。

常规材料的电导率总是有限，趋肤深度 δ 不等于零，为一有限值。按式(5.1.2)定义的 $\boldsymbol{J}_s$，当 $w \to 0$，即使体电流密度 $\boldsymbol{J}_v \neq 0$，面电流密度 $\boldsymbol{J}_s$ 还是等于零。所以面电流密度 $\boldsymbol{J}_s$ 仅对于完纯导体才存在。因此边界条件的陈述又可归结为：

(1) 两个具有有限电导率的介质，交界面切向电场和切向磁场都连续；

(2) 完纯导体表面切向电场为零，表面电流 $\boldsymbol{J}_s = \boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{n}_0$ 是导体表面的单位法向矢量。

在完纯导体内部电磁场不存在，即 $\boldsymbol{E}_2 = 0$，$\boldsymbol{H}_2 = 0$，导体表面切向电场要连续，所以 $\boldsymbol{E}_{1\mathrm{t}} = 0$。$\boldsymbol{E}_{1\mathrm{t}}$表示切向电场。

再研究图 5－3 所示的介质分界面，跨越交界面取一小盒子，并将 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_v$ 用于该小盒子，即流出该小盒子的电通量等于该小盒子内的电荷。

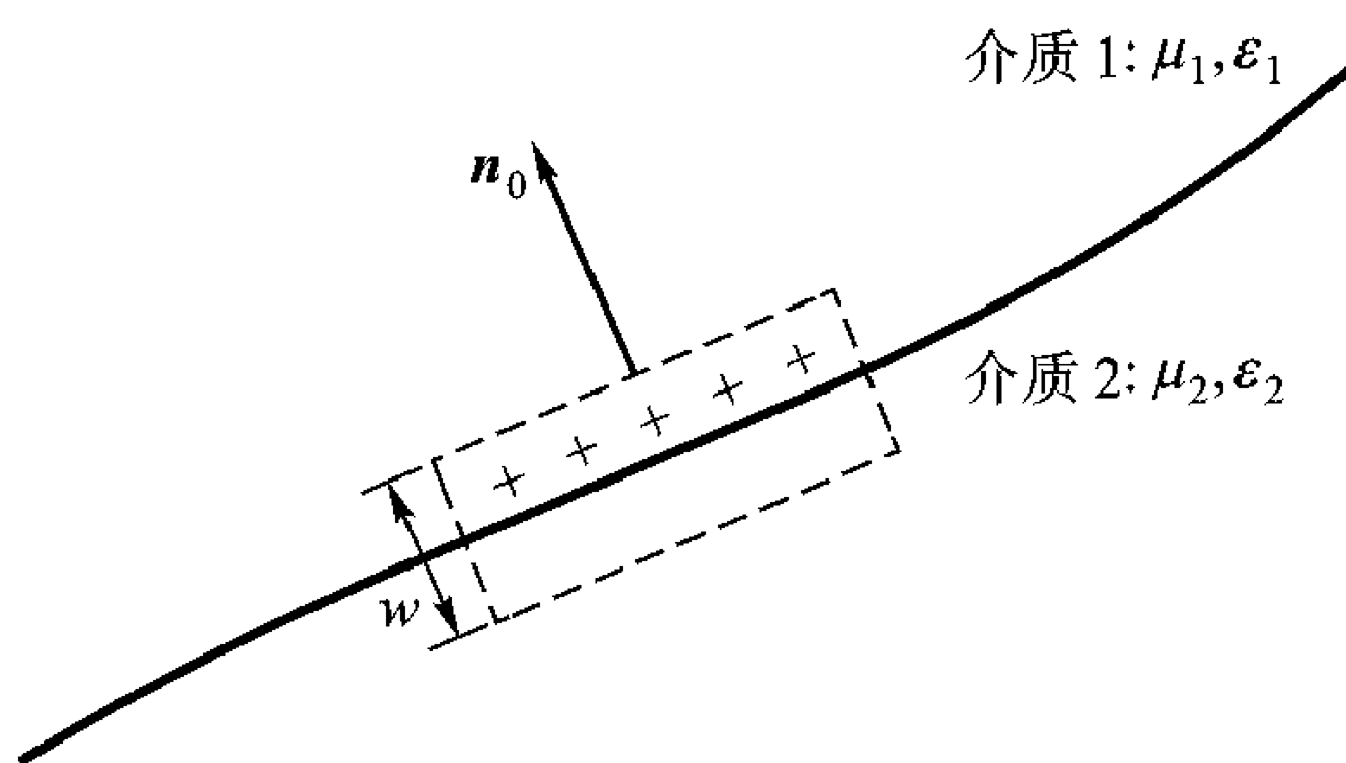


图 5－3 矢量 $\boldsymbol{D}$ 的边界条件

当高度 w 比底面积更快趋于零时，流出小盒子的电通量 = $(D_{1\mathrm{n}} - D_{2\mathrm{n}})$•底面积，而另一方面

小盒子内总电荷 = ρ_s•底面积

此处 ρ_s 为界面上的表面电荷密度(单位为 $\mathrm{C/m^2}$)，导出上面关系时，从小盒子侧面流出的电通量忽略。因为从侧面流出的电通量正比于 w，当 $w \to 0$，这个假定是可以接受的。这样从 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_v$ 可得：

$$D_{1\mathrm{n}} - D_{2\mathrm{n}} = \rho_s \tag{5.1.5a}$$

或

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{D}_1 - \boldsymbol{D}_2) = \rho_s \tag{5.1.5b}$$

同样从 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 得到

$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \tag{5.1.6a}$$

或

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0 \tag{5.1.6b}$$

式(5.1.5)、(5.1.6)表示的边界条件陈述如下：

磁通量密度 B 的法向分量在交界面两旁连续，电通量密度 D 的法向分量在交界面两旁的不连续等于交界面表面电荷密度 ρ_s。

完纯导体内部不存在电磁场，即 $B_{2n}=0$，$D_{2n}=0$，所以完纯导体表面 $B_n=0$，$D_n=\rho_s$，即完纯导体表面磁场的法线分量等于零，电通量密度的法向分量等于导体表面电荷密度。

如果将导体表面的场分解成与导体表面相切的切向场量以及与表面垂直的法向场量，将切向场量与法向场量代入麦克斯韦方程，可得到切向场量与法向场量彼此之间关系。根据这些关系，从导体表面电场的切向分量等于零、磁场的法向分量等于零又可得到导体表面电场法向分量在法线 n 方向导数等于零，即 $\frac{\mathrm{d}E_n}{\mathrm{d}n}=0$ 以及磁场的切向分量 $\boldsymbol{H}_t$ 沿法线方向导数等于零，即 $\frac{\mathrm{d}H_t}{\mathrm{d}n}=0$，导体表面边界条件的这两个表达式以后也会用到。

例 5-1　如图 5-4，$y=0$ 为完纯导体与空气交界面，导体表面 $\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{x}_0 2$ A/m，求交界面空气一侧的磁场的切向分量 $\boldsymbol{H}_{1t}$。

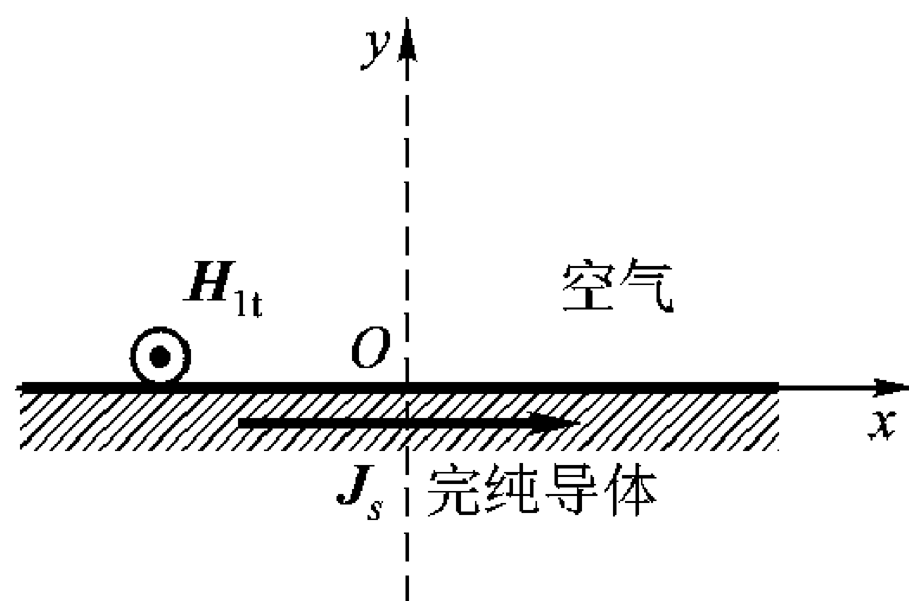


图 5-4　导体表面面电流 $\boldsymbol{J}_s$ 与空气一侧磁场 $\boldsymbol{H}$ 的关系

解： 根据式(5.1.3)

$$\boldsymbol{n}_0 \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = \boldsymbol{x}_0 2$$

$\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{y}_0$，$\boldsymbol{H}_2=0$（完纯导体内），所以

$$\boldsymbol{y}_0 \times \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{x}_0 2$$

所以

$$\boldsymbol{H}_{1t} = z_0 2 \text{ A/m} \quad (y=0^+)$$

$\boldsymbol{H}_{1t}$为与界面相切磁场分量。

例 5-2　完纯导体表面电场 $E=2$ V/m,该完纯导体浸没在水中,如图5-5所示,求导体表面电荷密度。

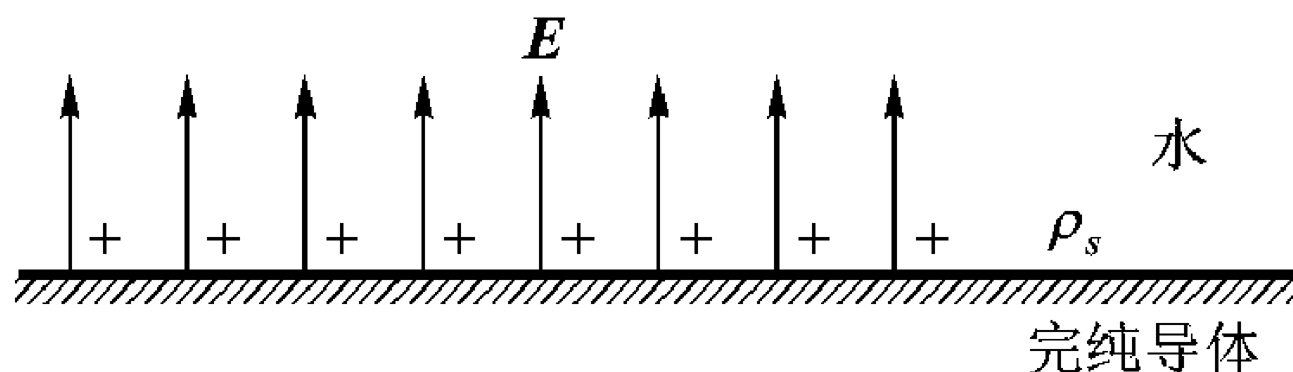


图 5-5　水中电场 $\boldsymbol{E}$ 与表面电荷密度 ρ_s 的关系

解： 完纯导体内，电场为零，所以 $D_{2n}=0$，根据式(5.1.5)得到

$$\begin{aligned}\rho_s &= D_{1n} = \varepsilon_1 E_{1n} \\ &= 80 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \times 2 \\ &= 1.41 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2\end{aligned}$$

这里假定水的相对介电常数为 80。

例 5-3 如图 5-6 所示，间距为 a 的理想平行平板导体(无限大)引导的 TEM 波沿 z 方向传播，已知其中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 表示为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{x}_0E_x=\boldsymbol{x}_0E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

求：(1) 两平板内壁上每单位宽度的电流；

(2) 两平板内壁上面电荷密度的分布。

解：根据麦克斯韦方程组中的旋度方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\mu_0\boldsymbol{H}$$

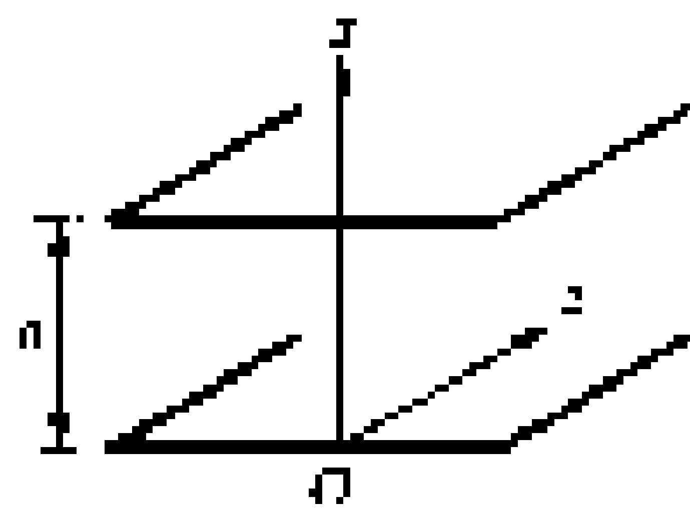


图 5-6 平行导电板

得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{E}=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}\nabla\times(\boldsymbol{x}_0E_x)\\&=\frac{1}{-\mathrm{j}\omega\mu_0}\boldsymbol{y}_0\frac{\partial E_x}{\partial z}=\boldsymbol{y}_0\frac{k}{\omega\mu}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\&=\boldsymbol{y}_0\frac{1}{\eta_0}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\end{aligned}$$

式中

$$\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=377\ \Omega$$

(1) 在内壁 $x=0$ 平面，$\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{x}_0$，在内壁 $x=a$ 平面，$\boldsymbol{n}_0=-\boldsymbol{x}_0$，$x=0$，$a$ 平面内壁上单位宽度电流为

$$\boldsymbol{J}_s\Big|_{x=0}=\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H}\Big|_{x=0}=\boldsymbol{x}_0\times\boldsymbol{y}_0\frac{E_0}{\eta_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\boldsymbol{z}_0\frac{E_0}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$\boldsymbol{J}_s\Big|_{x=a}=\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H}\Big|_{x=a}=(-\boldsymbol{x}_0)\times\boldsymbol{y}_0\frac{E_0}{\eta_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=-\boldsymbol{z}_0\frac{E_0}{\eta}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

(2) $x=0$，a 两平板内壁上面电荷密度的分布

$$\rho_s\Big|_{x=0}=\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{D}=\boldsymbol{x}_0\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E})=\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_0E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=\varepsilon_0E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

$$\rho_s\Big|_{x=a}=\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{x}_0\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{x}_0\cdot\boldsymbol{x}_0\varepsilon_0E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}=-\varepsilon_0E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

5.2 介质交界面的反射与折射

参看图 5-7，$z=0$ 为介质交界面。区域Ⅰ($z<0$)和区域Ⅱ($z>0$)分别被相对介电系数 ε_{r1}和 ε_{r2}的介质填充。以波矢 $\boldsymbol{k}_1^{\mathrm{i}}$ 为特征的平面波由介质 1 以倾斜角 θ_1 投射到介质交界面。θ_1 为波矢 $\boldsymbol{k}_1^{\mathrm{i}}$ 与交界面法线即 z 轴的夹角。根据我们日常对光现象的观察，倾斜投射到介质交界面的平面波一部分被反射回来，一部分透过介质交界面继续传播。倾斜投射到介质交界面的平面波叫入射波，被

交界面反射回来的波叫反射波，穿过交界面继续传播的波叫折射波。$\boldsymbol{k}_1^{\mathrm{i}}$、$\boldsymbol{k}_1^{\mathrm{r}}$、$\boldsymbol{k}_2^{\mathrm{t}}$ 分别为入射波、反射波、折射波的波矢。下标1、2表示属于区域Ⅰ和Ⅱ中的量，而上标i、r、t则分别表示属于入射波、反射波、折射波的量。要确定的问题是反射波与折射波传播的方向，即波矢 $\boldsymbol{k}_1^{\mathrm{r}}$、$\boldsymbol{k}_2^{\mathrm{t}}$ 的方向以及反射波、折射波相对于入射波的大小。

介质交界面对平面电磁波的反射、折射可以分为TE、TM两种情况来处理。图5-7属于TE模的情况，z 轴垂直于介质交界面，波矢 $\boldsymbol{k}_1^{\mathrm{i}}$ 与法线构成的平面叫入射面，坐标轴 x、y 方向的选择使得 $x-z$ 平面与入射面重合，也就是说 $\boldsymbol{k}$ 在 $x-z$ 平面内，只有两个分量，即 $\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$，$k_y=0$。电场 $\boldsymbol{E}=E_y\boldsymbol{y}_0$ 只有 E_y 分量，与入射面垂直，故这类波也叫垂直极化波。磁场 $\boldsymbol{H}$ 在入射面内，即与入射面平行，也与 $\boldsymbol{k}$ 垂直，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 三者相互垂直构成右手螺旋关系。第二种情况，属于TM模，如图5-8。磁场 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{y}_0H_y$，只有 H_y 分量，电场 $\boldsymbol{E}$ 与入射面平行，只有两个分量，$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{x}_0+E_z\boldsymbol{z}_0$，故又叫做平行极化波。$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 三者也构成右手螺旋关系。还有一种特殊情况，波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 z 轴重合，即入射波垂直投射到介质交界面，电场 $\boldsymbol{E}$、磁场 $\boldsymbol{H}$ 只有横向分量，$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{x}_0E_x$，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{y}_0H_y$，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$ 也构成右手螺旋关系。这种情况就是TEM模，它是TE、TM模的特例。任何复杂的电磁波都可分解成TE、TM的组合，而TEM又是TE、TM模的特例，所以介质交界面对平面波的反射、折射只要分析TE、TM两种情况即可。

边界条件是我们分析介质交界面对平面波的反射、折射的根本出发点，具体处理有两种途径：一是先写出交界面两旁入射波、反射波、折射波的有关场量，然后利用交界面的边界条件，得到反射波、折射波与入射波关系，这种方法叫做场量匹配法；二是将 $z=0$ 处相接的两介质用 $z=0$ 处级连的传输线等效，介质交界面对平面波的反射、折射问题等效为级连传输线上电压、电流波的传播问题，并用传输线理论处理介质交界面对入射波的反射与折射，这种方法叫做传输线模型法。两种方法初看起来差别较大，前者用场的方法，后者简化到路的方法，但两者完全等价。只有一个介质交界面时，两种方法都不复杂，但如果遇到多个介质交界面，用传输线模型处理就方便多了。为了使读者加深对传输线模型处理电磁波传播问题的理解，本节将平行地讨论这两种方法。

5.2.1　介质交界面对TE波(或垂直极化波)的反射与折射

1. 场量匹配法

为了利用边界条件，即介质交界面两旁电场与磁场的切向分量连续，要先写出交界面两边的电磁场量。对于图5-7(a)中 $z<0$ 的区域，即介质1所在的

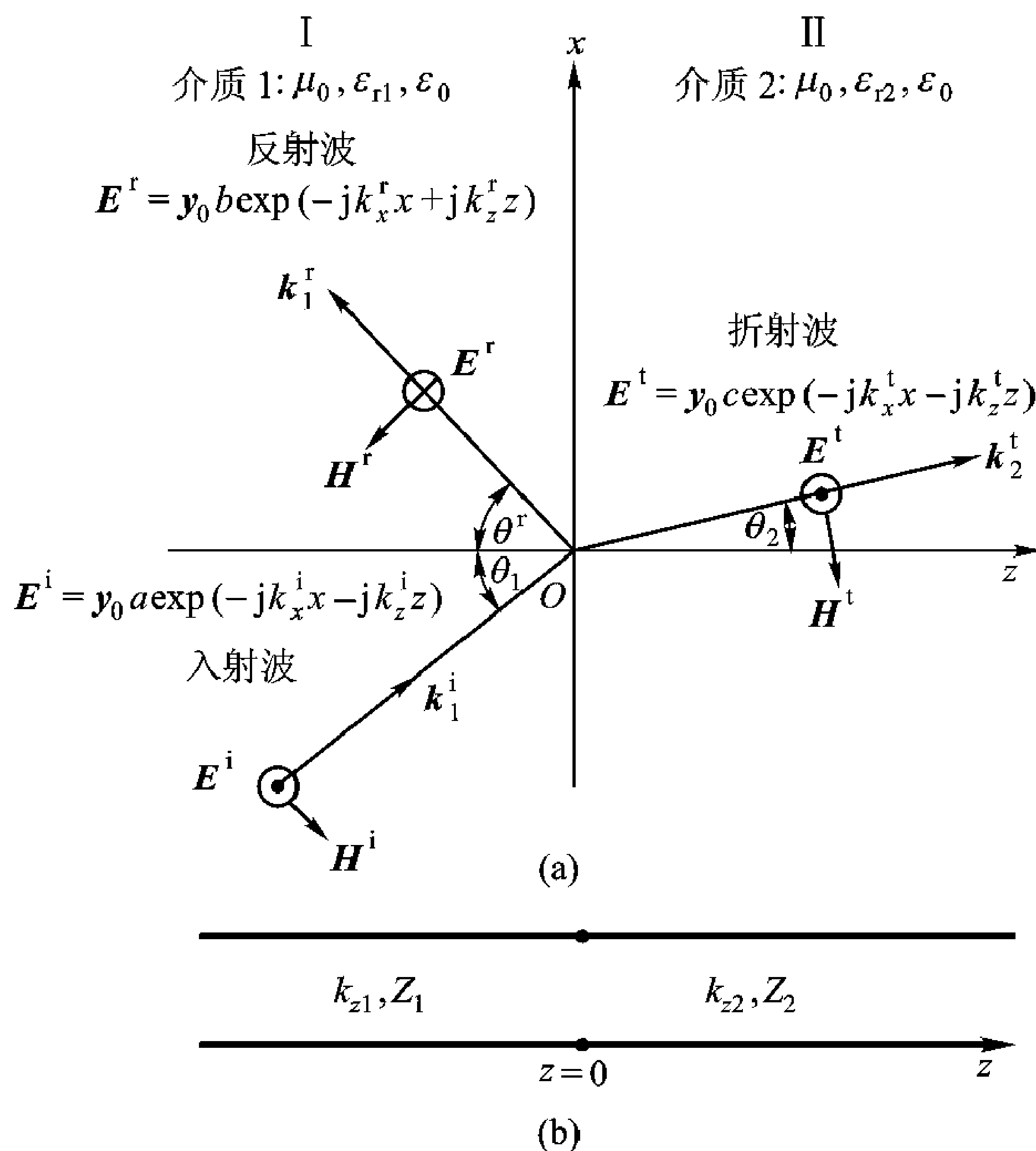


图 5－7 介质交界面对 TE 波(垂直极化波)的反射和折射

(a) 介质交界面对 TE 波(垂直极化波)的反射和折射

(b) 传输线模型

区域,入射波场与反射波场都存在,而 $z>0$ 的区域(介质 2)只有折射波。

TE 入射平面波只有 y 分量，可表示为

$$E_y^i(x, z) = a e^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z} \tag{5.2.1}$$

利用旋度方程 $-j\omega\mu_0 \boldsymbol{H}^i = \nabla \times \boldsymbol{E}^i = \nabla \times \boldsymbol{y}_0 E_y^i = \boldsymbol{z}_0 \dfrac{\partial E_y^i}{\partial x} - \boldsymbol{x}_0 \dfrac{\partial E_y^i}{\partial z}$，可得磁场的 x、z 分量为

$$H_x^i(x, z) = \frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial E_y^i}{\partial z} = -\frac{k_z^i}{\omega\mu_0} a e^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z} \tag{5.2.2}$$

$$H_z^i(x, z) = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\frac{\partial E_y^i}{\partial x} = \frac{k_x^i}{\omega\mu_0} a e^{-jk_x^i x} e^{-jk_z^i z} \tag{5.2.3}$$

同样可写出反射波场分量

$$E_y^r(x, z) = b e^{-jk_x^r x} e^{jk_z^r z} \tag{5.2.4}$$

$$H_x^r(x, z) = \frac{k_z^r}{\omega\mu_0} b e^{-jk_x^r x} e^{jk_z^r z} \tag{5.2.5}$$

$$H_z^{\rm r}(x,z)=\frac{k_x^{\rm r}}{\omega\mu_0}b{\rm e}^{-{\rm j}k_x^{\rm r}x}{\rm e}^{{\rm j}k_z^{\rm r}z} \tag{5.2.6}$$

折射波场分量

$$E_y^{\rm t}(x,z)=c{\rm e}^{-{\rm j}k_x^{\rm t}x}{\rm e}^{-{\rm j}k_z^{\rm t}z} \tag{5.2.7}$$

$$H_x^{\rm t}(x,z)=-\frac{k_z^{\rm t}}{\omega\mu_0}c{\rm e}^{-{\rm j}k_x^{\rm t}x}{\rm e}^{-{\rm j}k_z^{\rm t}z} \tag{5.2.8}$$

$$H_z^{\rm t}(x,z)=\frac{k_x^{\rm t}}{\omega\mu_0}c{\rm e}^{-{\rm j}k_x^{\rm t}x}{\rm e}^{-{\rm j}k_z^{\rm t}z} \tag{5.2.9}$$

以上式中系数 a、b、c 分别表示入射波、反射波、折射波的幅度，a 是已知的，b 和 c 是待求的，上标 i、r、t 分别表示属于入射波、反射波、折射波的场量。因为反射波与入射波在 z 方向传播方向相反，所以反射波沿 $-z$ 方向传播，用因子 ${\rm e}^{{\rm j}k_z^{\rm r}z}$表示。

交界面两边电场、磁场切向分量连续，要求对于任何 x 有

$$E_y^{\rm i}(x,0)+E_y^{\rm r}(x,0)=E_y^{\rm t}(x,0) \tag{5.2.10}$$

$$H_x^{\rm i}(x,0)+H_x^{\rm r}(x,0)=H_x^{\rm t}(x,0) \tag{5.2.11}$$

将式（5.2.1）、（5.2.2）、（5.2.4）、（5.2.5）、（5.2.7）、（5.2.8）代入式(5.2.10)、(5.2.11)得到

$$a{\rm e}^{-{\rm j}k_x^{\rm i}x}+b{\rm e}^{-{\rm j}k_x^{\rm r}x}=c{\rm e}^{-{\rm j}k_x^{\rm t}x} \tag{5.2.12}$$

$$-\frac{k_z^{\rm i}}{\omega\mu_0}a{\rm e}^{-{\rm j}k_x^{\rm i}x}+\frac{k_z^{\rm r}}{\omega\mu_0}b{\rm e}^{-{\rm j}k_x^{\rm r}x}=-\frac{k_z^{\rm t}}{\omega\mu_0}c{\rm e}^{-{\rm j}k_x^{\rm t}x} \tag{5.2.13}$$

要使式(5.2.12)、(5.2.13)对任意 x 都成立，只有等式两边指数函数中的宗量相等。即

$$k_x^{\rm i}=k_x^{\rm r}=k_x^{\rm t}=k_x \tag{5.2.14}$$

这就是说沿介质交界面传播常数 $\boldsymbol{k}$ 的 x 分量 k_x 在介质交界面两边连续。

参看图 5－7，入射波波矢 $\boldsymbol{k}_1^{\rm i}$ 与 z 轴夹角为 θ_1，所以

$$k_x^{\rm i}=k_1^{\rm i}\sin\theta_1=k_1\sin\theta_1$$

$$k_z^{\rm i}=k_1^{\rm i}\cos\theta_1=k_1\cos\theta_1$$

$$k_1=\omega\sqrt{\varepsilon_{\rm r1}\varepsilon_0\mu_0}=k_0\sqrt{\varepsilon_{\rm r1}}$$

入射波与反射波的色散方程为

$$k_x^{\rm i^2}+k_z^{\rm i^2}=k_1^2=k_0^2\varepsilon_{\rm r1}$$

$$k_x^{\rm r^2}+k_z^{\rm r^2}=k_1^2=k_0^2\varepsilon_{\rm r1}$$

因为 $k_x^{\rm i}=k_x^{\rm r}=k_x$，故由上两式可见，入射波与反射波 z 方向的传播常数相等，即

$$k_z^{\mathrm{r}} = k_z^{\mathrm{i}} = k_{z1} \tag{5.2.15}$$

由式(5.2.14)、(5.2.15)可知，入射角与反射角的正切具有相同的数值$\dfrac{k_x}{k_{z1}}$，即入射角与反射角相等：

$$\theta^{\mathrm{r}} = \theta_1 \tag{5.2.16}$$

定义折射波波矢与 z 轴夹角 θ_2 为折射角，则折射波 x 方向传播常数

$$k_x^{\mathrm{t}} = k_2 \sin\theta_2 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_{\mathrm{r2}} \varepsilon_0}\sin\theta_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r2}}}\sin\theta_2$$

又因为

$$k_x^{\mathrm{t}} = k_x^{\mathrm{i}} = k_0\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r1}}}\sin\theta_1$$

由此可得

$$\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r1}}}\sin\theta_1 = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r2}}}\sin\theta_2 \tag{5.2.17a}$$

或

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{5.2.17b}$$

其中 n 为介质的折射率，且 $n = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$。这就是物理学中熟知的斯耐尔(Snell)定律。光学中常用式(5.2.17b)这种形式。介质 2 中 z 方向传播常数 k_{z2} 可由介质 2 的色散方程

$$k_2^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_{\mathrm{r2}} \varepsilon_0 = k_x^{\mathrm{t}^2} + k_z^{\mathrm{t}^2}$$

得到

$$k_z^{\mathrm{t}} = k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^{\mathrm{t}^2}} = k_0\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r2}} - \varepsilon_{\mathrm{r1}}\sin^2\theta_1} \tag{5.2.18}$$

下面求相对于入射波而言反射波与折射波的大小。将式(5.2.14)、(5.2.15)、(5.2.18)代入边界条件关系式(5.2.12)、(5.2.13)得到

$$a + b = c \tag{5.2.19}$$

$$Y_1(a - b) = Y_2 c \tag{5.2.20}$$

式中

$$Y_i = \frac{k_{zi}}{\omega\mu_0}\ (i = 1 \text{ 或 } 2) \tag{5.2.21}$$

具有导纳量纲，叫做 z 方向特征波导纳，其倒数 $Z_i = 1/Y_i$ 具有阻抗量纲，称为 z 方向特征波阻抗。

定义交界面 $z = 0$ 处反射波电场 $E_y^{\mathrm{r}}(z=0)$与入射波电场 $E_y^{\mathrm{i}}(z=0)$之比为 $z=0$ 处反射系数 $\Gamma(z=0)$，折射波电场 $E_y^{\mathrm{t}}(z=0)$与 $E_y^{\mathrm{i}}(z=0)$之比为 $z=0$ 处折射系数 $T(z=0)$，即

$$\Gamma(z=0) = \frac{E_y^{\mathrm{r}}(z=0)}{E_y^{\mathrm{i}}(z=0)} = \frac{b}{a}$$

$$T(z=0)=\frac{E_y^{t}(z=0)}{E_y^{i}(z=0)}=\frac{c}{a}$$

由式(5.2.19)、(5.2.20)解得 b/a，c/a，故

$$\Gamma(z=0)=\frac{Y_1-Y_2}{Y_1+Y_2}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}$$

$$T(z=0)=\frac{2Y_1}{Y_1+Y_2}=\frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}=1+\Gamma(z=0)$$

将 Z_1、Z_2 代入得到

$$\Gamma(z=0)=\frac{k_{z1}-k_{z2}}{k_{z1}+k_{z2}} \tag{5.2.22}$$

$$T(z=0)=\frac{2k_{z1}}{k_{z1}+k_{z2}} \tag{5.2.23}$$

式中

$$k_{zi}=\sqrt{k_i^2-k_x^2}\quad (i=1,2)$$

$$k_i^2=k_0^2\varepsilon_{ri}=\omega^2\mu_0\varepsilon_{ri}\varepsilon_0\quad (i=1,2)$$

2. 传输线模型法

介质交界面两边无论是 $z<0$ 的区域Ⅰ还是 $z>0$ 的区域Ⅱ，都是均匀介质。根据第4章关于均匀介质的传输线模型，区域Ⅰ、Ⅱ中 z 方向波的传播都可用特定参数的传输线等效。对于区域Ⅰ，TE模等效传输线的传播常数 κ_1 与特征阻抗 Z_1 为

$$\kappa_1=k_{z1}=k_1\cos\theta_1$$

$$Z_1=\omega\mu/k_{z1}$$

对于区域Ⅱ，等效传输线的传播常数 κ_2、特征阻抗 Z_2 为

$$\kappa_2=k_{z2}=\sqrt{k_2^2-k_{x1}^2}=\sqrt{k_2^2-(k_1\sin\theta_1)^2}$$

$$Z_2=\omega\mu/k_{z2}$$

等效传输线1与2能否在交界面直接连起来，还需要证明。为此要利用交界面的边界条件。根据均匀介质的传输线模型，对于TE模，有

$$\boldsymbol{E}_{t1}=\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{\rho})V_1(z) \tag{5.2.24}$$

$$\boldsymbol{H}_{t1}=\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{\rho})I_1(z) \tag{5.2.25}$$

根据4.6节，在图5-7所示的特定坐标系下

$$\boldsymbol{e}(\rho)=\varphi(x)\boldsymbol{y}_0 \tag{5.2.26}$$

$$\boldsymbol{h}(\rho)=\varphi(x)\boldsymbol{x}_0 \tag{5.2.27}$$

模式函数 $\varphi(x)$满足

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2\right)\varphi(x)=0 \tag{5.2.28}$$

不管区域Ⅰ还是区域Ⅱ，边界都趋于无穷远，其解为

$$\varphi(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x} \tag{5.2.29}$$

由此可得

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}1}=\boldsymbol{y}_0 E_{y1}=-\boldsymbol{y}_0\varphi(x)V_1(z) \tag{5.2.30}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}1}=\boldsymbol{x}_0 H_{x1}=\boldsymbol{x}_0\varphi(x)I_1(z) \tag{5.2.31}$$

同样可得

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}2}=\boldsymbol{y}_0 E_{y2}=-\boldsymbol{y}_0\varphi(x)V_2(z) \tag{5.2.32}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}2}=\boldsymbol{x}_0 H_{x2}=\boldsymbol{x}_0\varphi(x)I_2(z) \tag{5.2.33}$$

介质交界面($z=0$)两旁 $\boldsymbol{E}_\mathrm{t}$、$\boldsymbol{H}_\mathrm{t}$ 连续，即

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}1}=\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}2}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}1}=\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}2}$$

将式(5.2.30～33)代入得到

$$\varphi(x)V_1(z=0)=\varphi(x)V_2(z=0)$$

$$\varphi(x)I_1(z=0)=\varphi(x)I_2(z=0)$$

即

$$V_1(z=0)=V_2(z=0) \tag{5.2.34}$$

$$I_1(z=0)=I_2(z=0) \tag{5.2.35}$$

介质交界面($z=0$)处 V、I 连续，意味着两传输线可直接连起来，见图 5－7(b)。

因为传输线Ⅱ趋于无穷远，没有反射波。$z=0$ 处输入阻抗等于其特征阻抗 Z_2，根据传输线理论，$z=0$ 处反射系数 Γ 为

$$\Gamma(z=0)=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1} \tag{5.2.36}$$

因为

$$V_1(z)=V_1^{\mathrm{i}}[1+\Gamma(z)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z1}z}$$

$$V_2(z)=V_2^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z2}z}$$

在 $z=0$ 交界面，$V_1(0)=V_2(0)$，得到

$$V_1^{\mathrm{i}}[1+\Gamma(z=0)]=V_2^{\mathrm{i}}$$

所以折射系数 $T(z=0)=\dfrac{E_y^{\mathrm{t}}}{E_y^{\mathrm{i}}}=\dfrac{V_2^{\mathrm{i}}}{V_1^{\mathrm{i}}}$为

$$T(z=0)=1+\Gamma(z=0) \tag{5.2.37}$$

与前面用场量匹配法得到的结果一致。

解传输线方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k_{zi}Z_iI_i\ (z)\\ \dfrac{\mathrm{d}I_i\ (z)}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{j}k_{zi}Y_iV_i\ (z)\end{cases}$$

式中

$$Z_i=\frac{1}{Y_i}=\omega\mu/k_{zi}$$

下标 $i=1$ 或 2，表示区域Ⅰ、Ⅱ中的量，可得到级连传输线上电压与电流分布，也就是 E_y、H_x 沿 z 轴的分布。

根据传输线理论在 $z<0$ 区域Ⅰ的解为

$$\begin{cases}V_1\ (z)=V_1^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z1}z}+V_1^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_{z1}z}=[1+\Gamma(z)]V_1^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z1}z} & (5.2.38)\\ I_1\ (z)=\dfrac{1}{Z_1}[V_1^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z1}z}-V_1^{\mathrm{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_{z1}z}]=[1-\Gamma(z)]\dfrac{V_1^{\mathrm{i}}}{Z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z1}z} & (5.2.39)\end{cases}$$

$z>0$ 的区域Ⅱ趋于无穷远，没有反射波只有入射波，有

$$\begin{cases}V_2\ (z)=V_2^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z2}z} & (5.2.40)\\ I_2\ (z)=\dfrac{V_2^{\mathrm{i}}}{Z_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z2}z} & (5.2.41)\end{cases}$$

式中入射波幅度 V_1^{i} 被认为是已知的，V_2^{i} 可由式(5.2.37)得到。式(5.2.38)~(5.2.41)就是描述区域Ⅰ、Ⅱ中 E_y、H_x 沿 z 轴分布的关系式。

将式(5.2.38)、(5.2.29)代入式(5.2.24)，并将式(5.2.24)与式(5.2.1)、(5.2.4)进行比较，式(5.2.24)右边的第一项电压入射波即式(5.2.1)，第二项电压反射波即式(5.2.4)。由此可见，场量匹配法与传输线模型法是完全等价的。

5.2.2 介质交界面对TM波的反射与折射

1. 场量匹配法

介质交界面对TM平面波的反射、折射示于图5-8。对于TM波，波矢 $\boldsymbol{k}$ 也只有 k_x、k_z 两个分量，$k_y=0$，磁场 $\boldsymbol{H}$ 与入射面垂直，只有 H_y 分量，电场 $\boldsymbol{E}$ 与入射面平行，且与 $\boldsymbol{k}$ 垂直。与TE波分析类似，先写出区域Ⅰ和Ⅱ中与界面相切的电场 E_x 和 H_y。

入射波场

$$H_y^{\mathrm{i}}=a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z} \tag{5.2.42}$$

利用旋度方程 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$，得到

$$\boldsymbol{E} = E_x \boldsymbol{x}_0 + E_z \boldsymbol{z}_0 = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\left(-\boldsymbol{x}_0 \frac{\partial H_y}{\partial z} + \boldsymbol{z}_0 \frac{\partial H_y}{\partial x}\right)$$

所以

$$E_x^{\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\left(-\frac{\partial H_y^{\mathrm{i}}}{\partial z}\right) = \frac{k_z^{\mathrm{i}}}{\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} a \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z} \tag{5.2.43}$$

$$E_z^{\mathrm{i}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\left(\frac{\partial H_y^{\mathrm{i}}}{\partial x}\right) = -\frac{k_x^{\mathrm{i}}}{\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} a \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{i}}z} \tag{5.2.44}$$

同样写出反射波场

$$H_y^{\mathrm{r}} = b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z^{\mathrm{r}}z} \tag{5.2.45}$$

$$E_x^{\mathrm{r}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\left(-\frac{\partial H_y^{\mathrm{r}}}{\partial z}\right) = -\frac{k_z^{\mathrm{r}}}{\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} b \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z^{\mathrm{r}}z} \tag{5.2.46}$$

$$E_z^{\mathrm{r}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\left(\frac{\partial H_y^{\mathrm{r}}}{\partial x}\right) = -\frac{k_x^{\mathrm{r}}}{\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0} b \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_z^{\mathrm{r}}z} \tag{5.2.47}$$

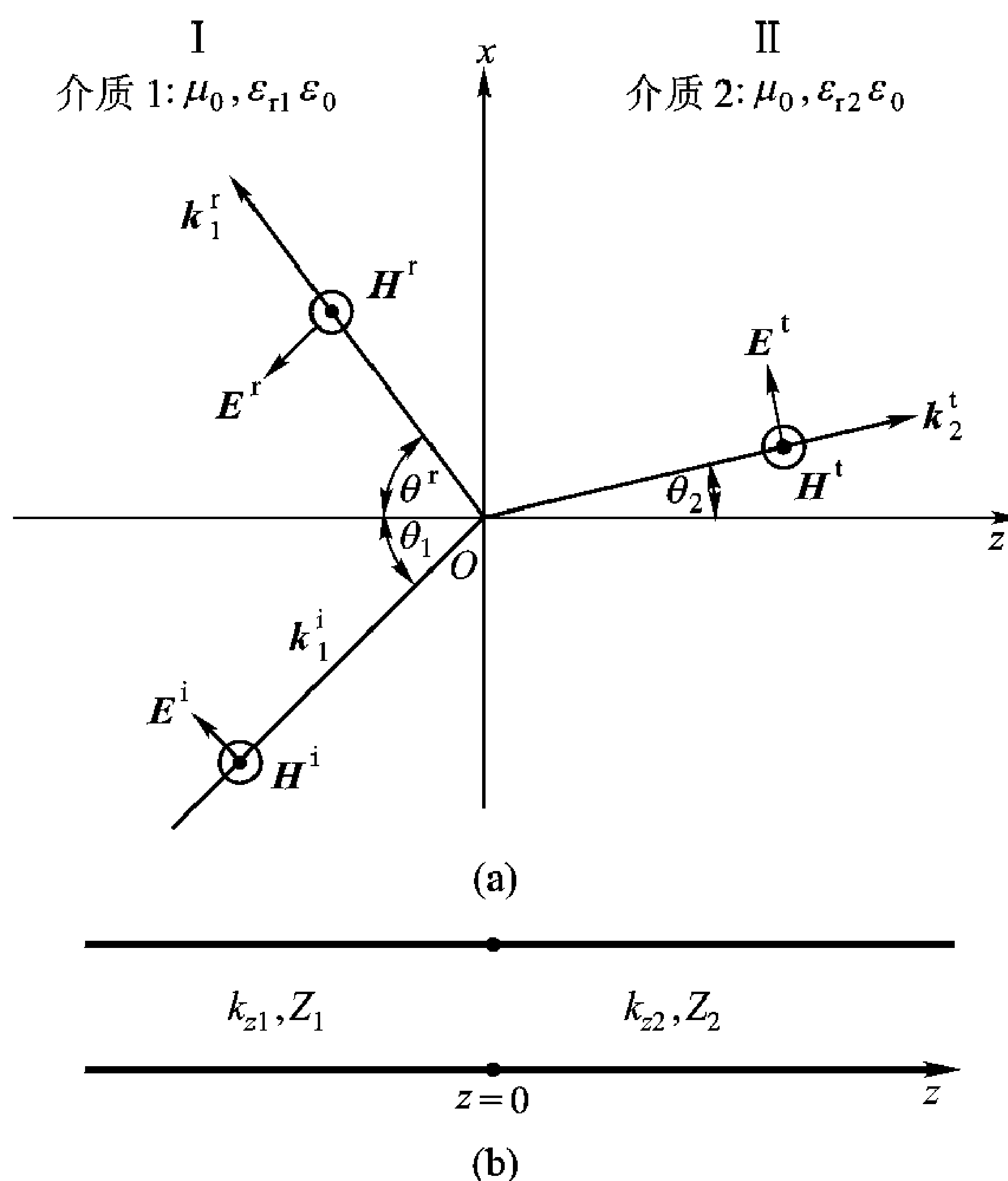


图 5-8　介质交界面对 TM 波(平行极化波)的反射、折射

(a) 介质交界面对 TM 波(平行极化波)的反射、折射

(b) 传输线模型

折射波场

$$H_y^{\mathrm{t}} = c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{t}}z} \tag{5.2.48}$$

$$E_x^{\mathrm{t}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\left(-\frac{\partial H_y^{\mathrm{t}}}{\partial z}\right) = \frac{k_z^{\mathrm{t}}}{\omega\varepsilon_{r2}\varepsilon_0} c \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{t}}z} \tag{5.2.49}$$

$$E_z^{\mathrm{t}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_{\mathrm{r2}}\varepsilon_0}\left(\frac{\partial H_y^{\mathrm{t}}}{\partial x}\right) = -\frac{k_x^{\mathrm{t}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r2}}\varepsilon_0} c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z^{\mathrm{t}}z} \tag{5.2.50}$$

代入边界条件关系式

$$H_y^{\mathrm{i}}(x,0) + H_y^{\mathrm{r}}(x,0) = H_y^{\mathrm{t}}(x,0) \tag{5.2.51}$$

$$E_x^{\mathrm{i}}(x,0) + E_x^{\mathrm{r}}(x,0) = E_x^{\mathrm{t}}(x,0) \tag{5.2.52}$$

将式(5.2.42)、(5.2.43)、(5.2.45)、(5.2.46)、(5.2.48)、(5.2.49)代入式(5.2.51)、(5.2.52)，可以得到与TE波类似的关系式

$$\begin{cases} a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x} + b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x} = c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x} & (5.2.53) \\ \dfrac{k_z^{\mathrm{i}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r1}}\varepsilon_0} a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{i}}x} - \dfrac{k_z^{\mathrm{r}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r1}}\varepsilon_0} b\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{r}}x} = \dfrac{k_z^{\mathrm{t}}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r2}}\varepsilon_0} c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x^{\mathrm{t}}x} & (5.2.54) \end{cases}$$

由此得到

$$k_x^{\mathrm{i}} = k_x^{\mathrm{r}} = k_x^{\mathrm{t}} = k_x = k_1 \sin\theta_1$$

$$k_z^{\mathrm{i}} = k_z^{\mathrm{r}} = k_{z1} = k_1 \cos\theta_1$$

$$k_z^{\mathrm{t}} = k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^{\mathrm{t}2}} = k_0\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r2}} - \varepsilon_{\mathrm{r1}}\sin^2\theta_1}$$

由介质1的色散关系也可得出入射角与反射角相等的结论，折射角 θ_2 与入射角 θ_1 也满足式(5.2.17)，即斯奈尔定律。另有

$$a + b = c \tag{5.2.55}$$

$$Z_1(a - b) = Z_2 c \tag{5.2.56}$$

式中

$$Z_i = \frac{k_{zi}}{\omega\varepsilon_{\mathrm{r}i}\varepsilon_0} \quad (i = 1 \text{ 或 } 2) \tag{5.2.57}$$

Z_i 具有阻抗量纲，叫做TM波 z 方向特征波阻抗，其倒数 $\frac{1}{Z_i} = Y_i$ 叫做TM波 z 方向特征波导纳。

定义交界面($z=0$)处反射系数 $\Gamma(z=0)$ 为交界面处反射波电场 $E_x^{\mathrm{r}}(z=0)$ 与入射波电场 $E_x^{\mathrm{i}}(z=0)$ 之比，折射系数 $T(z=0)$ 为 $H_y^{\mathrm{t}}(z=0)$ 与 $H_y^{\mathrm{i}}(z=0)$ 之比，即

$$\Gamma(z=0) = \frac{E_x^{\mathrm{r}}}{E_x^{\mathrm{i}}} = -\frac{b}{a}$$

$$T(z=0) = \frac{H_y^{\mathrm{t}}}{H_y^{\mathrm{i}}} = \frac{c}{a}$$

由式(5.2.55)、(5.2.56)解得 $-\frac{b}{a}$，$\frac{c}{a}$，故

$$\Gamma(z=0) = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}$$

$$T\ (z=0)=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}=1-\Gamma\ (z=0)$$

所以，如果用 Z_1、Z_2 或 Y_1、Y_2 表示 TM 模反射系数，形式上它与 TE 模的表达式一致。注意，不管是 TE 还是 TM，本书都以电场的切向分量 E_t 定义反射系数 Γ。如果 TM 模的反射系数以磁场的切向分量 H_t 定义，那么因为以 H_t 定义的反射系数与 E_t 定义的反射系数相位上刚好相差 180°，所以如以 H_t 定义反射系数，则折射系数与反射系数关系也是 $T_{Ht}=1+\Gamma_{Ht}$。将 Z_1、Z_2 表达式代入 Γ、T 表达式得到

$$\Gamma\ (z=0)=\frac{\varepsilon_{r1}k_{z2}-\varepsilon_{r2}k_{z1}}{\varepsilon_{r1}k_{z2}+\varepsilon_{r2}k_{z1}} \tag{5.2.58}$$

$$T\ (z=0)=\frac{2\varepsilon_{r2}k_{z1}}{\varepsilon_{r1}k_{z2}+\varepsilon_{r2}k_{z1}} \tag{5.2.59}$$

同样式(5.2.58)、(5.2.59)中

$$k_{zi}=\sqrt{k_i^2-k_x^2}\quad (i=1,2)$$

$$k_i^2=k_0^2\varepsilon_{ri}=\omega^2\mu\varepsilon_{ri}\varepsilon_0\quad (i=1,2)$$

2. 传输线模型法

与分析 TE 波投射到介质交界面的情况一样，取 z 为纵向，区域Ⅰ与Ⅱ z 方向波的传播都可用特定参数的传输线等效。对于区域Ⅰ，TM 模等效传输线的传播常数$\kappa_1=k_{z1}$，特征阻抗 $Z_1=\dfrac{k_{z1}}{\omega\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}$，区域Ⅱ等效传输线的传播常数 $\kappa_2=k_{z2}$，特征阻抗 $Z_2=\dfrac{k_{z2}}{\omega\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}$。交界面切向场连续可导出交界面 $z=0$ 处，$V_1\ (z=0^-)=V_2\ (z=0^+)$，$I_1\ (z=0^-)=I_2\ (z=0^+)$，因此传输线 1 与 2 可以直接连起来，如图 5－8 (b)所示。因为区域Ⅱ在 $+z$ 方向趋于无穷远，传输线 2 在 z 方向也趋于无穷远，只有入射波、没有反射波，其输入阻抗 Z_{in}等于传输线 2 的特征阻抗 Z_2，根据传输线理论，在 $z=0$ 处反射系数

$$\Gamma\ (z=0)=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1} \tag{5.2.60}$$

区域Ⅰ、Ⅱ中电流可表示为

$$I_1\ (z)=I_1^{i}e^{-jk_z z}+I_1^{r}e^{jk_z z}=[1-\Gamma(z)]I_1^{i}e^{-jk_{z1}z}$$

上式括弧中 $\Gamma\ (z)$前负号是因为电压反射系数与电流反射系数相差一负号，而本书定义的反射系数都是对电压而言(或电场而言)的，并且

$$I_2\ (z)=I_2^{i}e^{-jk_{z2}z}$$

由 $z=0$ 处 $I_1\ (z=0)=I_2\ (z=0)$得到

$$I_1^{i}\ (1-\Gamma(z=0))=I_2^{i}$$

所以

$$\frac{I_2^{\mathrm{i}}}{I_1^{\mathrm{i}}} = 1 - \Gamma\ (z = 0)$$

式中 I_2^{i} 是区域Ⅱ的入射波电流，I_1^{i} 是区域Ⅰ入射波电流，$\frac{I_2^{\mathrm{i}}}{I_1^{\mathrm{i}}}$即交界面折射系数 $T\ (z=0)$，所以

$$T\ (z=0) = 1 - \Gamma\ (z=0) \qquad (5.2.61)$$

与用场量匹配法得到的结果一致。

介质交界面对平面波的反射折射的传输线模型可以这样理解，在图 5-7 和 5-8 所示的特定坐标系下，以波矢 $\boldsymbol{k}_1^{\mathrm{i}}$ 为特征的平面波倾斜投射到介质交界面时，在区域Ⅰ与Ⅱ，y 方向没有波的传播，x 方向有 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}$ 的行波传播，而在 z 方向，与 z 垂直的横向电场、磁场沿 z 轴的传播与级连传输线上电压、电流波的传播等效。

例 5-4　做镜片的树脂材料介电系数 $\varepsilon_2 = 1.67\varepsilon_0$，光波（TE 模）从空气一侧以 30° 角投射到 $z=0$ 的空气与树脂交界面[图 5-9(a)]，求交界面反射系数 Γ (0) 及折射系数 T (0) 以及空气中与树脂中 z 方向场分布。设入射波电场 E^{i} (0) = 1 V/m，级连等效传输线模型如图 5-9 (b)和 (c)。

解： $k_1 = k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$

$$k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_0} = \sqrt{1.67}\,k_0$$

空气一侧等效传输线参数

$$\kappa_1 = k_{z1} = k_1\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}k_0 = 0.866k_0$$

$$Z_1 = \frac{\omega\mu}{k_{z1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\eta_0 = 1.155\eta_0$$

树脂一侧等效传输线参数

$$\kappa_2 = k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - (k_1\ \sin 30)^2}$$
$$= k_0\sqrt{1.67 - 0.25} = 1.19k_0$$

$$Z_2 = \frac{\omega\mu}{k_{z2}} = \frac{\eta_0}{1.19} = 0.839\eta_0$$

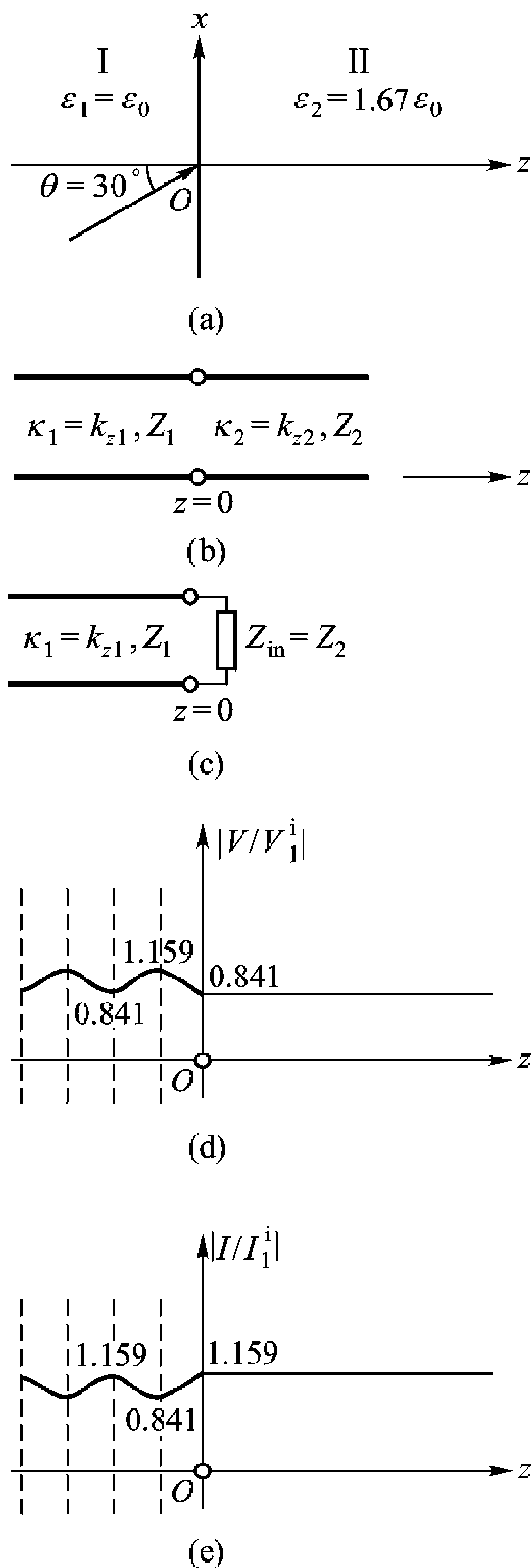


图 5-9　例 5-4 图
(a) 介质交界面　(b)、(c) 传输线模型
(d)、(e) 传输线上电压、电流分布

$$\Gamma(0)=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}=\frac{0.839-1.155}{0.839+1.155}=-0.159$$

$$V_1^{\mathrm{i}}=1\ \mathrm{V/m}$$

$$|V_1(0)|=|1+\Gamma_1(0)|=1-0.159=0.841\ \mathrm{V}$$

$$|V_{1\max}|=1+|\Gamma|=1.159$$

$$|V_{1\min}|=1-|\Gamma|=0.841$$

$$d_{\min 1}=\frac{\lambda}{2}$$

空气侧入射波电流

$$I_1^{\mathrm{i}}=\frac{V_1^{\mathrm{i}}}{Z_1}$$

$$\left|\frac{I_1(0)}{I_1^{\mathrm{i}}}\right|=I_1^{\mathrm{i}}|1-\Gamma(0)|=1.159$$

$$\left|\frac{I_{1\max}}{I_1^{\mathrm{i}}}\right|=(1+|\Gamma|)I_1^{\mathrm{i}}=1.159$$

$$\left|\frac{I_{1\min}}{I_1^{\mathrm{i}}}\right|=(1-|\Gamma|)I_1^{\mathrm{i}}=0.841$$

树脂侧电压、电流为行波。空气侧、树脂侧 z 方向 E_y、H_x 分布即传输线上电压、电流分布，如图 5-9 (d)，(e)。

基于本节得到的结果，有关介质交界面对平面波的反射、折射的进一步讨论将在 5.3~5.5 节中进行。

5.3 临界角与布儒斯特角

5.3.1 临界角

下面进一步讨论式(5.2.17)表示的斯奈尔定律，图5-10 是其图解。图5-10 (a)对应的是 $n_1<n_2$ 的情况。左右两个半圆的半径分别为 k_1 与 k_2 (k_1、k_2 为介质 1、2 的波数)，波矢为 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}}$ 的入射波投射到介质交界面产生波矢为 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{r}}$、$\boldsymbol{k}^{\mathrm{t}}$ 的反射波、折射波，它们的 x 分量都是相等的。图 5-10 (b)对应的是 $n_1>n_2$ 的情况，当入射角 θ 大于临界角 θ_{c}，k_x 比 k_2 还要大，此时

$$k_{z2}^2=k_2^2-k_x^2<0$$

或

$$k_{z2}=\pm\mathrm{j}\alpha$$

此处 $\alpha=\sqrt{k_x^2-k_2^2}$ 是正的实数，我们选 $k_{z2}=-\mathrm{j}\alpha$，以保证折射波场

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{y}_0 T a \mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x} \tag{5.3.1a}$$

有物理意义。

式(5.3.1a)乘 $e^{j\omega t}$ 并取实部得到 $\boldsymbol{E}^{t}$ 的瞬态表达式

$$\boldsymbol{E}^{t}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{y}_0 Ta\mathrm{e}^{-\alpha z}\cos(\omega t-k_x x) \tag{5.3.1b}$$

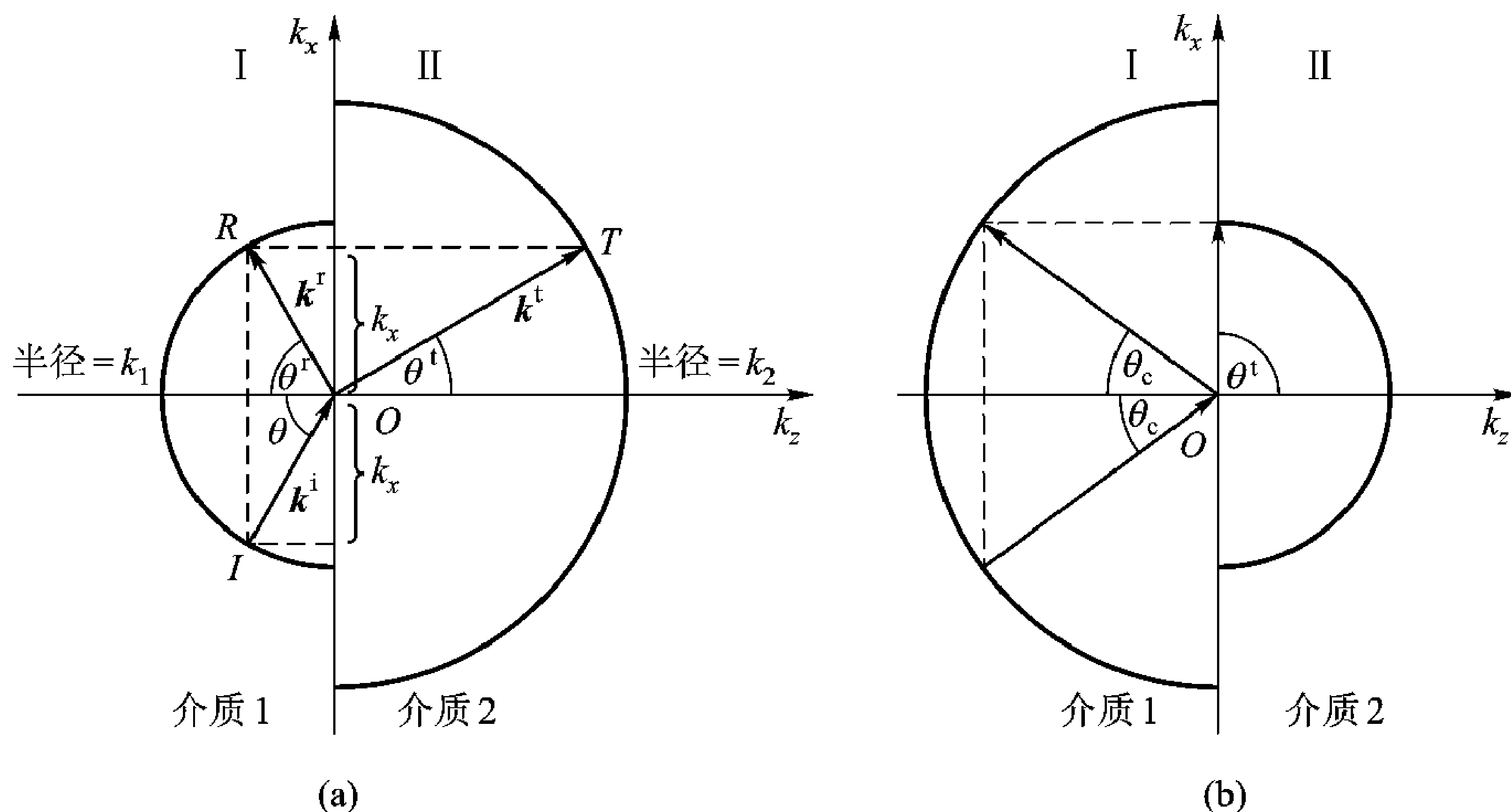


图 5-10　斯奈尔定律的图解，当 θ 大于临界角 θ_c 时全反射

(a) $n_1<n_2$　(b) $n_1>n_2$，当 θ 大于 θ_c 时全反射

波沿 x 方向传播，等相位面仍然是平面，但 $\boldsymbol{E}^{t}$ 的大小沿 z 作指数衰减($e^{-\alpha z}$)。我们称这种平面波为非均匀平面波，场的幅值在相位等于常数的平面上并不到处相等，而是随离开界面距离的增加不断衰减，最终到零，故这种非均匀平面波又叫做表面波，以强调这种波只有在表面附近才能检测到。注意，表面波的衰减与有限电导率 σ 的介质中平面波的衰减不同，前者波沿界面(x 方向)传播，但在与界面垂直的方向波的幅度不断衰减；后者波传播方向与波幅度衰减方向相同。

只有当入射角 θ 大于临界角 θ_c 时，表面波才出现，即

$$k_x>k_2 \text{ 或 } \theta>\theta_c$$

θ_c 可表示为

$$\theta_c=\arcsin\left(\frac{k_2}{k_1}\right)=\arcsin\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} \tag{5.3.2}$$

必须记住只有 $n_1>n_2$ 时，即 $k_1>k_2$ 时临界角才存在。下面将证明入射角 θ 大于临界角 θ_c 时介质交界面将发生全反射。

当 $\theta_1>\theta_c$ 时，即入射角大于临界角时，k_{z2}为

$$k_{z2}=k_0\sqrt{\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r1}\sin^2\theta_1}=-jk_0\sqrt{\varepsilon_{r1}\sin^2\theta_1-\varepsilon_{r2}}=-j\alpha_2$$

$$\alpha_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_{r1}\sin^2\theta_1 - \varepsilon_{r2}}$$

α_2 是实数，故 k_{z2}是虚数。注意，为保证折射波场有物理意义，k_{z2}取 $-\mathrm{j}\alpha_2$ 形式。此时特征导纳 Y_2 为

$$Y_{2\mathrm{TE}} = \frac{k_{z2}}{\omega\mu} = -\frac{\mathrm{j}\alpha_2}{\omega\mu}$$

$$Y_{2\mathrm{TM}} = \mathrm{j}\,\frac{\omega\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}{\alpha_2}$$

因而 Y_2 也是虚数。此时交界面的反射系数 Γ 由式(5.2.22)、(5.2.58)可得

$$\Gamma_{\mathrm{TE}} = \frac{\cos\theta_1 + \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}}{\cos\theta_1 - \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}} = e^{\mathrm{j}2\varphi_{\mathrm{TE}}} \tag{5.3.3}$$

$$\Gamma_{\mathrm{TM}} = \frac{-\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\cos\theta_1 - \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}}{\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\cos\theta_1 - \mathrm{j}\sqrt{\sin^2\theta_1 - \dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}} = -e^{\mathrm{j}2\varphi_{\mathrm{TM}}} \tag{5.3.4}$$

$$\varphi_{\mathrm{TE}} = \arctan\left[\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}}{\cos\theta_1}\right] \tag{5.3.5}$$

$$\varphi_{\mathrm{TM}} = \arctan\left[\frac{\sqrt{\sin^2\theta_1 - \dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}}}{\dfrac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\cos\theta_1}\right] \tag{5.3.6}$$

所以无论是 TE 还是 TM 波，只要入射角大于临界角，反射系数的模总是 1，表示介质交界面发生全反射。

从上面分析可知，介质 – 介质交界面对波的反射与介质 – 导体交界面对波的反射是不一样的。对于介质 – 导体交界面，不管入射波是 TE 还是 TM，不管入射角是大是小，都是全反射，对于切向电场入射波与反射波还有 180°相移。对于介质 – 介质交界面，反射系数不仅与入射波型(TE 或 TM)有关还与入射角大小有关。只有从密媒质到疏媒质(即从 ε 大的介质到 ε 小的介质)且入射角 θ 大于临界角 θ_c 时才发生全反射。$\theta > \theta_c$ 时入射波与反射波相移不是 π，而由式(5.3.5)、(5.3.6)表示。

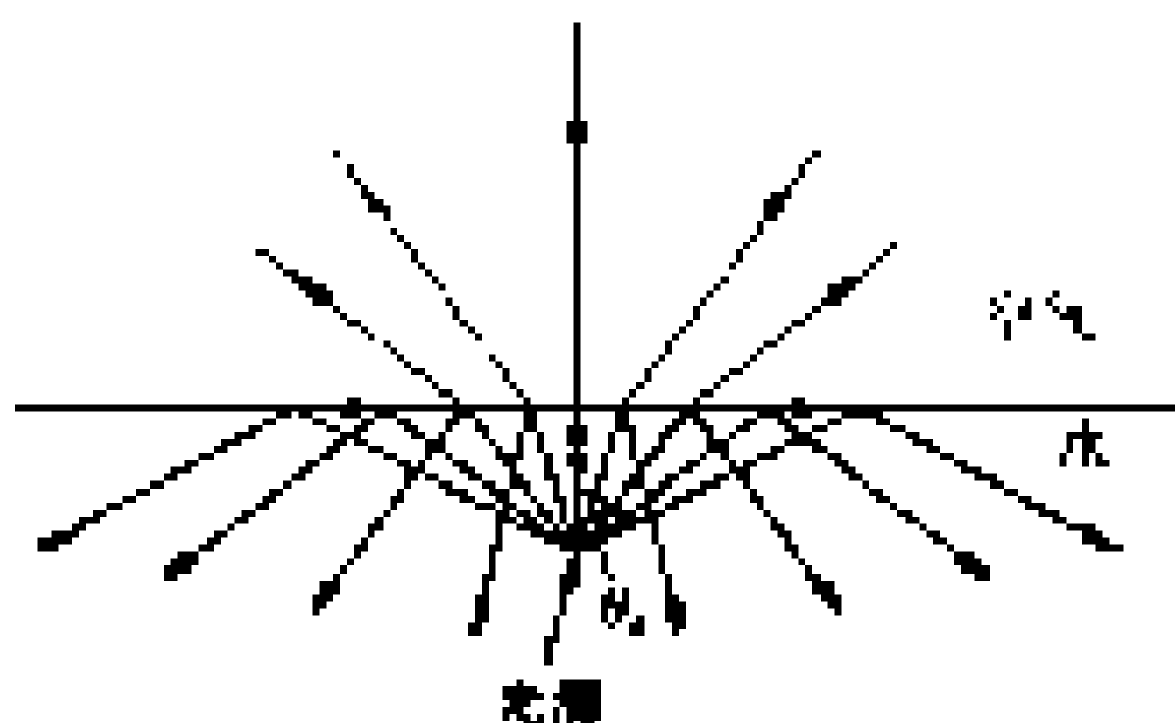


图 5 – 11　光从水到空气的折射

例 5 – 5　如图 5 – 11 所示：置于

水下的各向同性光源，只是在立体角 θ_c 内的光才能折射到空气中，水的相对介电系数在光频下为 $1.7\varepsilon_0$。计算临界角 θ_c。

解：用式(5.3.2)可得：

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1.77}}\right) = 49°$$

5.3.2　布儒斯特(Brewster)角

假定图5-12所示的介质1、2无损耗，即 ε_1、ε_2 均为实数。下面将证明当入射波为TM波或平行极化波时，存在一个特定入射角 θ_b，当 $\theta=\theta_b$ 时，反射系数 $\Gamma_{TM}=0$，入射波无反射地全部折射到介质2。从式(5.2.58)可见，要使 $\Gamma_{TM}=0$，就要求

$$\varepsilon_{r1} k_{z2} = \varepsilon_{r2} k_{z1}$$

将 $k_{z1} = k_1\cos\theta_b$，$k_{z2} = k_2\cos\theta_2$ 代入得到

$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\cos\theta_b = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\cos\theta_2$$

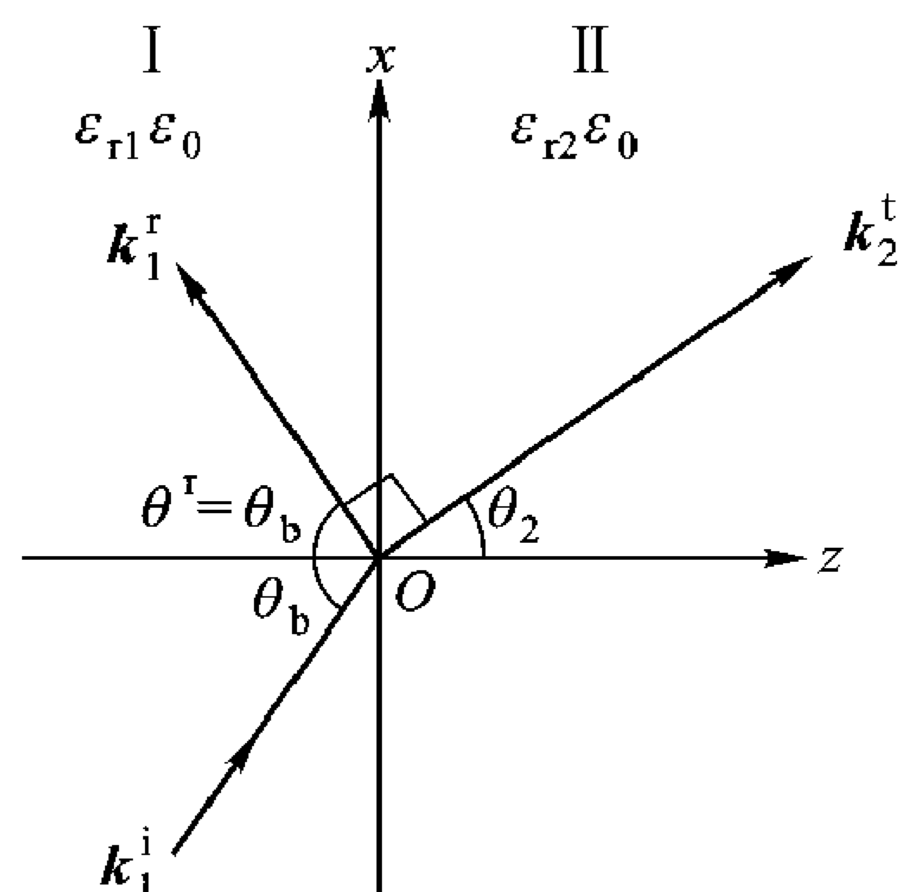


图5-12　入射角等于布儒斯特角时平行极化平面波的反射和折射

当然也要满足斯奈尔定律，即相位匹配条件 $k_1\sin\theta_b = k_2\sin\theta_2$，即

$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_0}\sin\theta_b = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_{r2}\varepsilon_0}\sin\theta_2$$

解上述两个方程，得到

$$\theta_2 + \theta_b = \pi/2$$

以及

$$\theta_b = \arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}} \tag{5.3.7}$$

式中使 $\Gamma=0$ 的这一特定入射角 θ_b，叫做布儒斯特角。

注意，对TE入射波(或垂直极化入射波)，任何入射角 θ 都不能使 $\Gamma_{TE}=0$。如果要使 $\Gamma_{TE}=0$，只有当 $\varepsilon_{r1}=\varepsilon_{r2}$时才可能。$\varepsilon_{r1}=\varepsilon_{r2}$就是均匀介质情况，当然没有反射，此结论请读者自行分析。

如果非极化光以布儒斯特角 θ_b 投射到介质交界面，那么非极化光中TM模成分全部折射到介质2，而TE模成分部分折射到介质2，部分反射回介质1。所以反射光中只有TE极化波，如图5-13。因此利用布儒斯特现象可从

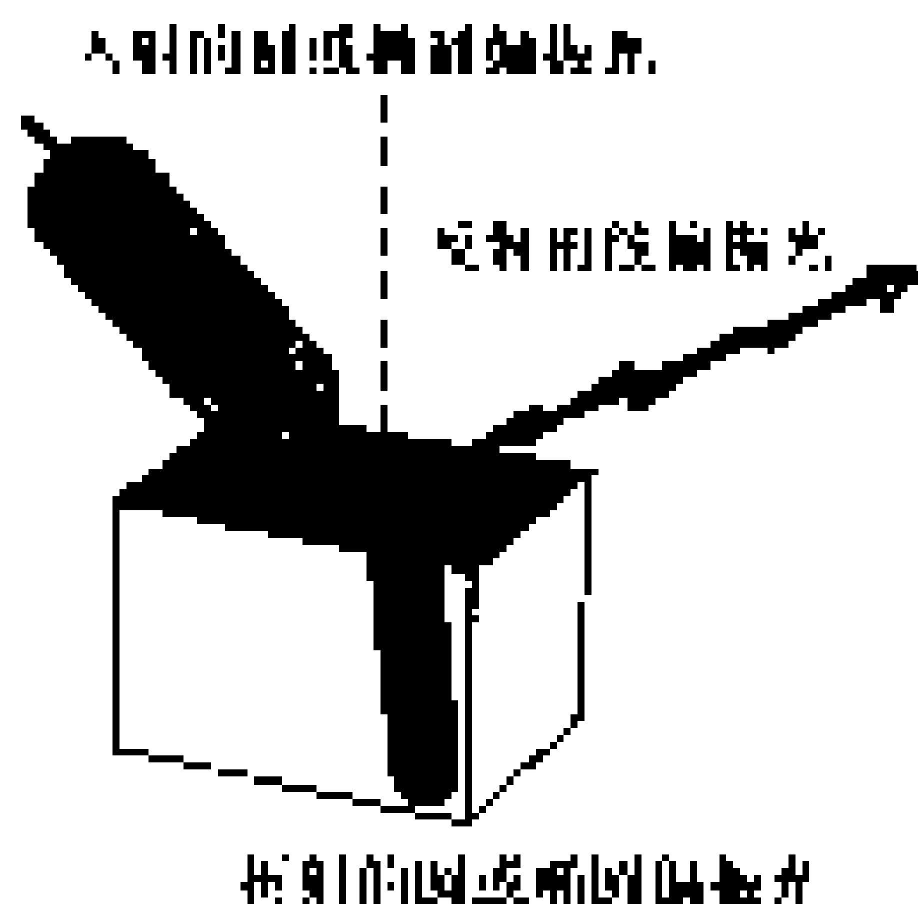


图5-13　利用布儒斯特现象从非极化光得到极化光输出

非极化光输入得到 TE 极化光输出。

非极化光从介质表面的反射

非极化光从空气投射到介质界面，假定介质界面是水平的，相对介电常数为 2.25，我们想要知道其反射波的组成。可以设想入射波可分解为等量的两个极化波，一个平行极化，一个垂直极化。Γ_{TE}为垂直极化入射波的反射系数，Γ_{TM}为平行极化入射波的反射系数，$|\Gamma_{TE}|^2$、$|\Gamma_{TM}|^2$ 与相应极化波的反射功率成正比，Γ_{TE}、Γ_{TM}用式(5.2.22)、(5.2.58)计算，计算结果示于图 5－14，由图可见$|\Gamma_{TE}|^2$ 比$|\Gamma_{TM}|^2$ 来得大。所以反射光中垂直极化波(电场方向与入射面垂直)比其他方向极化的波占有更大的份额。

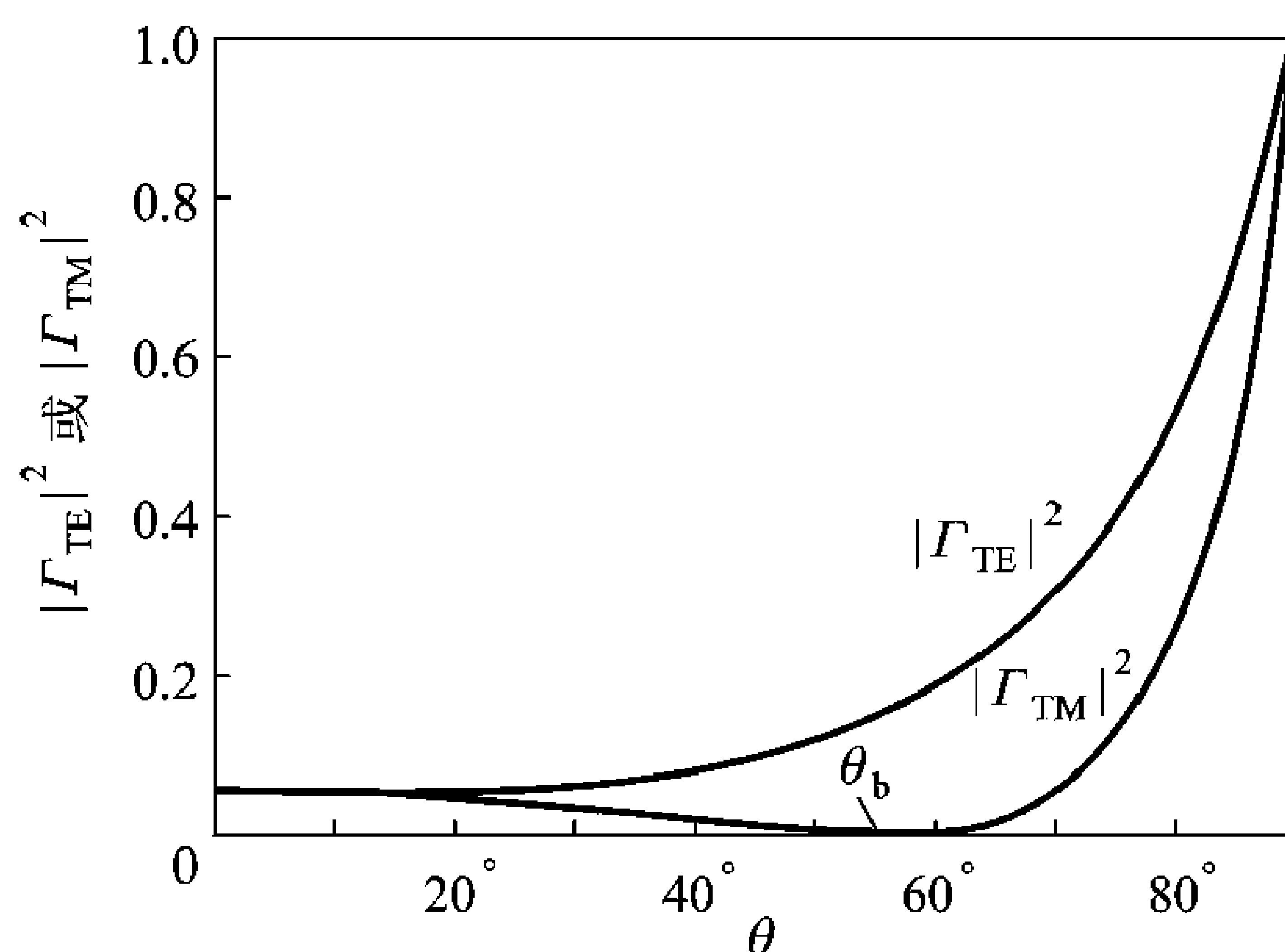


图 5－14 反射功率与入射角关系

($\varepsilon=2.25\varepsilon_0$，布儒斯特角 $\theta_b=56°$)

5.4 吸收介质边界上的反射和折射

前面讨论介质交界面对平面波的反射和折射时，没有特别强调介质损耗的影响。本节研究当介质Ⅱ有耗时，即

$$\varepsilon_{r2}=\varepsilon'_{r2}-j\varepsilon''_{r2} \tag{5.4.1}$$

为复数时，介质交界面对平面波的反射和折射。

因为介质Ⅱ的相对介电系数是复数，故介质Ⅱ中的波数 k_2 也是复数

$$k_2=k_0\sqrt{\varepsilon_{r2}}=k_{r2}-jk_{i2} \tag{5.4.2}$$

ε_{r2}为有耗介质 2 的复相对介电系数，根据前面讨论的理由，边界面两边的波矢在边界面上的投影相等，即

$$\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_2 \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_{r2} \cdot \boldsymbol{r} - \mathrm{j}\boldsymbol{k}_{i2} \cdot \boldsymbol{r} \tag{5.4.3}$$

上式的实部和虚部分别相等，得到

$$\boldsymbol{k}_1 \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{k}_{r2} \cdot \boldsymbol{r} \tag{5.4.4}$$

$$\boldsymbol{k}_{i2} \cdot \boldsymbol{r} = 0 \tag{5.4.5}$$

一般说来 $\boldsymbol{k}_{r2}$和 $\boldsymbol{k}_{i2}$的方向不同，这种情况下的波称为非均匀平面波。特别是 $\boldsymbol{k}_{i2} \cdot \boldsymbol{r} = 0$，其意思是指确定等幅面的方向 $\boldsymbol{k}_{i2}$，往往同边界面正交。另一方面 $\boldsymbol{k}_{r2}$等相位面的方向是任意的。等相位面和等幅面的图解见图 5 - 15。

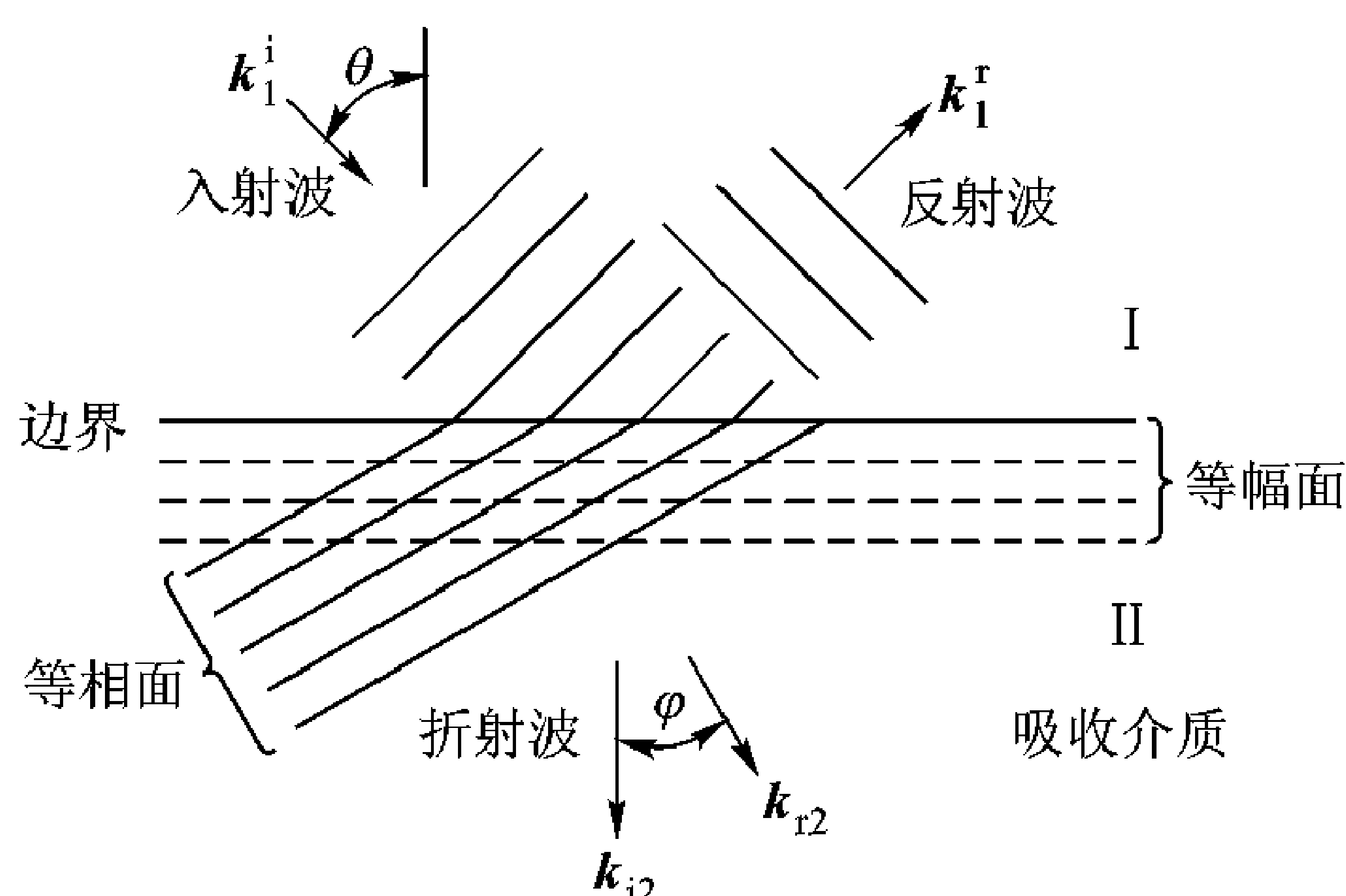


图 5 - 15　波在边界上斜入射时在吸收介质中波矢量的实部和虚部($\boldsymbol{k}_{r2}$和 $\boldsymbol{k}_{i2}$)的图示

图 5 - 15 表明，波沿着矢量 $\boldsymbol{k}_{r2}$的方向运动，但是波的振幅却随着离开边界面的距离增加而呈指数衰减。

如果 θ 是入射角，φ 是折射角，那么式(5.4.4)等价于

$$k_1 \sin\theta = k_{r2} \sin\varphi \tag{5.4.6}$$

当 ε_{r2}是实数时，介质Ⅱ的 z 方向波数

$$k_{z2} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1} \sin^2\theta}$$

要么是纯实数，要么是纯虚数。

当 ε_{r2}是复数时，k_{z2}也是复数

$$k_{z2} = \beta_{z2} - \mathrm{j}\alpha_{z2} \tag{5.4.7}$$

引入复数折射角 $\tilde{\varphi}$ 使得

$$k_1 \sin\theta = k_2 \sin\tilde{\varphi} \tag{5.4.8}$$

即

$$\sin\tilde{\varphi} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}} \sin\theta \tag{5.4.9}$$

对 $\tilde{\varphi}$ 虽然无法作简单的物理解释，但可以把它视为是由方程(5.4.9)定义的。

这样定义折射角 $\tilde{\varphi}$ 后，吸收介质边界面上的斯奈尔定律与无耗介质边界面的取相同的形式。

利用式(5.2.22)，对于 TE 模吸收介质边界面的反射系数 Γ' 为

$$\Gamma' = \frac{k'_{z1} - k'_{z2}}{k'_{z1} + k'_{z2}}$$

将 $k'_{z1} = k_1 \cos\theta$，$k_{z2} = k_0\sqrt{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}\sin^2\theta}$ 代入，并利用式(5.4.9)定义的 $\tilde{\varphi}$，得到

$$\Gamma' = \frac{\cos\theta - \tilde{n}\cos\tilde{\varphi}}{\cos\theta + \tilde{n}\cos\tilde{\varphi}} \tag{5.4.10}$$

式中

$$\tilde{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}},\quad \cos\tilde{\varphi} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{\tilde{n}^2}} \tag{5.4.11}$$

为相对复折射率。

同样，引入复数折射率及复数折射角后，吸收介质对 TM 模的反射系数 Γ'' 为

$$\Gamma'' = \frac{-\tilde{n}\cos\theta + \cos\tilde{\varphi}}{\tilde{n}\cos\theta + \cos\tilde{\varphi}} \tag{5.4.12}$$

根据式(5.4.10)、(5.4.12)计算所得出的反射系数模平方(相当于反射功率)的一般特征示于图 5 - 16。其中表明对于一种典型的金属 $|\Gamma|^2$ 与 θ 的关系。对于 TE 模，$|\Gamma'|^2$ 从正入射时的值随入射角的增加而单调增加，至掠入射时增至 1。另一方面对于 TM 模，$|\Gamma''|^2$ 曲线在某一角度 θ_1 时经历一个稍为变化的最小值，而 θ_1 的大小取决于介质 Ⅱ 的特性。这个角度称为主入射角，它与介质 Ⅱ 无耗时的布儒斯特角相对应。

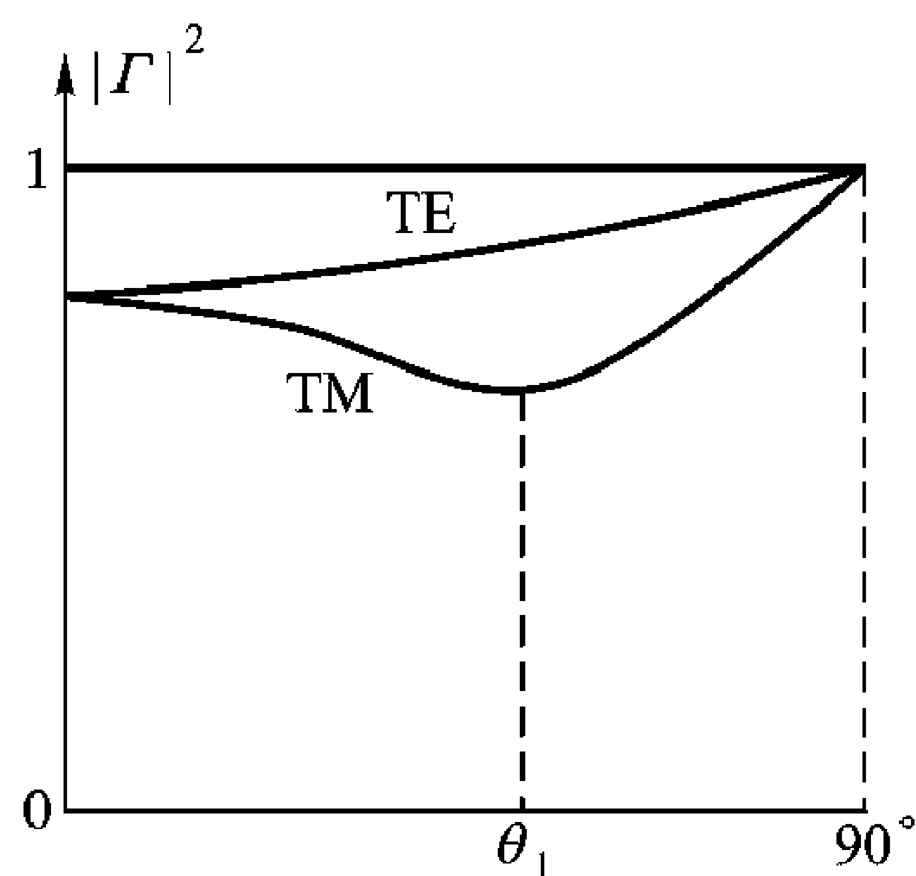


图 5 - 16　一种典型金属的反射系数模的平方 $|\Gamma|^2$ 与入射角的关系(在光频范围)

5.5　介质 - 导体交界面的反射

导体可看作介电系数虚部比实部大得多的特殊介质。根据式(4.4.2)，其相对复介电系数 ε_m 可表示为

$$\varepsilon_m = \varepsilon'_m - j\varepsilon''_m \tag{5.5.1}$$

如果 ε'_m 近似为 1，则虚部

$$\varepsilon''_m = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \tag{5.5.2}$$

式中 ω 为角频率，ε_0 是真空介电常数。在微波频率，ε_m 的虚部比实部大得多，即 $\varepsilon''_m >> \varepsilon'_m$。此时不论对于 TE 还是 TM 波，纵向传播常数 k_{zm}为

$$k_{zm} = \sqrt{k_0^2(\varepsilon'_m - j\varepsilon''_m) - k_x^2} \approx \sqrt{-jk_0^2\varepsilon''_m}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}(1-j) = \frac{1}{\delta}(1-j) \tag{5.5.3}$$

式中

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \tag{5.5.4}$$

δ 是趋肤深度，表示波经过 δ 距离后，减小到原来的 1/e，此时波阻抗

$$Z_{TE} = Z_{TM} = Z_m = R(1+j) \tag{5.5.5}$$

$$R = \frac{\omega\mu_0\delta}{2} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}} \tag{5.5.6}$$

对于完纯导体，$\delta\to0$，$R\to0$，反射系数 $\Gamma\to-1$，当区域Ⅰ用传输线等效时，区域Ⅱ的导体相当于短路。$\Gamma\to-1$ 也表明在导体表面电场切向分量的入射波与反射波有 π 相移。对于非完纯导体，如果 δ 足够大，只要区域Ⅱ纵方向 z 的线度比趋肤深度 δ 大得多，就可认为区域Ⅱ纵向趋于无穷。

例 5-6 设 $f=10$ GHz，求微波频率铜的波阻 Z_m。

解：铜的电导率 $\sigma=5.8\times10^7$ S/m，$f=10$ GHz 时，由式(5.5.5)、(5.5.6)

$$Z_m = R(1+j)$$

$$R = \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}} = 2.6\times10^{-2}\ \Omega$$

所以导体铜对于微波可视为短路。

5.5.1 平面波从完纯导体表面的反射

下面分两种情况研究平面波从空气投射到完纯导体表面的反射。一种是平面波垂直投射到完纯导体表面，另一种是倾斜投射到完纯导体表面。

图 5-17(a)所示的是平面波垂直投射到完纯导电面的情况，相当于 TEM 模投射到完纯导电面。电场只有 E_x 分量，磁场只有 H_y 分量。其中区域 1 为空气，区域 2 为完纯导体，$z=0$ 为两区域交界面，其等效传输线模型示于图 5-17(b)，完纯导体用 $z=0$ 处的短路线代替。空气侧传输线的传播常数 κ 与特征阻抗 Z 为

$$\kappa = k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

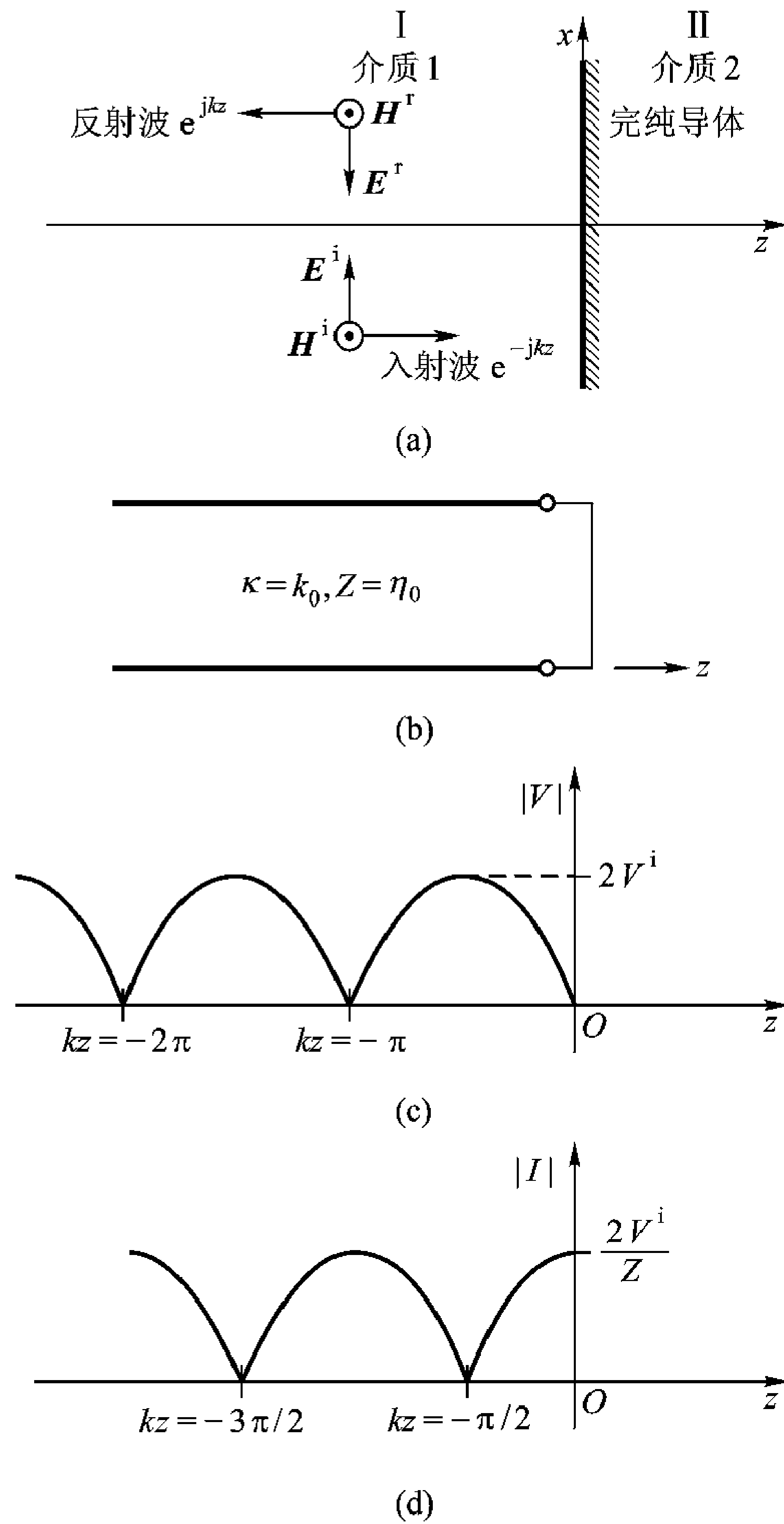


图 5－17　完纯导体表面的反射（垂直投射时）

(a) 垂直投射时波从完纯导体表面的反射　(b) 等效电路

(c) 电压 V（或电场）的驻波波形　(d) 电流 I（或磁场）的驻波波形

$$Z=\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

电场 E_x、磁场 H_y 可表示成模式函数 $\varphi(x)$ 与其幅值 $V(z)$、$I(z)$ 的乘积。对于垂直投射（或 TEM 模），场不仅在 y 方向，就是在 x 方向也没有变化，故模式函数 $\varphi(x)=1$，E_x、H_y 为

$$E_x=\varphi(x)V(z)=V(z)$$

$$H_y=\varphi(x)I(z)=I(z)$$

即传输线上电压 $V(z)$ 表示电场 E_x 沿 z 轴分布，$I(z)$ 表示磁场 H_y 沿 z 轴分

布，短路传输线上电压、电流分布第2章已分析过。在短路面 $z=0$ 处，电压反射系数 $\Gamma=-1$，传输线上电压、电流具体分布为

$$V(z)=V^{\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz})=-2\mathrm{j}V^{\mathrm{i}}\sin kz$$

$$I(z)=\frac{V^{\mathrm{i}}}{\eta_0}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz})=\frac{2}{\eta_0}V^{\mathrm{i}}\cos kz$$

式中 V^{i} 为入射电压波幅值。电压、电流的这种分布示于图5-17(c)、(d)。$z=0$ 交界面对于电压来说是波节，对于电流来说是波腹。两波节之间距离为 $\lambda/2$。

V、I 的瞬时值为

$$V(z,t)=\mathrm{Re}\left[V(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=2V^{\mathrm{i}}\sin kz\sin\omega t$$

$$I(z,t)=\mathrm{Re}\left[I(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right]=\frac{2V^{\mathrm{i}}}{\eta_0}\cos kz\cos\omega t$$

上式表示电压 V 和电流 I，也就是电场 E_x 和磁场 H_y，无论在时间上还是空间上相位都相差 $\pi/2$，这是驻波分布的特点，其实质是沿 $+z$ 方向入射波与沿 $-z$ 方向反射波相互干涉的结果。

平面波倾斜投射到完纯导体表面，TE、TM两种情况要分开处理。图5-18(a)表示TE波从空气倾斜投射到完纯导体表面。电场只有 E_y 分量，磁场有 H_x、H_z 两个分量，此系统与图5-7类似，只是介质2被完纯导体取代。其等效电路模型如图5-18(b)，完纯导体用 $z=0$ 处短路线表示，空气的介电常数用 ε_0 近似，则空气一侧等效传输线的传播常数 k_z 与特征阻抗 Z 为

$$k_z=k_1\cos\theta=k_0\cos\theta=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\cos\theta$$

$$Z=\frac{\omega\mu_0}{k_z}=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\Big/\cos\theta=\eta_0/\cos\theta$$

式中 θ 为入射波波矢 $\boldsymbol{k}_1$ 与交界面法线(即 z 轴)夹角。

模式函数 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}$，$k_x=k_1\sin\theta=k_0\sin\theta$，所以

$$E_y=-\varphi(x)V(z)=-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}V(z)$$

$$H_x=\varphi(x)I(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}I(z)$$

短路传输线上电压、电流的分布为纯驻波，$z=0$ 处电压反射系数 $\Gamma=-1$，电压 $V(z)$、电流 $I(z)$ 的具体分布为

$$V(z)=-2\mathrm{j}V^{\mathrm{i}}\sin k_z z$$

$$I(z)=\frac{2V^{\mathrm{i}}}{Z}\cos k_z z$$

并示于图5-18(c)、(d)，$z=0$ 交界面为电压的波节，电流的波腹。定义 $\lambda_z=\dfrac{2\pi}{k_z}=\dfrac{\lambda}{\cos\theta}$，则两波节之间距离为 $\dfrac{\lambda_z}{2}=\dfrac{\lambda}{2\cos\theta}$。由此得到

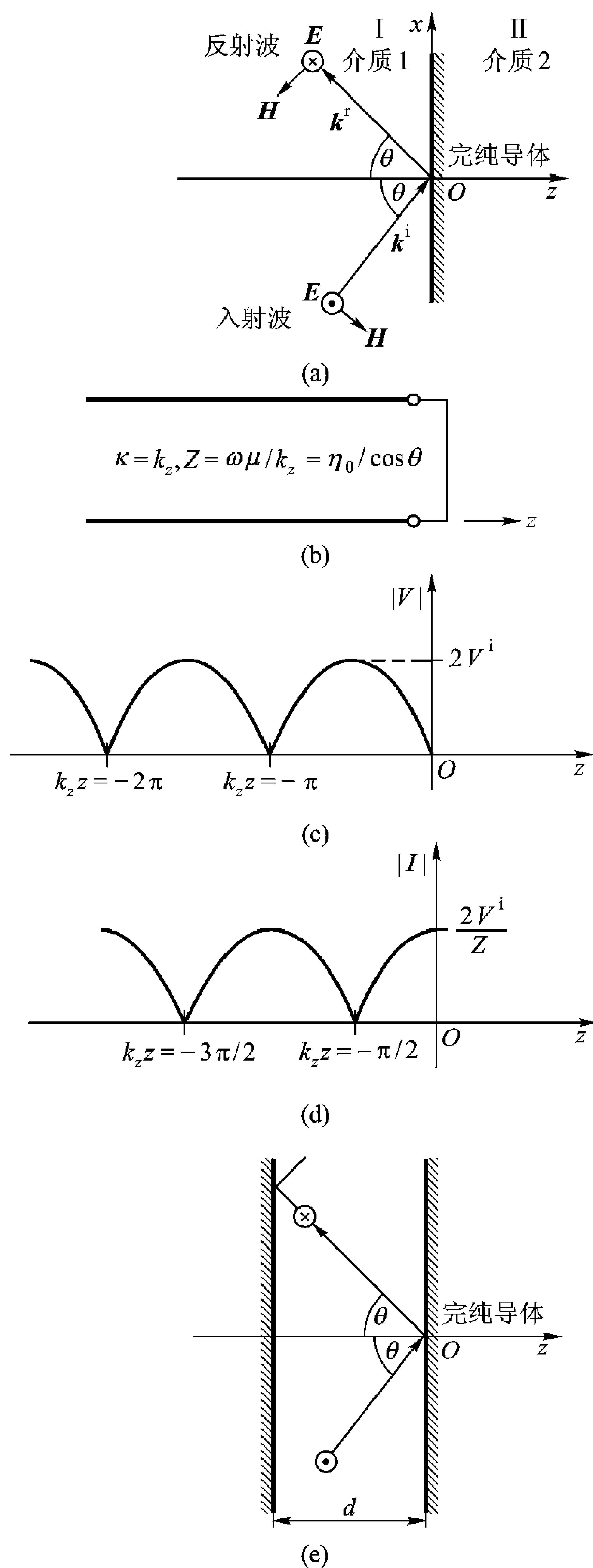


图 5－18　平面波倾斜投射到完纯导体表面

(a) 倾斜投射时波从完纯导体表面的反射　(b) 等效电路　(c) 电压 V（或电场）的驻波波形　(d) 电流 I（或磁场）的驻波波形　(e) 两平行导电板间距 $d = n\pi/k_z$ 时可导引电磁波，成为波导

$$E_y = 2\mathrm{j}V^{\mathrm{i}}\sin\ k_z z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}$$

$$H_x = \frac{2V^{\mathrm{i}}}{Z}\cos\ k_z z \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}$$

E_y、H_x 的瞬时值为

$$E_y\ (z,t) = \mathrm{Re}\left[(\mathrm{j}2V^{\mathrm{i}}\sin\ k_z z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = -2V^{\mathrm{i}}\sin\ k_z z\sin\ (\omega t - k_x x)$$

$$H_x\ (z,t) = \mathrm{Re}\left[\left(\frac{2V^{\mathrm{i}}}{Z}\cos\ k_z z\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right] = \frac{2V^{\mathrm{i}}}{Z}\cos\ k_z z\cos\ (\omega t - k_x x)$$

由上两式可见，平面波由空气一侧倾斜投射完纯导体表面时，入射波和反射波干涉的结果，在与界面垂直的 z 方向场分布为纯驻波，相邻两波节间距为 $\lambda_z/2$，在与界面平行的 x 方向为行波，波数 $k_x = k_0\sin\ \theta$。E_y 和 H_x 不仅在空间上也在时间上都有 $\pi/2$ 相移。

如果在离开完纯导电面 $d=\lambda_z/2$、λ_z 等电压驻波波节处放置一完纯导电板，则对两完纯导电板间场没有影响，这样我们就可看到两导电板间驻波分布的场沿 x 轴传播，这就是平行平板波导(图 5－18 (e)) 。波导中波传播的基本过程是：倾斜投射到完纯导电壁的平面波在两导电壁间多次全反射，而两导电板之间间距 $d=\lambda_z/2$、λ_z，保证来回反射一次的波相移为 2π 整倍数，从而保证两导电板之间多次反射的波相位一致而不相互抵消，以使波沿 x 轴无衰减传播。

5.5.2　电离层的反射

离开地面 80～120 km 的电离层可看作等离子体，根据式(3.5.8)，其介电常数

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left(1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}\right)$$

式中 ω_{p} 叫等离子体频率，对于围绕地球大气层的等离子体，ω_{p} 可近似为

$$\omega_{\mathrm{p}} = 2\pi\times 9\times 10^6\ \mathrm{Hz}$$

当入射电磁波 ω 接近或小于 ω_{p} 时，ε 有可能小于 1 甚至为负值。当 ε 为负值时，等离子体相当于一导体，对入射电磁波全反射。下面对此进行分析。

图 5－19 (a)是所讨论问题的分析模型，入射平面波波矢 $\boldsymbol{k}$ 以 45°角从空气一侧倾斜投射到空气与电离层交界面($z=0$)，定义空气一侧为区域Ⅰ，ε_1 近似为 ε_0。电离层为区域Ⅱ，其介电系数为 ε_2，设入射波角频率 $\omega = \omega_{\mathrm{p}}/\sqrt{5}$，按式(3.5.8)有 $\varepsilon_2 = -4\varepsilon_0$，故电离层用 $-4\varepsilon_0$ 的介质表示。图 5－19 (b)是图 5－19 (a)分析模型的等效电路。k_{z1}、Z_1 与 k_{z2}、Z_2 分别为区域Ⅰ与Ⅱ等效传输线的传播常数与特征阻抗。区域Ⅰ、Ⅱ的波数 k_1、k_2 为

$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = k_0$$

$$k_2 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_2} = \omega\sqrt{\mu_0\ (-4\varepsilon_0)} = -\mathrm{j}2k_0$$

故

$$k_x = k_1 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} k_0$$

$$k_{z1} = k_1 \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} k_0$$

$$k_{z2} = \sqrt{k_2^2 - k_x^2} = \sqrt{-4k_0^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} k_0\right)^2} = -\mathrm{j}2.12 k_0$$

k_{z2}开方取负号以保证 $+z$ 方向传播的波是衰减波。由 k_{z1}、k_{z2}得到特征阻抗 Z_1、Z_2 为

$$Z_1 = \begin{cases} \omega\mu_0 / k_{z1} = \sqrt{2}\,\eta_0 & \text{(TE 模)} \\ k_{z1} / \omega\varepsilon_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\eta_0 & \text{(TM 模)} \end{cases}$$

$$Z_2 = \begin{cases} \omega\mu / k_{z2} = \dfrac{\mathrm{j}}{2.12}\eta_0 & \text{(TE 模)} \\ k_{z2} / \omega\varepsilon_2 = \dfrac{\mathrm{j}2.12}{4}\eta_0 & \text{(TM 模)} \end{cases}$$

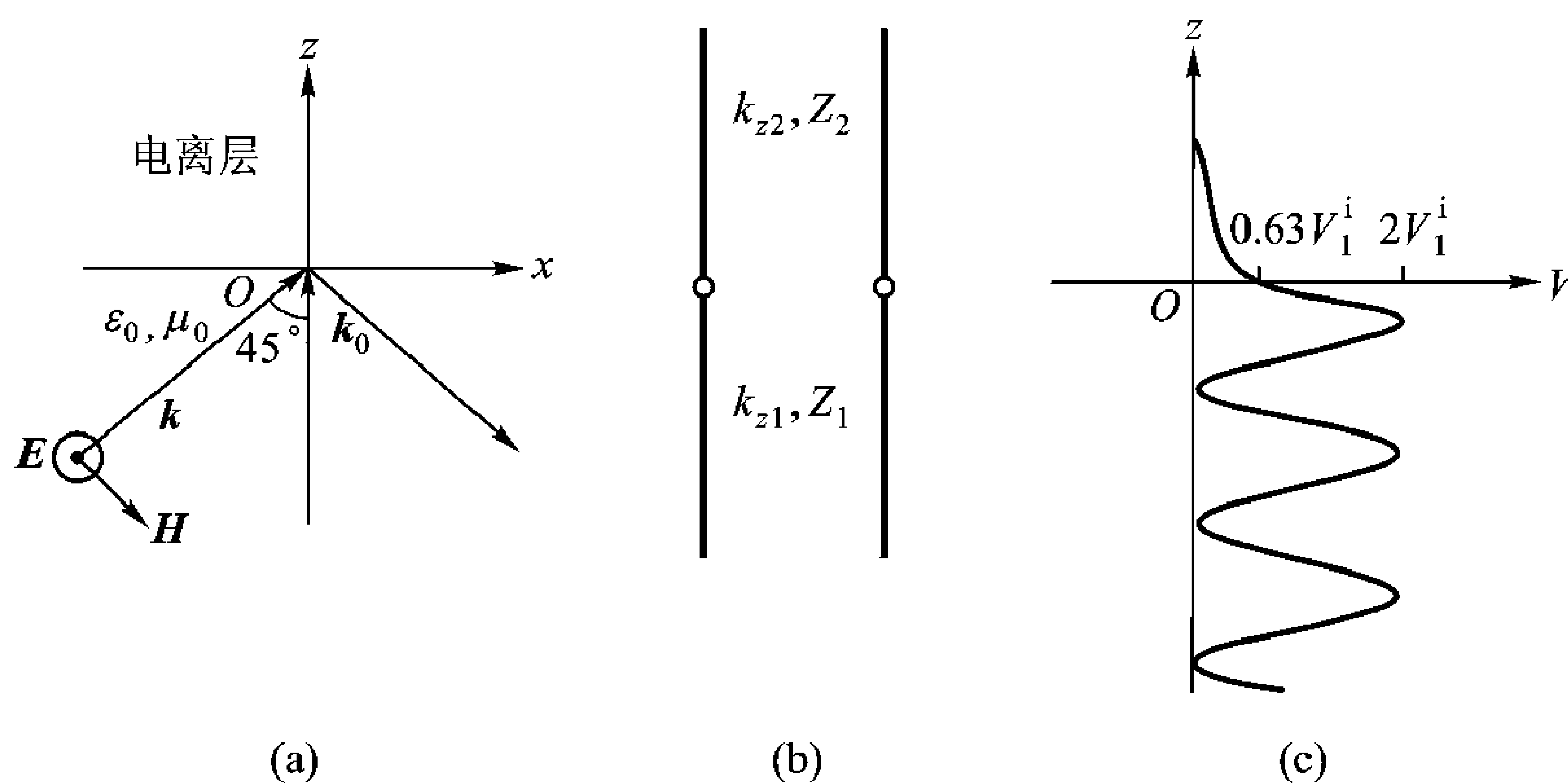


图 5－19 电离层对平面波的反射

(a) 空气—电离层交界面 (b) 等效电路 (c)交界面附近反射电场强度分布

将 TE、TM 模的 Z_1、Z_2 代入反射系数表达式 $\Gamma = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$，得到

$$\Gamma_{\mathrm{TE}} = 1.0\mathrm{e}^{\mathrm{j}143^\circ}$$

$$\Gamma_{\mathrm{TM}} = -1.0\mathrm{e}^{\mathrm{j}286^\circ} = 1.0\mathrm{e}^{\mathrm{j}106^\circ}$$

注意，不论入射平面波是 TE 模还是 TM 模，反射系数的模 $|\Gamma|$ 都为 1，但反射系数的相角 ψ 是不同的，TE 模的 $\psi_{\mathrm{TE}}(0) = 143^\circ$，TM 模的 $\psi_{\mathrm{TM}}(0) = 106^\circ$。

关于场分布，根据所选坐标系，$k_y = 0$，场在 y 方向没有变化，x 方向场

分布由模式函数 $\varphi(x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\sqrt{2}}{2}k_0 x}$表示。在 z 方向，传输线上电压 V 与电场 E_y 分布相当，对于 TM 模，传输线上的电流与 H_y 相当。

因为 $z=0$ 处反射系数的模 $|\Gamma|=1$，区域 I 对应的传输线上电压、电流分布为纯驻波。$V_{1\max}=2V_1^{\mathrm{i}}$，$V_{1\min}=0$，$V_1^{\mathrm{i}}$ 为入射电压波幅值。因为 $\psi_{\mathrm{TE}}(0)=143°$，所以对于 TE 模第一个电压波节 $d_{\min 1}$离开交界面 $z=0$ 的距离为

$$d_{\min 1}=\frac{\lambda}{4}+\frac{143°}{720°}\lambda=0.448\ 6\lambda$$

交界面 $z=0$ 处电压模为

$$|V(z=0)|=|V_1^{\mathrm{i}}(1+\Gamma_{\mathrm{TE}}(0))|=0.63V_1^{\mathrm{i}}$$

由此可得出入射平面波为 TE 时,空气一侧传输线上电压或电场 E_y 的分布,而在电离层中,因 k_{z2}是虚数,z 方向没有波的传播,场按 $\mathrm{e}^{-2.12k_0 z}$衰减。对于 TE 模,传输线上电压 V 或电场 E_y 沿 z 轴的分布示于图 5－19 (c)。

实际导电面在微波中继站中的应用

完纯导体是一种理想导体，除了超导体接近完纯导体外，实际导体材料都不是完纯导体。但是对于 Cu、Al 等良导体，电导率 σ 很大，对微波以下频率电磁波的反射与完纯导体相差不大，可以作为电磁波的优良反射体。良导体作微波反射面用于微波接力中继站(见原理图 5－20)可使笨重的天线不用安装到天线塔的顶上。由于电磁波经反射体导引可使接收或发送天线安装到地面上，所以大大降低了天线塔的造价。

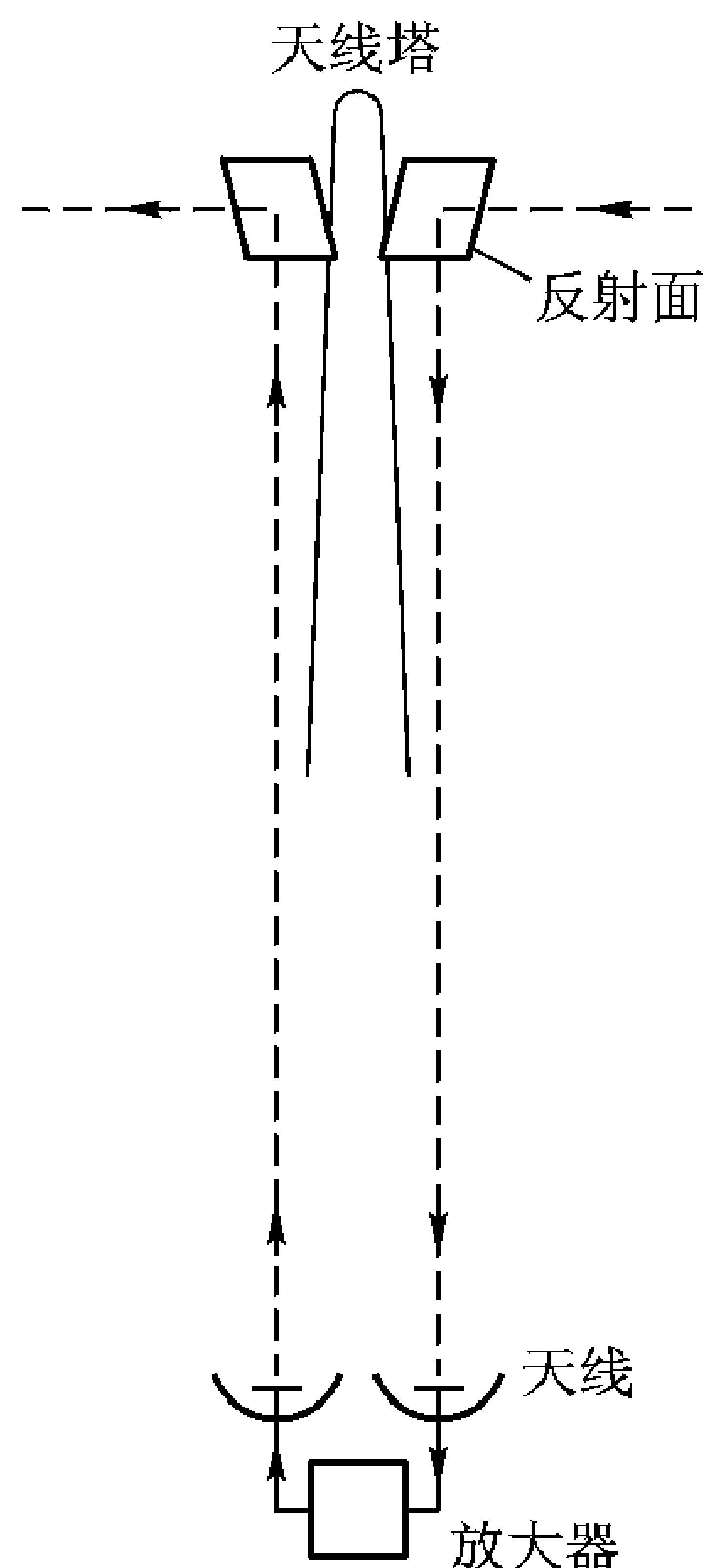


图 5－20 微波中继站原理图

5.6 多层平板介质中波的传播

多层平板介质系统一般用于光波段。光波段对多层平板介质系统的分析有射线法与波动法两种，本书采用波动分析法。5.6.1 节以单层介质系统为例，说明波动分析与射线分析关系，波动分析包含射线分析。

5.6.1 单层介质系统的波动分析与射线分析

厚度为 l 的薄层平板介质夹在两均匀介质之间，就构成了本节讨论的单层平板介质系统[图 5－21 (a)]。设平面波从薄层介质左边(区域Ⅰ)以入射角 θ 投射到薄层介质(区域Ⅱ)，显然部分能量反射回区域Ⅰ，部分能量则透过薄层介质右边

(区域Ⅲ)继续传播。射线法描述薄层介质对平面波反射、透射的过程是：幅值为 E_0 的平面波首次倾斜投射到 $z=0$ 的介质交界面，一部分由 $z=0$ 界面反射回区域Ⅰ，另一部分透过 $z=0$ 界面在薄层介质中传播，当到达 $z=l$ 界面时，一部分透过 $z=l$ 界面在区域Ⅲ继续传播，另一部分又反射回薄层介质Ⅱ，当到达 $z=0$ 界面，一部分透过 $z=0$ 界面，还有一部分又反射回薄层介质Ⅱ，如此不断重复下去。总的反射波就是第一次从 $z=0$ 界面反射回来的波以及所有从薄层介质透过 $z=0$ 的界面在区域Ⅰ继续传播这些波的和，总的透射波则是所有从薄层介质透过 $z=l$ 界面在区域Ⅲ继续传播的波，该过程也示于图 5-21 (a)。

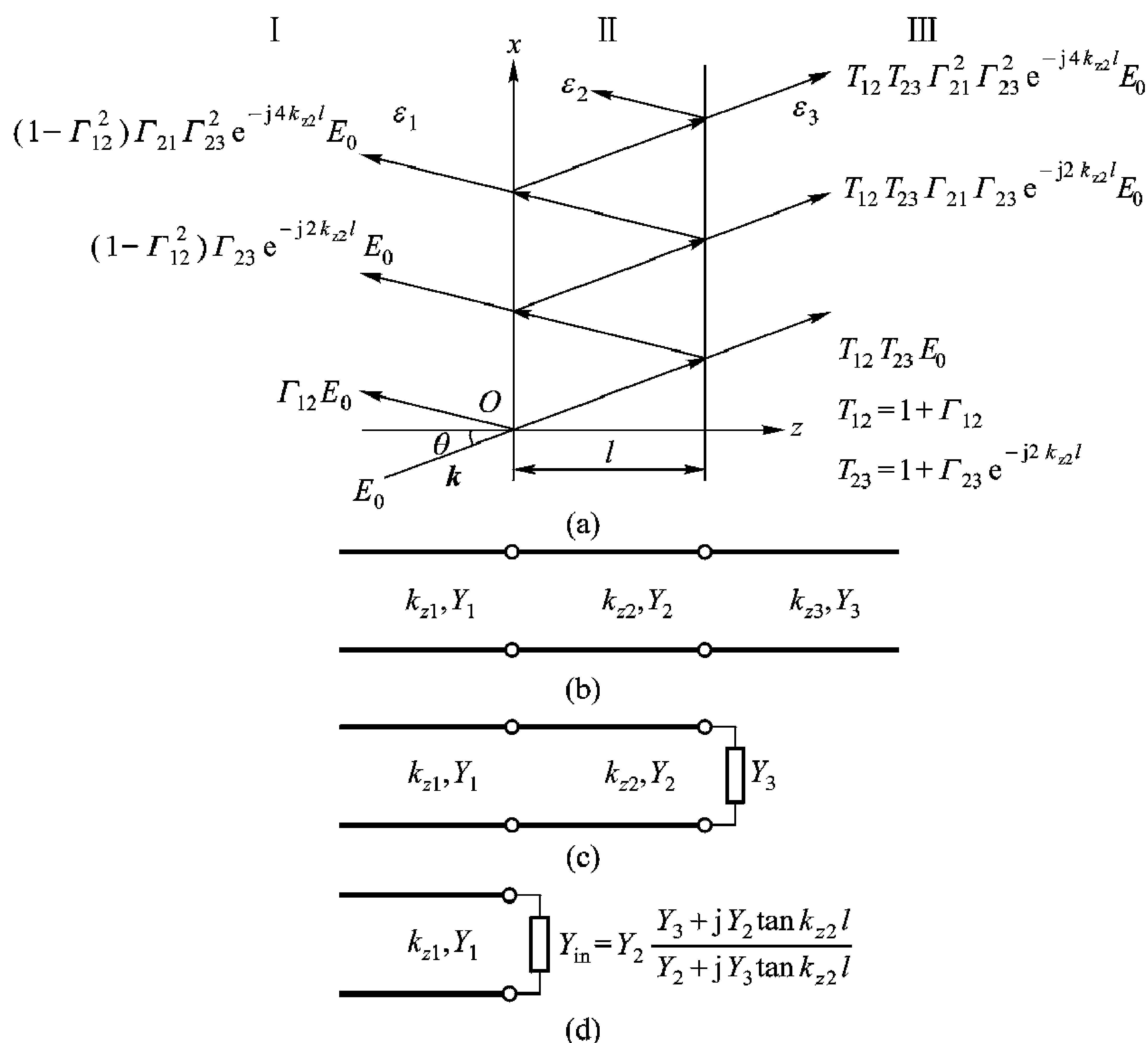


图 5-21 单层平板介质系统对平面波反射、透射的射线分析与波动分析

(a)单层平板介质系统 (b)、(c)、(d)等效电路

对单层介质系统进行波动分析的方法不止一种。本书首先将单层平板介质系统等效为级连的传输线，用传输线理论求解单层平板介质系统对平面波的反射与透射。下面将证明射线分析的结果包含在波动分析之中。

选择与界面垂直的 z 轴为纵向，x 轴与界面平行，波矢 $\boldsymbol{k}$ 在 $x-z$ 平面内。如同分析平面界面时所做的那样，图 5-21 (a)所示的单层平板介质系统可用图 5-21 (b)所示的电路等效。其中 k_{z1}，Y_1、k_{z2}，Y_2、k_{z3}，Y_3 分别为区域Ⅰ、

Ⅱ、Ⅲ对应的等效传输线的传播常数和特征波导纳，则

$$k_{zi}=\sqrt{k_0^2\varepsilon_{ri}-k_x^2}$$

$$k_0^2=\omega^2\mu\varepsilon_0$$

$$k_x=k_1\sin\theta$$

$$Y_i=\begin{cases}\dfrac{\omega\varepsilon_{ri}\varepsilon_0}{k_{zi}} & （\text{TM 模}）\\[2ex] \dfrac{k_{zi}}{\omega\mu} & （\text{TE 模}）\end{cases}$$

以上表示式中 $i=1, 2, 3$ 分别表示区域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ中的量。

由于介质Ⅲ在 z 方向趋于无穷，区域Ⅲ不存在反射波，故介质Ⅲ可用端接于 $z=l$ 的负载导纳 Y_3 表示[见图 5-21（c）]。

根据传输线的阻抗变换关系，$z=0$ 处的输入导纳

$$Y_{in}=Y_2\frac{Y_3+\mathrm{j}Y_2\tan k_{z2}l}{Y_2+\mathrm{j}Y_3\tan k_{z2}l} \tag{5.6.1}$$

因此图 5-21（c）又可进一步简化为图 5-21（d）。故从区域Ⅰ看进去 $z=0$ 处的反射系数、透射系数为

$$\Gamma（z=0^-）=\frac{Y_1-Y_{in}}{Y_1+Y_{in}} \tag{5.6.2}$$

$$T（z=0^-）=\frac{2Y_1}{Y_1+Y_{in}} \tag{5.6.3}$$

如引入区域Ⅰ与Ⅱ、Ⅱ与Ⅲ界面的反射系数

$$\Gamma_{12}=-\Gamma_{21}=\frac{Y_1-Y_2}{Y_1+Y_2} \tag{5.6.4}$$

$$\Gamma_{23}=-\Gamma_{32}=\frac{Y_2-Y_3}{Y_2+Y_3} \tag{5.6.5}$$

则输入导纳 Y_{in} 可写为

$$Y_{in}=Y_2\frac{1-\Gamma_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k_{z2}l}}{1+\Gamma_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k_{z2}l}} \tag{5.6.6}$$

将上式代入式(5.6.2)、(5.6.3)，有

$$\Gamma=\frac{\Gamma_{12}+\Gamma_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k_{z2}l}}{1-\Gamma_{12}\Gamma_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k_{z2}l}} \tag{5.6.7}$$

$$T=\frac{T_{12}T_{23}}{1-\Gamma_{21}\Gamma_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k_{z2}l}} \tag{5.6.8}$$

式中

$$T_{12}=\frac{2Y_1}{Y_1+Y_2}=1+\Gamma_{12}$$

$$T_{23}=1+\Gamma_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k_{z2}l}$$

T_{12}、T_{23}是区域Ⅰ与Ⅱ、Ⅱ与Ⅲ界面上的透射系数。

将式(5.6.7)、(5.6.8)的分母用级数展开，则 Γ、T 可表示为

$$\Gamma=\Gamma_{12}+(1-\Gamma_{12}^2)\Gamma_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k_{z2}l}+(1-\Gamma_{12}^2)\Gamma_{21}\Gamma_{23}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4k_{z2}l}+\cdots \tag{5.6.9}$$

$$T=T_{12}T_{23}(1+\Gamma_{21}\Gamma_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k_{z2}l}+\Gamma_{21}^2\Gamma_{23}^2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4k_{z2}l}+\cdots) \tag{5.6.10}$$

式(5.6.9)、(5.6.10)右边的每一项都有确定的物理意义。式(5.6.9)右边的第一项表示入射波第一次投射到 $z=0$ 交界面(区域Ⅰ与Ⅱ的交界面)反射回区域Ⅰ的反射波，第二项表示第一次通过 $z=0$ 交界面的波到达 $z=l$ 界面(区域Ⅱ与Ⅲ的交界面)被反射回来再通过 $z=0$ 交界面而到达区域Ⅰ的波，余类推。

同样式(5.6.10)的第一项表示第一次通过薄层介质的波，第二项表示在薄层介质内来回反射一次后再透射到达区域Ⅲ的波，余类推。

5.6.2 多层平板介质系统中波的传播

下面进一步讨论用传输线模型解多层平板介质系统[图 5-22 (a)] 中波的传播问题。多层平板介质系统的相对介电系数沿 z 轴的分布表示为

$$\varepsilon_r(z)=\begin{cases}\varepsilon_{r\mathrm{I}} & (z<0)\\ \varepsilon_{r1} & (0<z<z_1)\\ \varepsilon_{r2} & (z_1<z<z_2)\\ \cdots\cdots & \\ \varepsilon_{rn} & (z_{n-1}<z<z_n)\\ \varepsilon_{r\mathrm{III}} & (z>z_n)\end{cases} \tag{5.6.11}$$

式中下标Ⅰ、Ⅲ、1、2、…、n 分别表示属于区域Ⅰ、Ⅲ以及区域Ⅱ中第 1、2、…、n 层介质中的量。

式(5.6.11)表示在 $z<0$ 的区域Ⅰ与 $z>0$ 的区域Ⅲ，介质是均匀分布的，其相对介电系数分别为 $\varepsilon_{r\mathrm{I}}$、$\varepsilon_{r\mathrm{III}}$；在 $0<z<z_n$ 的区域Ⅱ，有 n 层平板介质，在每一层内介质是均匀的，介电系数为常数，但在相邻两平板介质的交界面，介电系数发生跳变。

设以波矢 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{I}}$ 为特征的入射平面波(TE 或 TM)，从区域Ⅰ以 θ 角倾斜投射到图 5-22 (a)所示的多层介质系统，根据介质交界面对波反射、折射的分析，入射平面波的一部分反射回区域Ⅰ，以波矢 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{r}}_{\mathrm{I}}$ 表示，还有一部分透过 n 层介质在区域Ⅲ继续传播，以波矢 $\boldsymbol{k}^{\mathrm{t}}_{\mathrm{III}}$ 表示。现在要确定区域Ⅰ的反射波与区域Ⅲ的透射波的大小及其传播方向，以及在 n 层介质内的场分布或波的传播。坐标系的选择与前面单层平板介质系统相同，使得波矢 $\boldsymbol{k}$ 只有两个分量，$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$，$y$ 方向场没有变化，$k_y=0$。在这个特定坐标系中，TE、TM 模的

场各只有三个分量，对于 TE 模，电场只有 E_y 分量，$\boldsymbol{E}=E_y\boldsymbol{y}_0$，磁场有两个分量 $\boldsymbol{H}=H_x\boldsymbol{x}_0+H_z\boldsymbol{z}_0$。对于 TM 模，磁场只有 H_y 分量，$\boldsymbol{H}=H_y\boldsymbol{y}_0$，电场有两个分量，$\boldsymbol{E}=E_x\boldsymbol{x}_0+E_z\boldsymbol{z}_0$。取 z 为纵向，因为纵向场量可用横向场量表示，所以多层介质系统中场分布或波的传播归结为确定 E_y、H_x（对于 TE 模）或 E_x、H_y（对于 TM 模）在区域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ的场分布或波的传播。

多层介质系统中场分布（或波的传播）的求解也有两个途径，一是写出区域Ⅰ、Ⅲ以及区域Ⅱ每一层介质中的场量，然后在 $(n+1)$ 个界面上列出 E_y、H_x（对于 TE 模）或 E_x、H_y（对于 TM 模）连续的 $2(n+1)$ 个方程。联立求解 $2(n+1)$ 个表示边界条件的方程，即可得到多层介质系统中场问题的解。第二个途径，将区域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ沿 z 方向波的传播用级连的传输线等效[见图 5－22 (b)]，用成熟的传输线理论求解多层介质系统中的场分布或波的传播。下面以 TE 模为例进行分析。

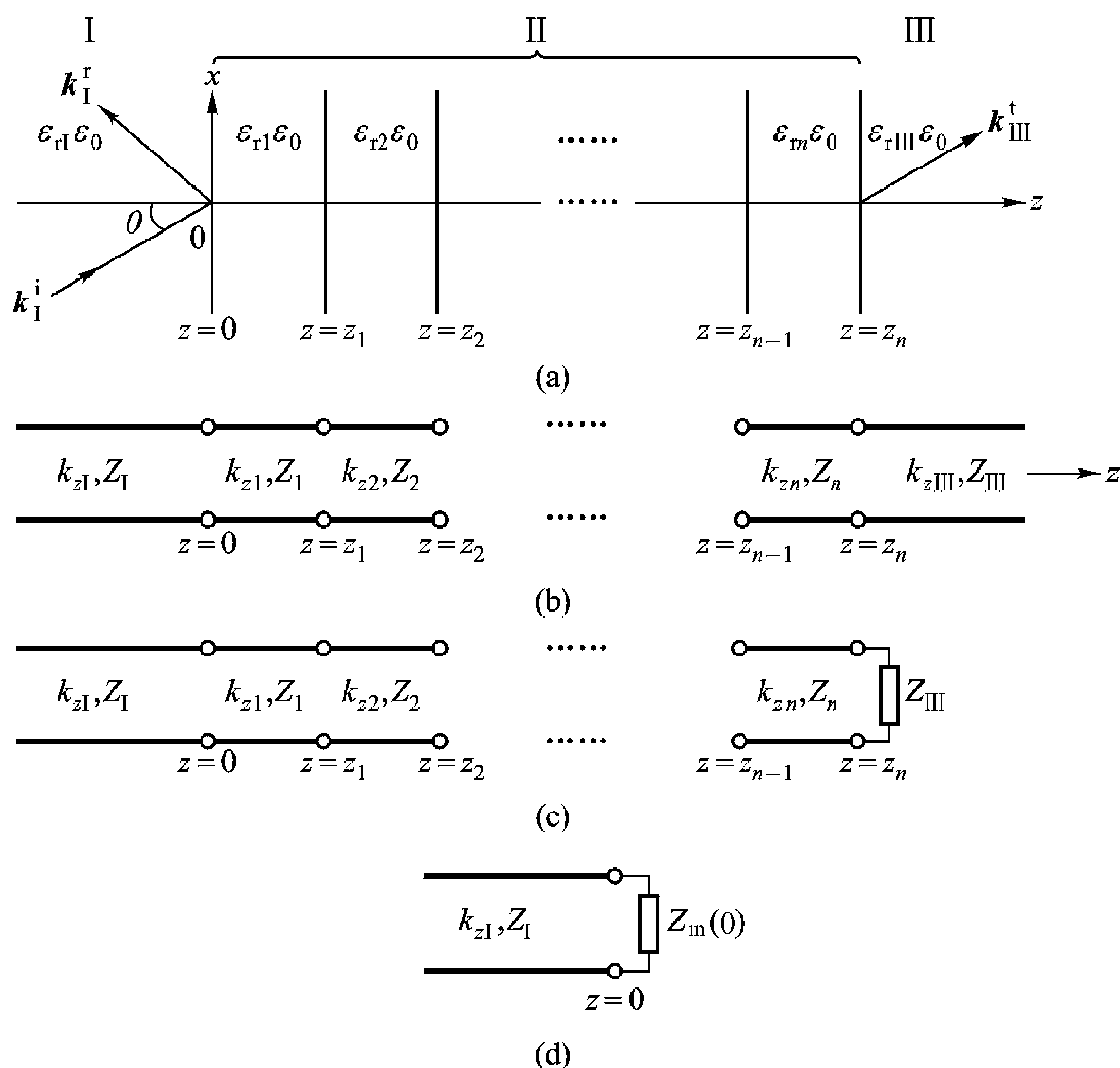


图 5－22　多层平板介质系统及其等效电路

(a) 多层平板介质系统　(b)、(c)、(d)等效电路

根据波传播的传输线模型，对于 TE 模第 j 级传输线上电压 $V_j(z)$、电流 $I_j(z)$ 与第 j 层介质中场量 E_{jy}、H_{jx} 关系为

$$E_{jy}=-\varphi_j(x)V_j(z) \tag{5.6.12}$$

$$H_{jx} = \varphi_j(x) I_j(z) \tag{5.6.13}$$

$\varphi_j(x)$叫模式函数，满足方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + k_x^2\right)\varphi_j(x) = 0 \tag{5.6.14}$$

无论是区域Ⅰ、Ⅲ还是区域Ⅱ，x 方向边界条件相同，$\varphi_j(x)$取相同形式的解

$$\varphi_j(x) \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x} \tag{5.6.15}$$

以上式中下标的意义与式(5.6.11)中相同。式(5.6.15)表示图 5－22 (a)所示多层平板介质系统沿界面 x 方向场按 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}$变化，即在 x 方向是行波。根据斯奈尔定律，各个区域 x 方向传播常数 k_x 都相等，即

$$k_x = k_{x\,\mathrm{I}} = k_{x\,\mathrm{III}} = k_{x1} = k_{x2} = \cdots = k_{xn} = k_{\mathrm{I}} \sin\theta \tag{5.6.16}$$

$V_j(z)$、$I_j(z)$满足传输线方程，第 j 节传输线的传播常数k_{zj}、特征阻抗 Z_j (或特征导纳 Y_j)为

$$k_{zj} = \sqrt{k_j^2 - k_x^2} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_{\mathrm{r}j} - k_{\mathrm{I}}^2 \sin^2\theta} \quad (j = \mathrm{I}, \mathrm{III}, 1, 2, \cdots, n) \tag{5.6.17}$$

$$Z_j = 1/Y_j = \omega\mu/k_{zj} \qquad (j = \mathrm{I}, \mathrm{III}, 1, 2, \cdots, n) \tag{5.6.18}$$

介质交界面切向场量 E_y、H_x 连续导致交界面等效传输线电压、电流的连续。这就是图 5－22 (a)的多层介质系统就波的纵向(z 方向)传播而言可用级连的传输线等效的根据。

区域Ⅲ趋于无穷远，其等效传输线Ⅲ也趋于无穷远，$z = z_n$ 处输入阻抗 $Z_{\mathrm{in}}(z_n)$等于区域Ⅲ的特征阻抗 Z_{III}，所以图 5－22 (b)的传输线模型又可简化为图 5－22 (c)，利用传输线阻抗变换关系，级连传输线模型又进一步简化到图 5－22 (d)。$Z_{\mathrm{in}}(0)$是从区域Ⅰ沿 z 方向看进去的输入阻抗。由此得到 $z = 0^-$处反射系数 $\Gamma(z = 0^-)$为

$$\Gamma(z = 0^-) = \frac{Z_{\mathrm{in}}(0) - Z_{\mathrm{I}}}{Z_{\mathrm{in}}(0) + Z_{\mathrm{I}}} = \frac{Y_{\mathrm{I}} - Y_{\mathrm{in}}(0)}{Y_{\mathrm{I}} + Y_{\mathrm{in}}(0)} \tag{5.6.19}$$

z 方向场量E_y、H_x 的变化由 $V(z)$、$I(z)$决定。区域Ⅰ中的电压、电流分布为

$$\begin{cases} V_{\mathrm{I}}(z) = [1 + \Gamma_{\mathrm{I}}(z)] V_{\mathrm{I}}^{\mathrm{i}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z\mathrm{I}} z} & (5.6.20\mathrm{a}) \\ I_{\mathrm{I}}(z) = [1 - \Gamma_{\mathrm{I}}(z)] \dfrac{V_{\mathrm{I}}^{\mathrm{i}}}{Z_{\mathrm{I}}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z\mathrm{I}} z} & (5.6.20\mathrm{b}) \end{cases}$$

式中

$$\Gamma_{\mathrm{I}}(z) = \Gamma_{\mathrm{I}}(0^-) \mathrm{e}^{\mathrm{j}2k_{z\mathrm{I}} z}$$

$\Gamma_{\mathrm{I}}(0^-)$由式(5.6.19)得到，入射波幅值 $V_{\mathrm{I}}^{\mathrm{i}}$ 是已知量。

$z = 0$ 交界面 V、I 连续，有

$$[1+\Gamma_{\mathrm{I}}(0^-)]V_{\mathrm{I}}^{\mathrm{i}}=[1+\Gamma_1(0^+)]V_1^{\mathrm{i}}$$

由此得到区域Ⅱ第 1 节传输线上入射波电压 V_1^{i} 为

$$V_1^{\mathrm{i}}=\frac{1+\Gamma_{\mathrm{I}}(0^-)}{1+\Gamma_1(0^+)}V_{\mathrm{I}}^{\mathrm{i}} \tag{5.6.21}$$

式中

$$\Gamma_1(0^+)=\Gamma_1(z=z_1^-)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k_{z1}(z_1-0)}$$

$$\Gamma(z=z_1^-)=\frac{Z_{\mathrm{in}}(z=z_1^-)-Z_1}{Z_{\mathrm{in}}(z=z_1^-)+Z_1}$$

所以区域Ⅱ第 1 节传输线上电压、电流为

$$V_1(z)=[1+\Gamma_1(z)]V_1^{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z1}z} \tag{5.6.22a}$$

$$I_1(z)=[1-\Gamma_1(z)]\frac{V_1^{\mathrm{i}}}{Z_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z1}z} \tag{5.6.22b}$$

以此类推可得到区域Ⅱ第二节、第三节以至第 n 节传输线上电压、电流分布。在区域Ⅲ没有反射波，电压、电流都是行波，有

$$V_{\mathrm{III}}^{\mathrm{i}}(z=z_n^+)=V_n(z_n^-)=V_n^{\mathrm{i}}[1+\Gamma(z_n^-)] \tag{5.6.23a}$$

$$I_{\mathrm{III}}^{\mathrm{i}}(z=z_n^+)=\frac{V_{\mathrm{III}}^{\mathrm{i}}(z=z_n^+)}{Z_{\mathrm{III}}} \tag{5.6.23b}$$

$$\Gamma(z_n^-)=\frac{Z_{\mathrm{III}}-z_n}{Z_{\mathrm{III}}+z_n}$$

例 5-7 如图 5-23 (a)，TE 入射平面波波矢 $\boldsymbol{k}_1$ 以 $\theta=30°$角倾斜投射到薄层介质，已知 $\varepsilon_{r1}=\varepsilon_{r3}=1$，$\varepsilon_{r2}=4$，$k_{z2}d=420°\left(或\dfrac{d}{\lambda_z}=\dfrac{7}{6}\right)$，求 $z=0$ 处反射系数 $\Gamma(0^-)$以及场分布。

解：计算等效传输线参数

$$k_1=k_3=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}=k_0,\quad k_2=\omega\sqrt{4\varepsilon_0\mu_0}=2k_0$$

$$k_{x1}=k_{x2}=k_{x3}=k_1\sin 30°=\frac{1}{2}k_0$$

$$k_{z1}=k_{z3}=\sqrt{k_1^2-k_{x1}^2}=\sqrt{k_0^2-\left(\frac{k_0}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}k_0$$

$$k_{z2}=\sqrt{k_2^2-k_{x2}^2}=\sqrt{4k_0^2-\left(\frac{k_0}{2}\right)^2}=\sqrt{3.75}k_0$$

$$Z_1=Z_3=\frac{\omega\mu_0}{k_{z1}}=\frac{\omega\mu_0}{\frac{\sqrt{3}}{2}k_0}=\frac{2}{\sqrt{3}}\eta_0=435.3\ \Omega$$

$$Z_2=\frac{\omega\mu_0}{k_{z2}}=\frac{\omega\mu_0}{\sqrt{3.75}k_0}=\frac{\eta_0}{\sqrt{3.75}}=194.7\ \Omega$$

用公式求解：

$$Z_{in}(0^-) = Z_2 \frac{Z_3 + jZ_2\tan\ k_{z2}d}{Z_2 + jZ_3\tan\ k_{z2}d} = 194.7\frac{435.3 + j194.7\tan 420°}{194.7 + j435.3\tan 420°} \approx 108.9 - j84.3$$

$$\Gamma(0^-) = \frac{Z_{in}(0^-) - Z_1}{Z_{in}(0^-) + Z_1} = \frac{108.9 - j84.3 - 435.3}{108.9 - j84.3 + 435.3} \approx -0.56 - j0.24 = 0.609e^{-j156.8°}$$

$z=0$ 交界面电压 $V(0)$、电流 $I(0)$

$$V(0) = [1 + \Gamma(0^-)]\ V_1^i = 0.44 - j0.24 \approx 0.5e^{-j28.61°}\quad \text{V}$$

$$I(0) = [1 - \Gamma(0^-)]\ \frac{V_1^i}{Z_1} = (1.56 + j0.24)/435.3 = 3.62\times 10^{-3}e^{j8.75°}\quad \text{A}$$

为方便起见，这里我们假定入射波电压 $V_1^i = 1\text{V}$

在区域Ⅰ：

$$V_{1\max} = (1 + |\Gamma|)V_1^i = 1.609\ \text{V}$$

$$V_{1\min} = (1 - |\Gamma|)V_1^i = 0.391\ \text{V}$$

$$d_{\min 1} = \frac{\psi(0)\lambda}{4\pi} + \frac{\lambda}{4} = \frac{-156.8°\lambda}{720°} + \frac{\lambda}{4} = 0.0322\lambda$$

在区域Ⅱ：

$$\Gamma(d^-) = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} = \frac{435.3 - 194.7}{435.3 + 194.7} \approx 0.382$$

$$\Gamma(0^+) = \Gamma(d^-)e^{-j2k_{z2}d} = 0.382e^{-j840°} = 0.382e^{-j120°} = -0.191 - j0.331$$

$$V_2^i = \frac{1 + \Gamma(0^-)}{1 + \Gamma(0^+)} = \frac{0.44 - j0.24}{1 - 0.191 - j0.331} = \frac{0.5e^{-j28.61°}}{0.874e^{-j22.25°}} = 0.572e^{-j6.36°}$$

所以 $V_2(d^-) = [1 + \Gamma(d^-)]\times 0.572e^{-j6.36°}e^{-j420°} = 0.79e^{-j66.36°}\text{V}$

$$I(d^-) = [1 - \Gamma(d^-)]\times\frac{0.572e^{-j66.36°}}{Z_3} = \frac{1 - 0.382}{194.7}\times 0.572e^{-j66.36°}\text{A} = 1.82\times 10^{-3}e^{-j66.36°}\text{A}$$

$$V_{2\max} = (1 + |\Gamma_2|)|V_2^i| = 0.79\ \text{V}$$

$$V_{2\min} = (1 - |\Gamma_2|)|V_2^i| = 0.353\ \text{V}$$

$$I_{2\max} = (1 + |\Gamma_2|)\frac{|V_2^i|}{Z_2} = \frac{0.79}{194.7} = 4.06\times 10^{-3}\ \text{A}$$

$$I_{2\min} = (1 - |\Gamma_2|)\frac{|V_2^i|}{Z_2} = \frac{0.353}{194.7} = 1.82\times 10^{-3}\text{A}$$

区域Ⅲ为行波

$$V_3(d^+) = V_2(d^-)$$

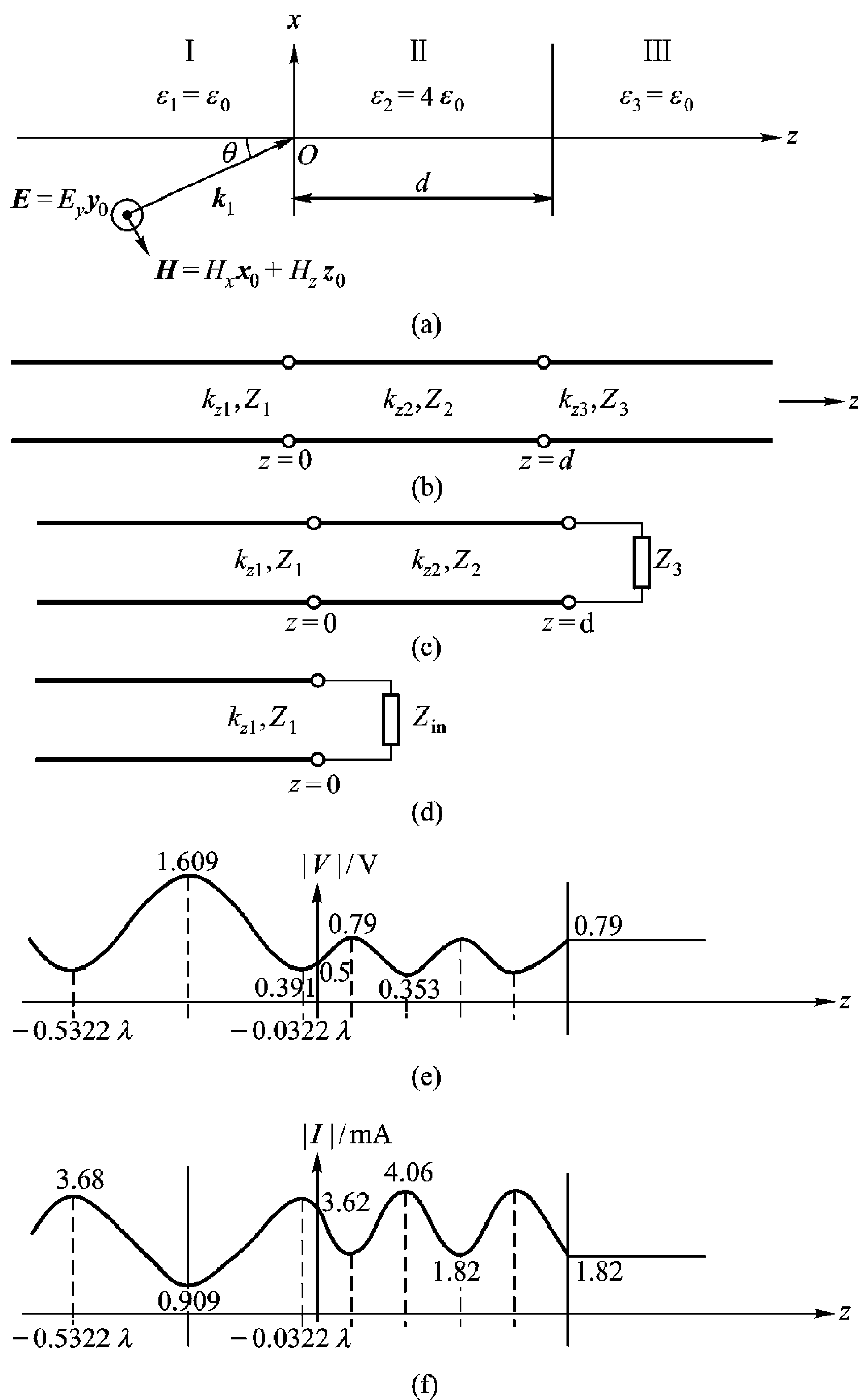
$$I_3(d^+) = I_2(d^-)$$

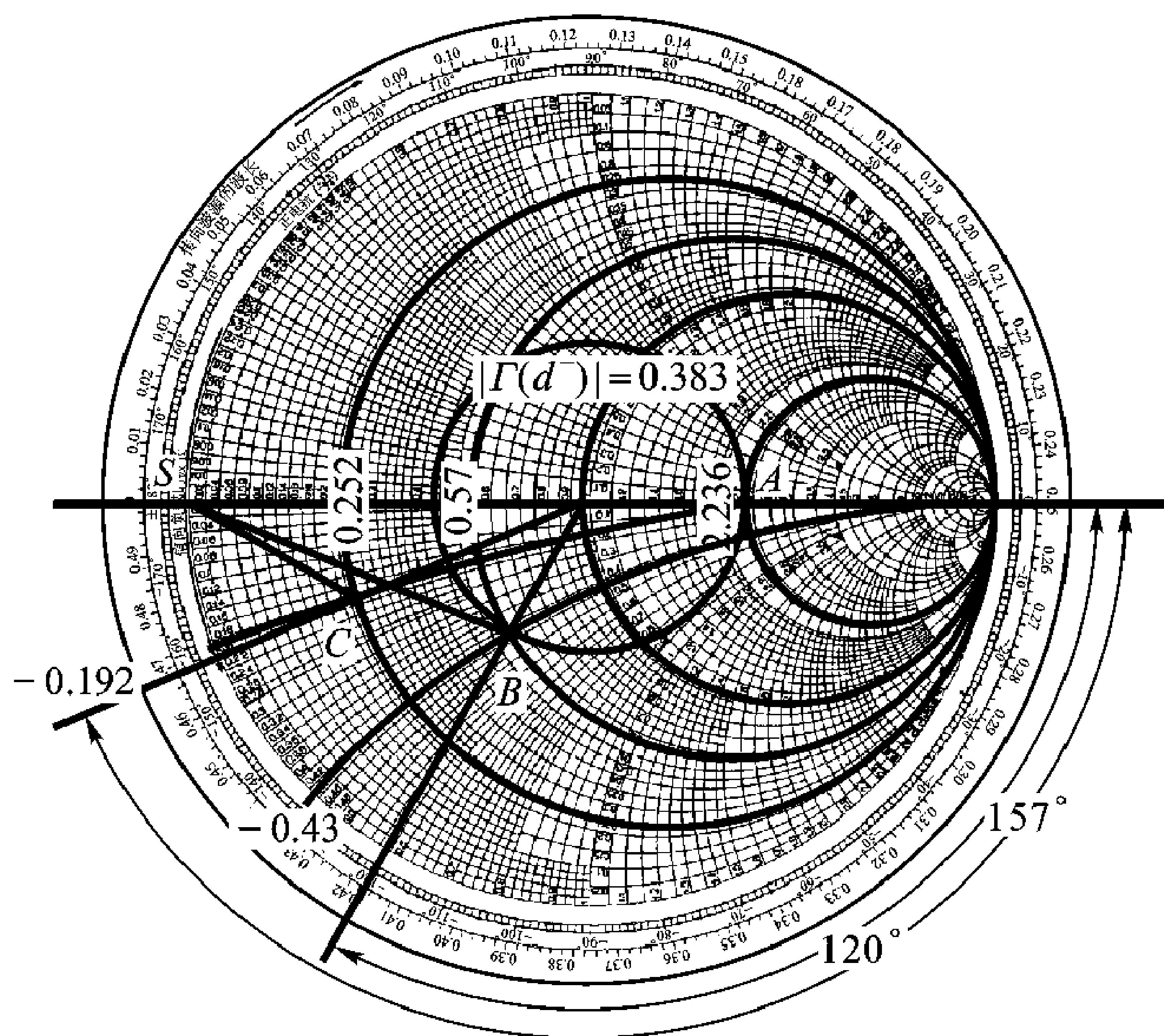
根据以上计算得到的3个区域中有代表性的几个特征点的电压电流值，即

可画出 z 方向电压、电流的大致分布，如图 5－23（e），（f）。

用圆图计算[参看图 5－23（g）]：

$z=d^-$ 处归一化阻抗 $z(d^-)=\dfrac{Z(d^+)}{Z_2}=\dfrac{Z_3}{Z_2}=\dfrac{435.3}{194.7}=2.236$，在圆图上对应于 A 点，有 $\Gamma(d^-)=\dfrac{\overline{OA}}{r}=\dfrac{1.53}{4}=0.383$（计算值为 0.382，式中 $\overline{OA}$ 为圆图圆心 O 到 A 点连线长度，r 为圆图半径）从 A 点沿等 $|\Gamma(d^-)|$ 圆旋转 $2k_{z2}d=840°$ 到 B 点，读出 B 点归一化阻抗为 $z(0^+)=0.565-\mathrm{j}0.43$，实际阻抗 $Z(0^+)=$





(g)

图 5-23　单层平板介质对波的反射、透射

(a)单层平板介质系统　(b)、(c)、(d)　等效电路

(e)、(f)　电压、电流分布　(g)圆图求解过程

$z(0^+)\times Z_2=(0.57-\mathrm{j}0.43)\times 194.7=(110-\mathrm{j}83.7)\Omega$（计算值为 $108.9-\mathrm{j}84.3$）。

$z(0^-)=\dfrac{Z(0^+)}{Z_1}=\dfrac{110-\mathrm{j}83.7}{435.3}=0.252-\mathrm{j}0.192$，在圆图上对应于 C 点，有

$$\Gamma(0^-)=\frac{\overline{OC}}{r}=\frac{2.42}{4}=0.605,\quad \psi(0^-)=-157^\circ$$（计算值 $|\Gamma(0^-)|=0.609$，$\psi(0^-)=-156.8^\circ$，式中 $\overline{OC}$ 为圆图圆心 O 与 C 点连线长度，r 为圆图半径）

圆图上

$$|1+\Gamma(0^-)|=\overline{SC}$$　（$\overline{SC}$ 为圆图短路点 S 与 C 点连线长度）

$$|1+\Gamma(0^+)|=\overline{SB}$$　（$\overline{SB}$ 为圆图短路点 S 与 B 点连线长度）

因为

$$|(1+\Gamma(0^-))\;V_1^{\mathrm{i}}|=|(1+\Gamma(0^+))\;V_2^{\mathrm{i}}|$$

所以

$$|V_2^{\mathrm{i}}|=\frac{|1+\Gamma(0^-)|}{|1+\Gamma(0^+)|}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SB}}=\frac{2}{3.5}=0.57$$（计算值为 0.572）

根据 $\Gamma(0^-)$，$\Gamma(0^+)$，V_1^{i}，V_2^{i}，区域Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ中有代表性点的 V、I 即可以方便算得：

$V_{1\max}=1.605\ \text{V}$，　　$V_{1\min}=0.395\ \text{V}$

$d_{\min 1}=0.031\,9\lambda$

$I_{1\max}=3.687\times10^{-3}\text{A}$　　$I_{1\min}=9.07\times10^{-4}\text{A}$

$V_{2\max}=0.79\ \text{V}$，　　$V_{2\min}=0.35\ \text{V}$，　　$|V(d^{-})|=0.79\ \text{V}$

$I_{2\max}=4.06\times10^{-3}\text{A}$，　$I_{2\min}=1.8\times10^{-3}\text{A}$，$|I(d^{-})|=1.8\times10^{-3}\text{A}$

$V(d^{+})=V(d^{-})$

$I(d^{+})=I(d^{-})$

以上得到的值与按公式计算得到的相差很小，因此用圆图进行粗略估计，读数误差不会很大，但计算过程非常形象直观。

例5-8　图5-24(a)所示多层介质膜干涉滤波器，由每层厚度 $d=\lambda_z/4$ 的高折射率和低折射率的薄膜构成，试说明其工作原理，即在狭窄的波长范围内反射光束很强，而在此波长范围以外，反射很小。($\lambda_z=2\pi/k_z$，为 z 方向的波导波长。)

解：在高、低折射率两介质界面一定有光的反射。注意，光束由高折射率介质投射到低折射率介质与由低折射率介质投射到高折射率介质时的反射系数相位相差180°，而光在每一层介质来回反射一次相移也是180°，所以从每一层介质交界面反射回来的光相位都相同。即图中从AA面反射回来的光束1与从BB面反射回来的光束2，在AA面是同相的。因为对于光束2，在薄层介质中来回一次，相移180°，在BB面上又有180°相移，总相移刚好360°，这就使得 $\lambda_z=4d$ 的光几乎全部反射回来。当 λ 变化使 $d\neq\lambda_z/4$，各交界面反射回来的光相位不相等，相互抵消一部分，就会使反射光变弱。只要层数足够多，$\lambda_z=4d$ 的光反射就很强，而 $\lambda_z\neq4d$ 的光，反射光束就很小。

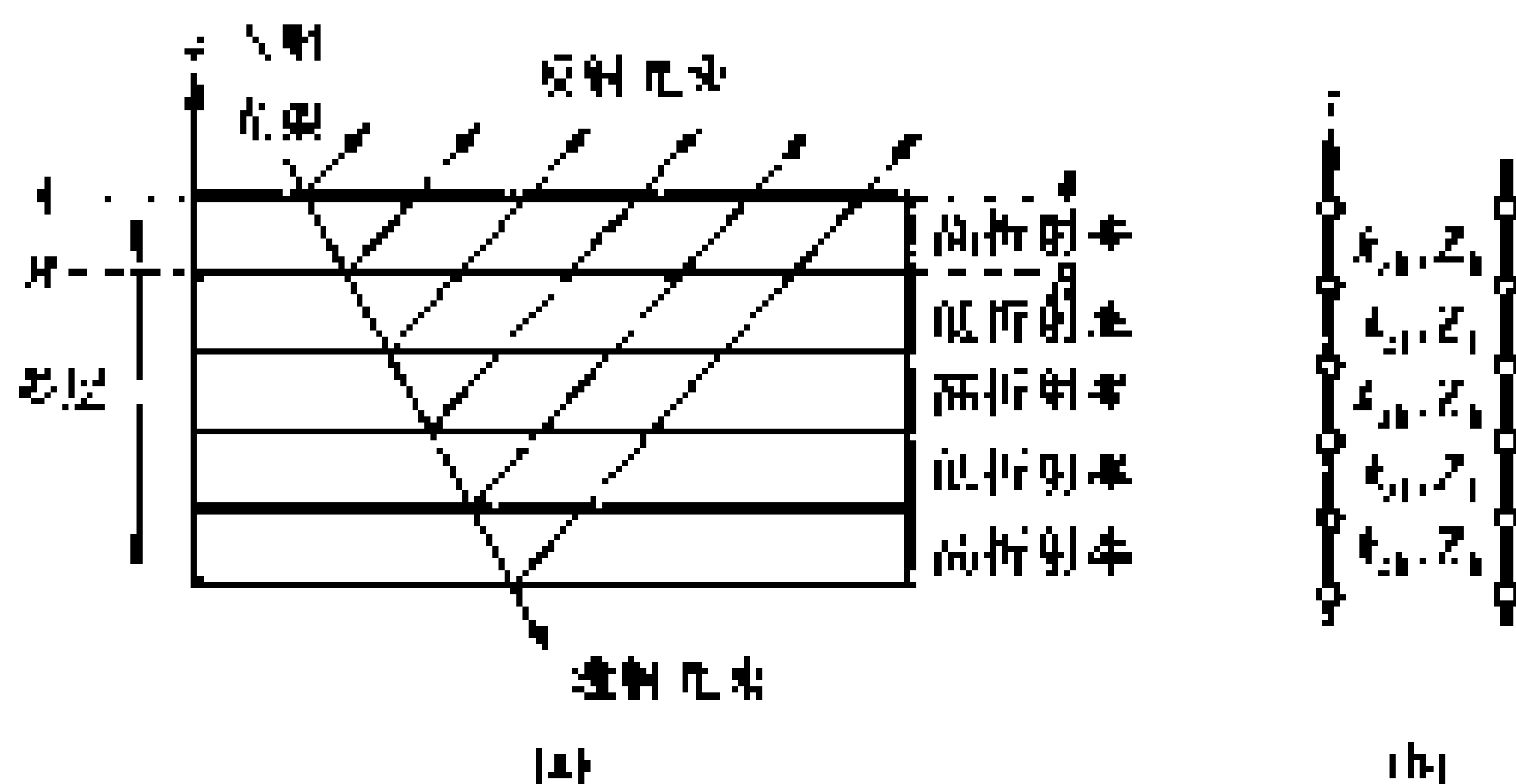


图5-24　多层介质膜干涉器及其等效电路

(a)多层介质膜干涉滤波器　(b)等效电路

图 5－24 (a)所示多层介质系统，其等效级连传输线模型如图 5－24 (b)，如果级连传输线的长度都为 $\lambda_z/4$，特征阻抗周期性地一级大，一级小。利用圆图很容易看到其输入阻抗(只要层数 n 足够大)，不是趋于零，就是趋于无穷大(取决于 n 是奇数还是偶数)，$z=0^-$ 处反射系数的模 $|\Gamma(z=0^-)|$ 接近 1，即全反射。如果级连传输线的长度偏离 $\lambda_z/4$，$z=0$ 处输入阻抗不再趋于 0 或无穷大，反射系数的模就会变小。

多层介质膜干涉滤波器已成功地用作激光器的反射镜，图 5－25 所示的激光器剖面图，其反射镜就是用分子束外延生长的 27 层 GaAs－AlAs 周期结构组成的。

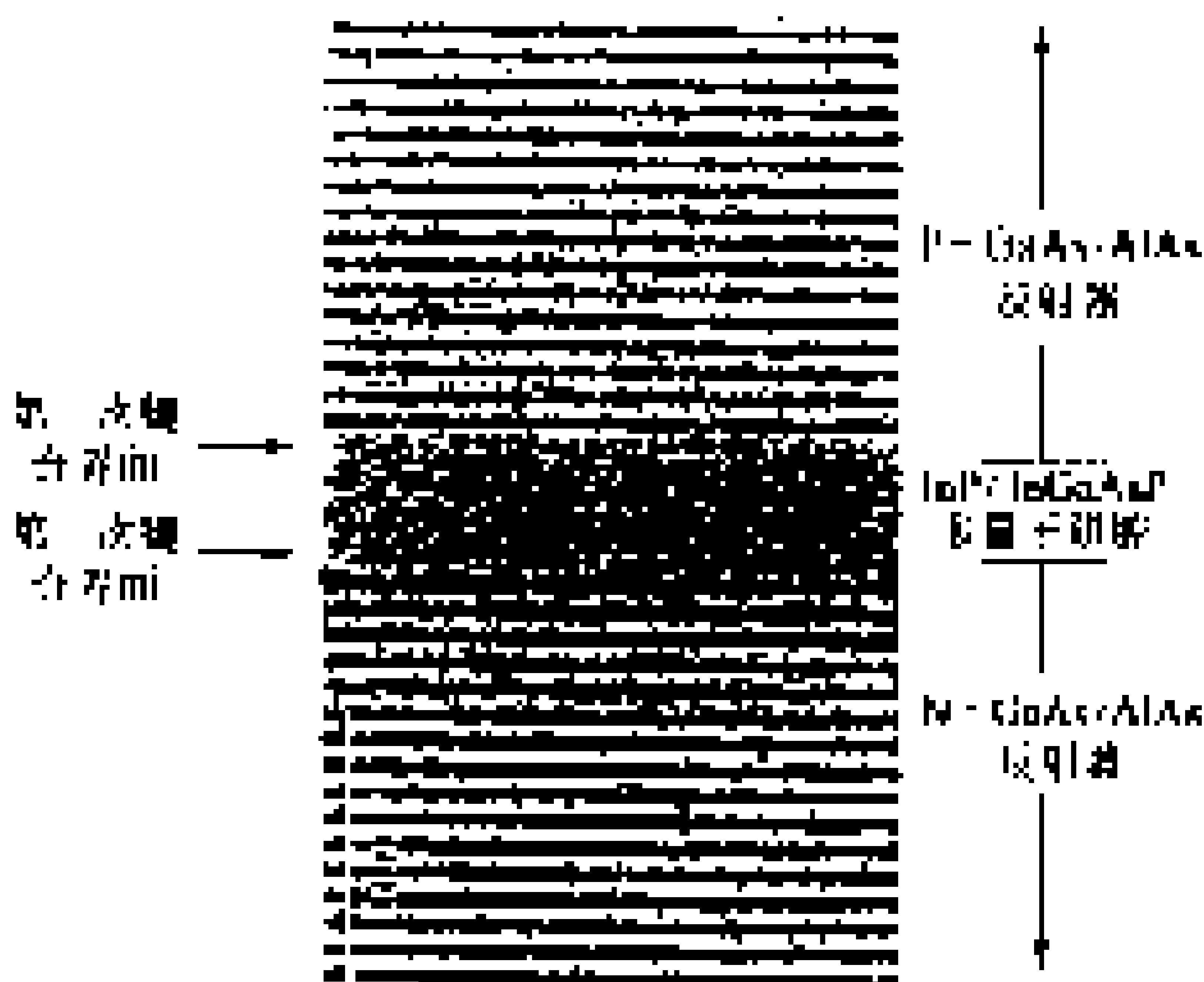


图 5－25　激光器剖面图

5.7　多层平板介质系统瞬态响应的传输线模型分析

前面对均匀介质、多层介质系统中波传播的分析，假定电磁波由连续的随时间作简谐变化的振荡源激励，系统已进入稳态，所处理的是单频率的电磁波。如果电磁波由局限在某一极短时间段内的振荡源激励，介质系统中波的传播要经历一个瞬变过程，逐步进入稳态。所谓多层平板介质系统的瞬态响应，就是研究当波源局域在某一时间段内(例如高斯函数的一阶微分信号)所激励的电磁波倾斜投射到多层介质系统，其反射波、透射波随时间是怎么演进的。局域在某一时间段内的脉冲波经傅里叶展开有多个频率分量，因此瞬态响应研究的是多频率波。

对瞬态响应的研究有两个途径，一是在时域内直接求解麦克斯韦方程，本书第13章介绍的时域有限差分(FDTD)法就是在时域内广泛应用的研究波传播瞬态响应的数值分析方法。二是通过傅里叶变换，在频域内研究各频率分量在介质系统中的传播，然后再经过傅里叶反变换得到时域中波传播的特性。

用传输线模型分析多层介质系统的瞬态响应是在频域中进行的，其要点是用传输线模型分析波源经傅里叶展开的各频率分量沿多层介质的传播，这正是我们在本章5.6节分析研究过的情形。

我们现在要分析的多层介质系统与图5-23相同，并重绘于图5-26(a)。与图5-23不同的是，入射波局限在某一时间段内，为高斯函数的微分信号。具体分析时，仍以TE波为例。坐标系的选择也使得波矢 $\boldsymbol{k}$ 只有两个分量，$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_z\boldsymbol{z}_0$，$k_y=0$，电场只有 E_y 分量，磁场有 H_x、H_z 两个分量。对瞬态响应的分析主要针对 E_y 分量，并重点分析区域Ⅰ与区域Ⅱ交界面($z=0$)处反射波以及区域Ⅱ与区域Ⅲ($z=z_n$)交界面透射波随时间的变化。具体分析过程如下：

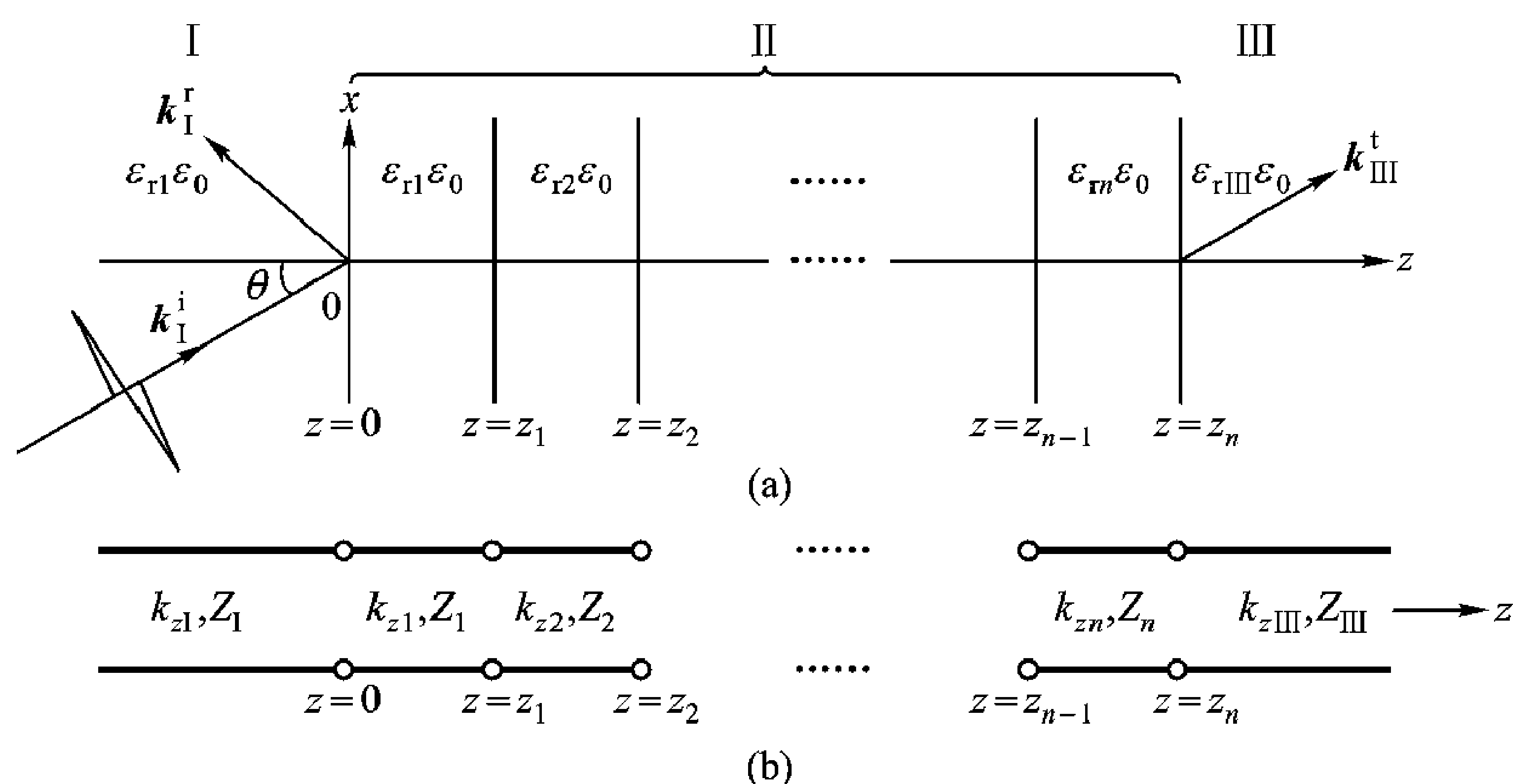


图5-26　多层介质波导瞬态响应分析的传输线模型

(a)多层介质波导　(b)传输线模型

(1) 给出图5-26(a)所示多层介质系统的传输线模型[图5-26(b)]，并计算各级连传输线的特征参数。5.6节已分析过，这里不再重复。

(2) 计算 $z=0$ 处反射系数 $\Gamma(0)$ 及 $z=z_n$ 处透射系数 $T(z_n)$：

计算级连传输线每一级入口处的输入阻抗

$$Z_\text{in}(z_{i-1})=Z_i\frac{Z_\text{in}(z_i)+\text{j}Z_i\tan\left[k_{zi}(z_i-z_{i-1})\right]}{Z_i+\text{j}Z_\text{in}(z_i)\tan\left[k_{zi}(z_i-z_{i-1})\right]}\tag{5.7.1}$$

因为区域Ⅲ趋于无穷远，其输入阻抗 $Z_\text{in}(z_n)$ 等于区域Ⅲ等效传输线的特征阻抗 $Z_\text{Ⅲ}$，即

$$Z_{\text{in}}(z_n) = Z_{Ⅲ} \tag{5.7.2}$$

利用式(5.7.1)即可算出每一级 $z = z_{i-1}$ 处的输入阻抗，并最终得出 $z=0$ 处输入阻抗 $Z_{\text{in}}(0)$。由此得到 $z=0$ 处反射系数为

$$\Gamma(0^-) = \frac{Z_{\text{in}}(0) - Z_{Ⅰ}}{Z_{\text{in}}(0) + Z_{Ⅰ}} = \frac{Y_{Ⅰ} - Y_{\text{in}}(0)}{Y_{Ⅰ} + Y_{\text{in}}(0)} \tag{5.7.3}$$

利用5.6节分析的结果，区域Ⅱ第1级传输线上入射波电压 V_1^{i} 为

$$V_1^{\text{i}} = \frac{1 + \Gamma_{Ⅰ}(0^-)}{1 + \Gamma_1(0^+)} V_{Ⅰ}^{\text{i}} \tag{5.7.4}$$

式中

$$\Gamma_1(0^+) = \Gamma_1(z = z_1^-)\text{e}^{-\text{j}2k_{z1}(z_1 - 0)}$$

$$\Gamma_1(z = z_1^-) = \frac{Z_{\text{in}}(z = z_1^-) - Z_1}{Z_{\text{in}}(z = z_1^-) + Z_1}$$

利用反射系数沿传输线的变换关系，由 $\Gamma(z = z_1^-)$得到区域Ⅱ第1级传输线任一位置反射系数 $\Gamma_1(z)$，因此区域Ⅱ第1级传输线上电压、电流可表示为

$$V_1(z) = [1 + \Gamma_1(z)]V_1^{\text{i}}\text{e}^{-\text{j}k_{z1}z}$$

$$I_1(z) = [1 - \Gamma_1(z)]\frac{V_1^{\text{i}}\text{e}^{-\text{j}k_{z1}z}}{Z_1}$$

以此类推，可得区域Ⅱ第2级、第3级以至第 n 级传输线上电压、电流分布。在区域Ⅲ，没有反射波，电压、电流都是行波，有

$$V_{Ⅲ}^{\text{i}}(z = z_n^+) = V_n(z = z_n^-) = V_n^{\text{i}}[1 + \Gamma_n(z_n^-)]$$

$$I_{Ⅲ}^{\text{i}}(z = z_n^+) = \frac{V_{Ⅲ}^{\text{i}}(z = z_n^+)}{Z_{Ⅲ}}$$

由此得到 $z = z_n$ 处透射系数为

$$T(z_n^+) = \frac{V_{Ⅲ}^{\text{i}}(z = z_n^+)}{V_{Ⅰ}^{\text{i}}(z = 0^-)} = (1 + \Gamma_{Ⅰ}(0^-))\prod_{i=1}^{n}\frac{(1 + \Gamma_i(z_i^-))\text{e}^{-\text{j}k_{zi}(z_i - z_{i-1})}}{1 + \Gamma_i(z_i^-)\text{e}^{-2\text{j}k_{zi}(z_i - z_{i-1})}} \tag{5.7.5}$$

(3) 计算反射波 $E_y^{\text{r}}(x, z, t)$与透射波 $E_y^{\text{t}}(x, z, t)$：

将入射波表示为

$$E_y^{\text{i}}(x, z, t) = \text{e}^{-\text{j}k_x x}E_y^{\text{i}}(z, t) \tag{5.7.6}$$

$$E_y^{\text{i}}(z, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_y^{\text{i}}(\omega)\,\text{e}^{\text{j}(\omega t - k_z z)}\text{d}\omega \tag{5.7.7}$$

式中

$$E_y^{\text{i}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_y^{\text{i}}(z = 0, t)\,\text{e}^{-\text{j}\omega t}\text{d}t \tag{5.7.8}$$

为 $z=0$ 处入射波 $E_y^{\text{i}}(0, t)$的傅里叶变换。

利用式(5.7.3)，区域Ⅰ的反射波为

$$E_y^{\mathrm{r}}(x,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E_y^{\mathrm{i}}(\omega)\,\Gamma(0^-)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_{z1}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{d}\omega \tag{5.7.9}$$

利用式(5.7.5)，区域Ⅲ的透射波为

$$E_y^{\mathrm{t}}(x,z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E_y^{\mathrm{i}}(\omega)\,T(z_n^+)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z\mathrm{III}}z}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{d}\omega \tag{5.7.10}$$

对式(5.7.9)、(5.7.10)进行数值求解，就可得到反射波与透射波的瞬态响应。图 5－27、28、29 分别给出 3 种不同情况下 $z=0$、$z=z_n$ 处反射波与透射波的瞬态响应。

图 5－27 的分析结果对应于区域Ⅱ只有一层介质的情况，且高斯脉冲波垂直投射到介质交界面，即 $\theta=0$，$\varepsilon_{\mathrm{rI}}=\varepsilon_{\mathrm{rIII}}=1$，而 $\varepsilon_{\mathrm{r2}}=9$，介质厚度 d 满足

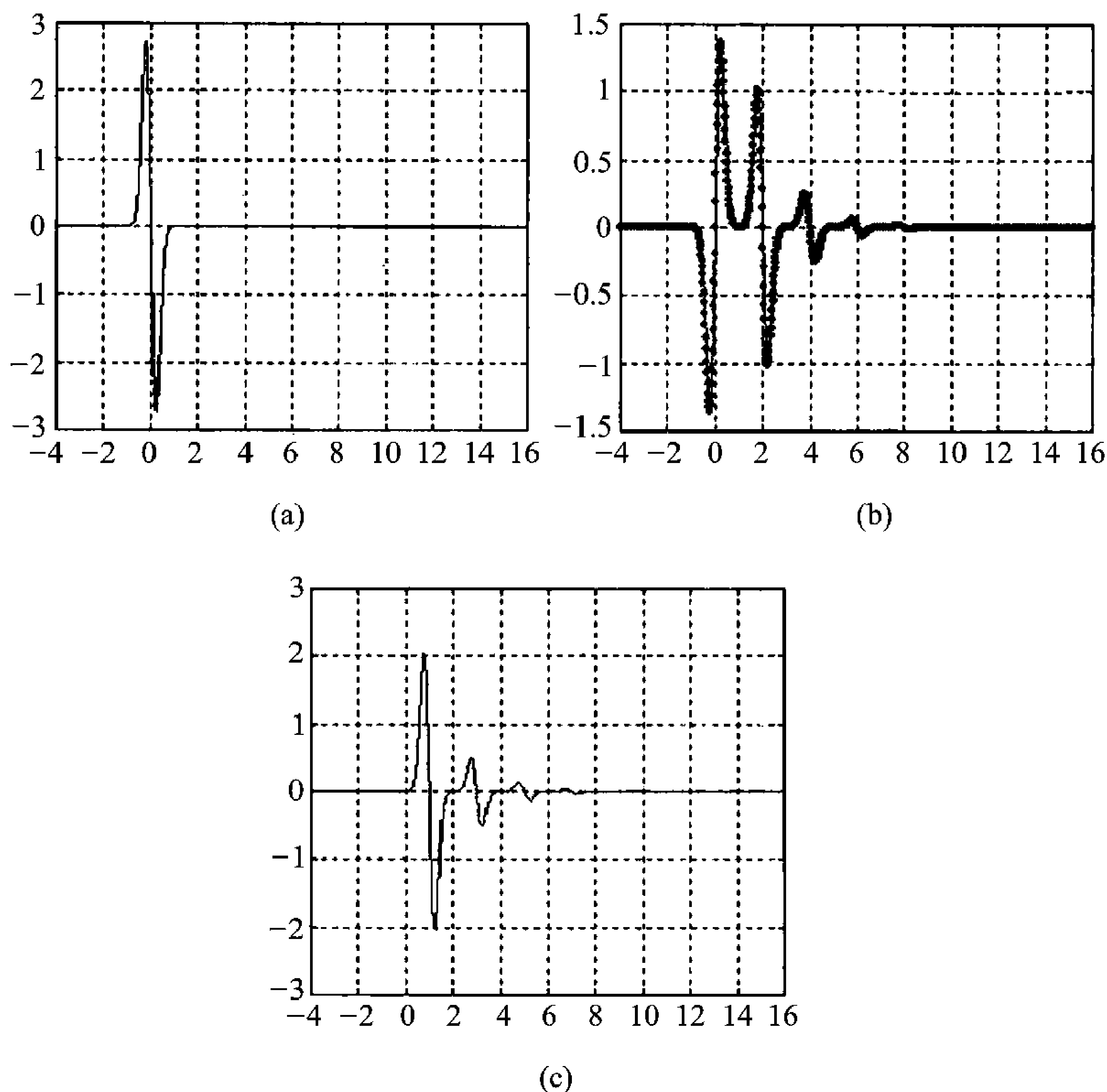


图 5－27　垂直投射时单层介质的瞬态响应

(a)入射波　(b)反射波　(c)透射波

注：图中横坐标为时间轴 t（单位为 T），纵坐标为振幅；

图(b)中打点的数值是在时域内直接求解得到的。

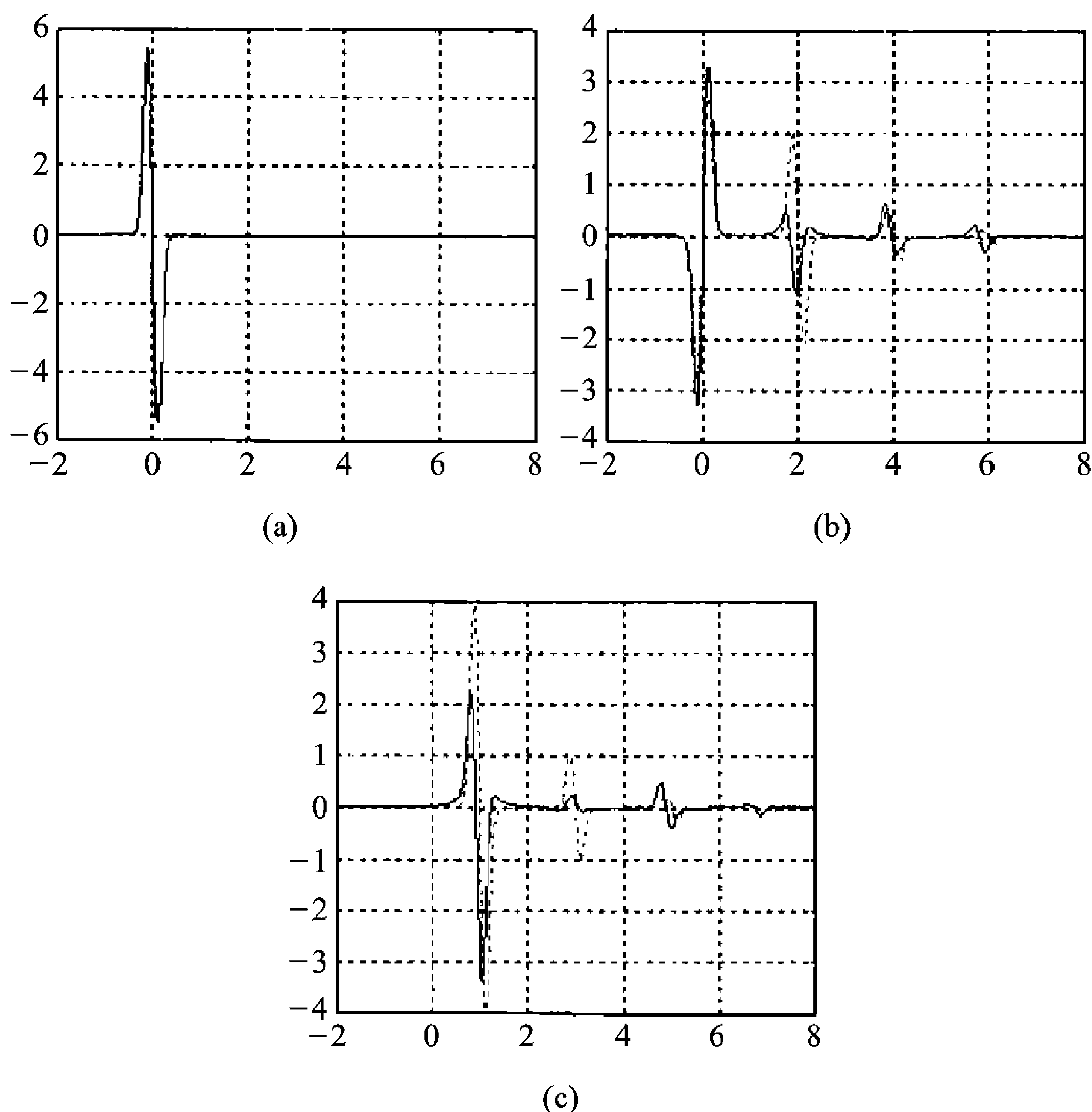


图 5－28　倾斜投射时单层介质的瞬态响应

(a)入射波　(b)反射波　(c)透射波(数值解)

注：图中横坐标为时间轴 t（单位为 T），纵坐标为振幅；点线：入射角 $\theta=0°$；实线：$\theta=45°$。

$\dfrac{\sqrt{\varepsilon_{r2}}d}{c}=T$，$c$ 为真空中光速，T 为光在平板介质中的单程传输延迟。数值分析中，时间 t 都用 T 归一化。激励信号 $f(t)$为高斯脉冲的微分，且垂直投射到介质交界面，有

$$f(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b\mathrm{e}^{-at^2})=2ab(-t\mathrm{e}^{-at^2}) \tag{5.7.11}$$

参数 $a=10$，$b=1$。

由于入射波在 $|t|>4T$ 时几乎为零，故数值分析中只对 t 在$[-4T, 16T]$时段内的波形进行抽样，抽样时间间隔 $\Delta t=0.02T$，抽样点数 $N=1\ 000$。由图 5－27 可见，第一个反射波相对于入射波没有延迟，但相位相反，它是由 $z=0$ 交界面直接反射引起的。第二个反射波延迟 $2T$，它是从 $z=d$ 处交界面反射回来再透过 $z=0$ 处交界面到区域Ⅰ的。因此第三个反射波相对于入射波就被延

迟 $4T$，余类推。对于透射波，第一个透射波相对于入射波延迟 T，第二个透射波延迟 $3T$，它比第一个透射波在薄层介质中来回多走了一次，余类推。

图 5-28 与图 5-27 不同的是，高斯脉冲微分信号 $f(t)$ 以 $\theta=45°$ 倾斜投射到介质交界面，且参数 $a=40$，$b=1$，时间 t 也用 T 归一化，抽样时间间隔 $\Delta t=0.01T$，抽样点数为 2 000，为便于比较，$\theta=0°$ 垂直投射时的瞬态响应也以虚线同时给出。由图 5-28 可见，由于倾斜投射时厚度 d 的平板介质对不同频率分量波的相位延迟不一样，引起色散，因此除第一个反射波形没有改变，只是相位与入射波相位差 180°外，其他反射波、透射波都与垂直投射时不同了。倾斜投射时，纵向波数 k_z 比垂直投射时小，相速 $V_p=\omega\mu/k_z$ 增大，因而波在介质中的时间延迟比垂直投射时小了。

图 5-29 分析的是一个多层介质带阻滤波器，其中心频率 $f_0=40$ GHz。区

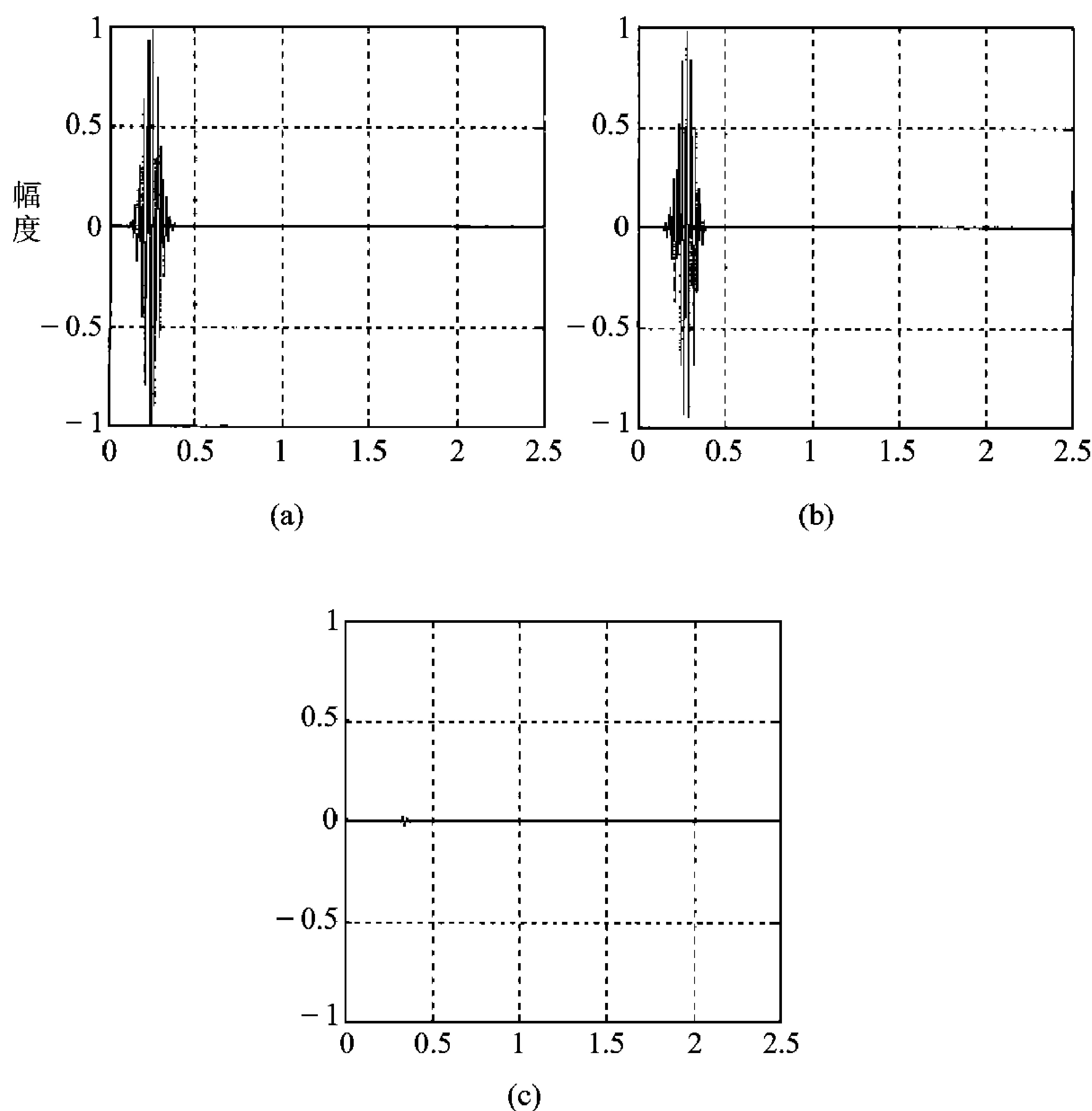


图 5-29　高斯脉冲调制正弦信号的瞬态响应

(a) 入射波　(b) 反射波　(c) 透射波

注：图中横坐标为时间轴 t（单位为 ns），图中只显示 t 在 [0, 2.5 ns] 的值。纵坐标为振幅相对值。

域Ⅱ共有 9 层介质，介电系数沿 z 轴分布为 $\varepsilon_{r\mathrm{I}}$、$\varepsilon_{rL}$、$\varepsilon_{rH}$、$\varepsilon_{rL}$、$\varepsilon_{rH}$、$\varepsilon_{rL}$、$\varepsilon_{rH}$、$\varepsilon_{rL}$、$\varepsilon_{rH}$、$\varepsilon_{rL}$、$\varepsilon_{r\mathrm{III}}$，其中 $\varepsilon_{r\mathrm{I}} = \varepsilon_{r\mathrm{III}} = 1$，$\varepsilon_{rL}$、$\varepsilon_{rH}$交替排列，$\varepsilon_{rL} = 2.20(1 - j0.000\,9)$，$\varepsilon_{rH} = 10.5(1 - j0.002\,3)$，厚度依次为 $d_1 = d_9 = 3.139$ mm，$d_2 = d_8 = 0.55$ mm，$d_3 = d_7 = 1.269$ mm，$d_4 = d_6 = 0.497$ mm，$d_5 = 1.666$ mm，入射波为微分高斯脉冲调制的正弦波信号，并以 $\theta = 25°$投射到介质交界面，高斯脉冲的参数 $a = 10$，$b = 1$，其选择原则使得信号频谱的主要分量落在带阻范围内。数值求解时，时间间隔 $\Delta t = 1/(2f_0)$ s，采样点数 $N = 2\,000$。时域内入射波、反射波、透射波波形分别见图 6 - 29 (a)、(b)、(c)，其中透射波幅度很小，表明该滤波器在时域中的带阻功能。

本章要点

- 介质交界面对电磁波的反射、折射是电磁波在不均匀介质中传播的基本问题，反射系数 Γ、折射系数 T 是描述波在介质交界面反射、折射的两个重要参数。
- 电磁波在介质交界面的反射、折射必须服从麦克斯韦方程，这就是介质交界面的边界条件。介质交界面电场的切向分量连续，如果有表面电流，磁场的切向分量不连续，其不连续值等于表面电流。介质交界面磁场的法向分量连续，如果有表面电荷，电通量密度的法向分量不连续，其不连续值等于表面电荷。完纯导体内部电磁场不存在，所以在介质导体交界面，切向电场等于零，切向磁场等于表面电流，法向磁场等于零，法向电通量密度等于表面电荷密度。
- 定义介质交界面法线与入射波波矢构成的平面为入射面，TE 模投射时，电场与入射面垂直(磁场平行于入射面)，也称垂直极化。TM 模投射时，电场与入射面平行(磁场与入射面垂直)，称为平行极化。TE 模、TM 模两种情况下，介质交界面对波的反射、折射是不同的。
- 边界条件是分析介质交界面反射、折射的根本出发点，在场量匹配法中先写出交界面两旁入射波、反射波、折射波场量，然后代入边界条件关系式，得到反射波、折射波与入射波关系，求出 Γ、T。在传输线模型法中将介质交界面用级连传输线等效，然后用传输线理论计算介质交界面的 Γ 与 T。这两种方法初看起来差别较大，前者用场的方法，后者用路的方法，但两者等价，对于多个介质交界面，传输线模型处理起来更方便。
- 从介质交界面边界条件可以得出介质交界面两侧电磁波沿界面方向具有相同的传播常数或相同的传播速度，这就是斯奈尔定律，也称为介质交界面两侧相位匹配条件。
- 介质交界面对波的反射有两个特征角，其一是临界角，当波从介电系数 ε 较

大的介质投射到 ε 较小的介质，且入射角 θ 大于某一临界角 θ_c（$\theta_c = \arcsin\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$）时将发生全反射。当 TM 波从介质 1 投射到介质 2 时，如果入射角等于布儒斯特角 θ_b（$\theta_b = \arctan\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$），则 TM 入射波将无反射地全部透射到介质 2。这种现象叫做布儒斯特现象。

- 当平面波投射到吸收介质边界时，在吸收介质中的折射波等相位面与等幅面不再重合，称为非均匀平面波，等幅面与边界面平行，波随离开边界面的距离按指数衰减。
- 介质 – 完纯导体交界面与介质交界面对电磁波的反射有区别。在完纯导体表面不管入射波是 TE 还是 TM，不管入射波波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向，都发生全反射，对于切向电场，入射波与反射波还有 180°相移。对于介质 – 介质交界面，反射系数 Γ 不仅与入射波波型还与入射波波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向有关，而且只有当入射角大于临界角 θ_c 时才发生全反射，入射波与反射波之间相移也不是 π，而是随入射角变化。
- 一维不均匀介质可用多层介质系统等效。选择坐标系使波矢 $\boldsymbol{k}$ 只有垂直于界面的 k_z 分量与平行于界面的 k_x 分量，即 $\boldsymbol{k} = k_x\boldsymbol{x}_0 + k_z\boldsymbol{z}_0$，那么沿界面 x 方向波的传播是相同的，都按 $e^{-jk_x x}$变化，与界面垂直的方向，波的传播可用级连的传输线等效，传输线上电压、电流波分布反映与 z 垂直的横向电场与横向磁场沿 z 轴的分布。因此可借用传输线理论与圆图求解多层介质中波的传播问题。
- 多层介质系统的瞬态响应的分析既可以在时域中进行，利用傅里叶变换与反变换也可在频域中进行。多层介质中波传播的传输线模型是在频域中分析多层介质中波传播的有效方法，因而也可用传输线模型分析多层介质的瞬态响应，其优点是物理概念清楚，且便于数值分析。

习题

5.1　完纯导体表面 $\boldsymbol{H}_t = 3\boldsymbol{x}_0 + 4\boldsymbol{z}_0$　A/m，求表面电流 $\boldsymbol{J}_s$。

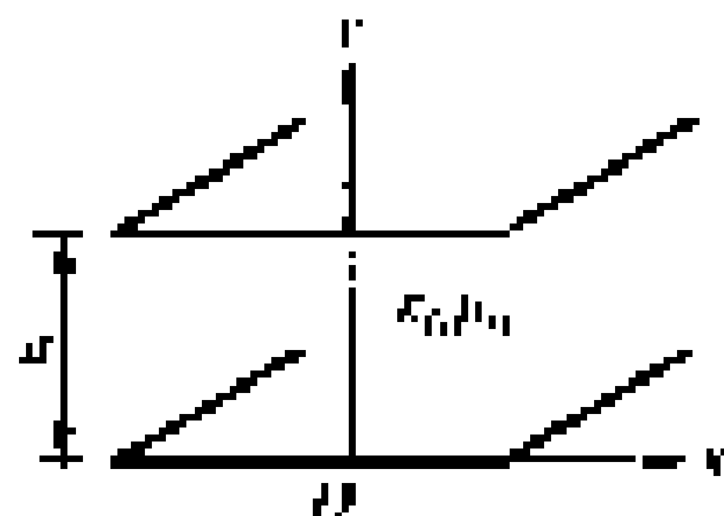
5.2　两无限大平板间有电场 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0 A\sin\left(\dfrac{\pi}{d}y\right)e^{j(\omega t - kz)}$，式中 A 为常数，平行板外空间电磁场为零，坐标如题图 5.2 所示，问题如下：

(1) 求 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}$，$\nabla\times\boldsymbol{E}$；

(2) $\boldsymbol{E}$ 能否用一位置的标量函数的负梯度表示，试说明原因；

(3) 求与 $\boldsymbol{E}$ 相联系的 $\boldsymbol{H}$；

(4) 确定两板面上面电流密度和面电荷密度。



题图 5.2

5.3　有一均匀平面波垂直入射到 $z=0$ 处的理想导电平面，其电场强度为 $\boldsymbol{E}=E_0(\boldsymbol{x}_0-\mathrm{j}\boldsymbol{y}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$，试确定：

(1) 入射波和反射波的极化方式；

(2) 导电平面上面电流密度；

(3) $z\leqslant 0$ 区域合成电场强度的瞬时值。

5.4　计算从下列各种介质斜入射到它与空气的平面分界面时的临界角：

(1) 蒸馏水，$\varepsilon_r=81.1$；

(2) 酒精，$\varepsilon_r=25.8$；

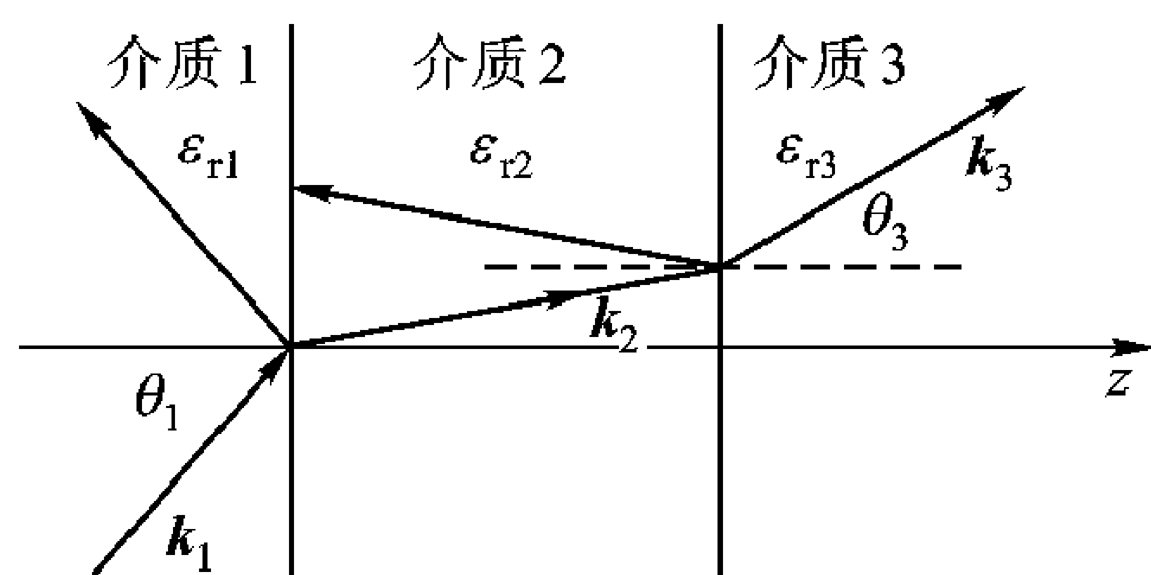
(3) 玻璃，$\varepsilon_r=9$；

(4) 云母，$\varepsilon_r=6$。

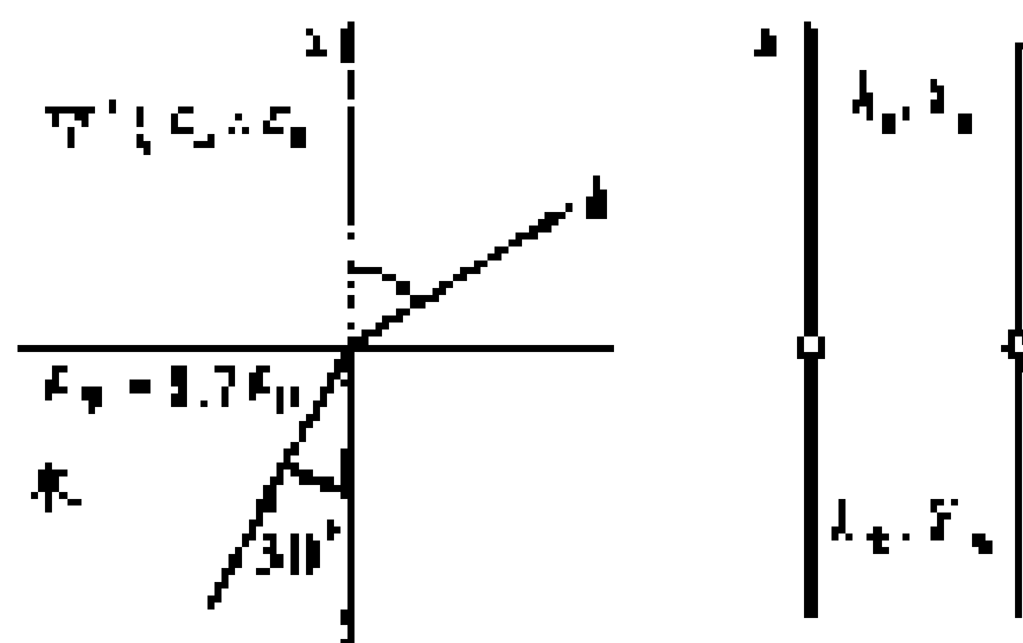
5.5　一圆极化均匀平面波自空气投射到非磁性媒质表面($z=0$)，入射角 $\theta^i=60°$，入射面为 $x-z$ 面。要求反射波电场在 y 方向，求媒质的相对介电系数 ε_r。

5.6　若要求光波以任何角度入射到玻璃板的一端，都在板内发生全反射，从而将光波约束在板内传至另一端，求玻璃的介电常数最小应为多少？

5.7　如题图 5.7 所示三介质系统，$\boldsymbol{k}_1$、$\boldsymbol{k}_2$、$\boldsymbol{k}_3$ 分别为介质 1、2、3 中波矢，求用 θ_1 表示的 θ_3，θ_1 为入射角，θ_3 为透射角。



题图 5.7



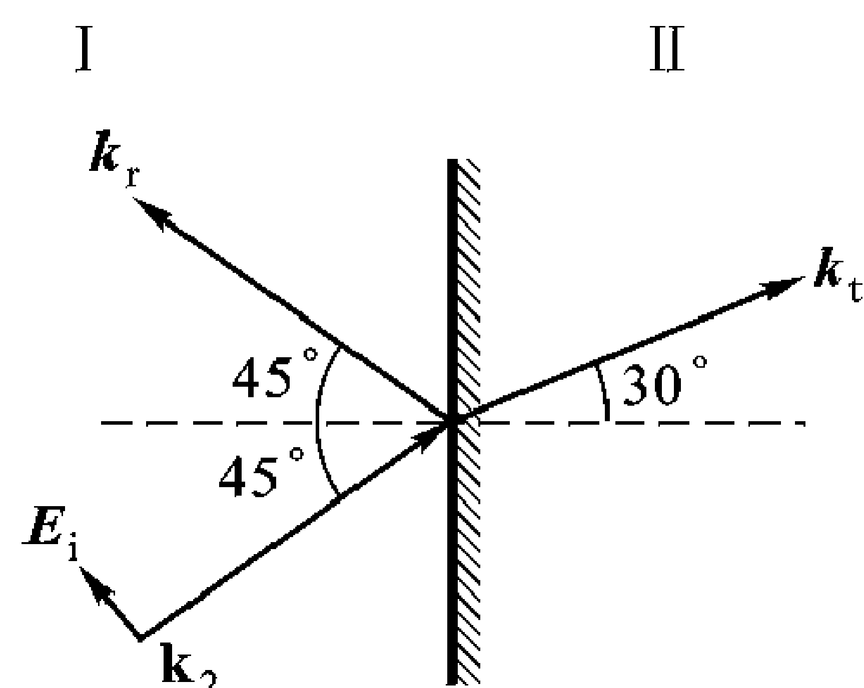
题图 5.8

5.8　光从水以 $\theta=30°$角投射到与空气交界面(见题图 5.8)，设光频时水的介电常数为 $\varepsilon=1.7\varepsilon_0$，磁导率 $\mu=\mu_0$，空气的 $\varepsilon_a=\varepsilon_0$，$\mu_a=\mu_0$，给出 x 方向传输线模型(给出级连传输线的特征参数)并用传输线模型求反射系数与折射系数。

5.9　均匀平面波由介质Ⅰ(空气)以 45°角投射到无损介质Ⅱ，已知折射角为 30°，如题图 5.9，频率为 300 MHz，求：

(1) ε_2；

(2) 反射系数 Γ。



题图 5.9

5.10　两个各向同性媒质组成的交界面，两边的磁导率、介电系数均不相等，$\mu_1\neq\mu_2$，$\varepsilon_1\neq\varepsilon_2$，求入射波平行极化、垂直极化两种情形下的布儒斯特角 θ_b。

5.11　垂直极化平面波由媒质Ⅰ倾斜投射到媒质Ⅱ，如

题图5.11，$\varepsilon_1=4\varepsilon_0$，$\varepsilon_2=\varepsilon_0$，求：

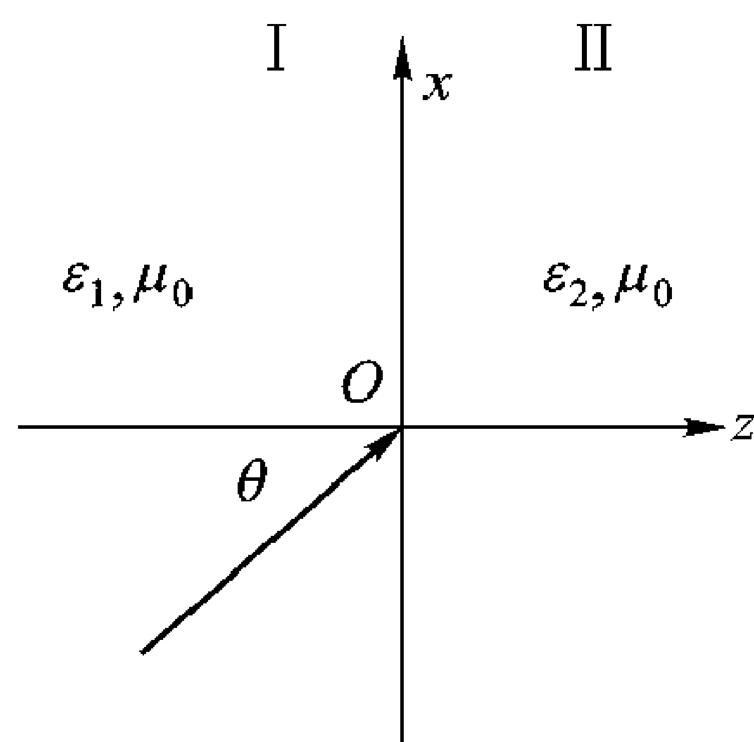
(1) 产生全反射时的临界角；

(2) 当 $\theta=60°$时，求 k_x，k_{z1}(用 $k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$表示)；

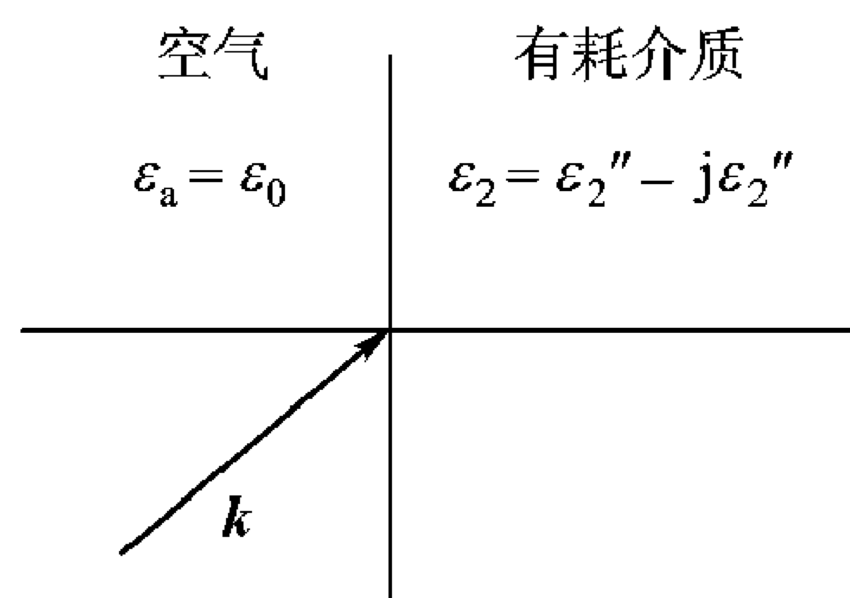
(3) 求 k_{z2}(用 k_0 表示)；

(4) 在媒质Ⅱ，求场衰减到 $1/e$ 时离开交界面的距离；

(5) 求反射系数 Γ。



题图5.11



题图5.12

5.12　平面波从空气垂直投射到一块铜板，铜的电导率 $\sigma=5.8\times10^7$ S/m，求频率为500 MHz时，入射波的多少功率(以百分比表示)为铜板吸收？

5.13　频率为1 MHz平面波，从空气垂直投射到铜，入射波电场幅值 $E=100$ V/m，求反射系数 Γ，趋肤深度 δ，离开铜表面一个趋肤深度距离的 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{H}$（铜的电导率 $\sigma=5.8\times10^7$ S/m）。

5.14　一均匀平面电磁波由空气向理想介质($\mu=\mu_0$、$\varepsilon=9\varepsilon_0$)垂直入射。已知 $z=5$ m 处 $H_y=H_2=10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2z}=10\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{4}}$ mA/m（设介质分界面处为 $z=0$，初相 $\varphi=0°$）。试求：

(1) 此平面电磁波的工作频率；

(2) 写出介质区域及空气区域的 E_2、H_2、E_1、H_1 的表示式；

(3) 在介质区域中再求：

a. 由复数振幅写成复数或瞬时的场量表示式；

b. 坡印廷矢量瞬时表示式 S 及 S_{av}；

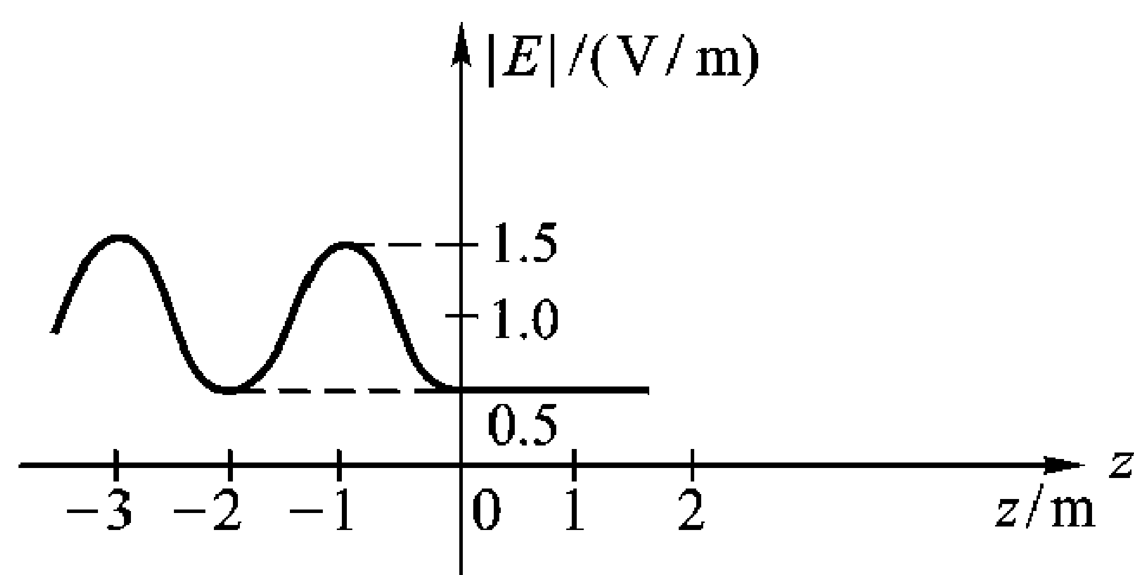
c. 电场与电场能量密度的瞬时表示式 w_e、w_m 及其最大的能量密度的大小 w_{emax}，$w_{m\,max}$；

d. 能量密度的平均值 w_{eav}，w_{mav}。

5.15　均匀平面波垂直投射到介质板，介质板前电场的大小示于题图5.15，求：

(1) 介质板的介电常数 ε；

(2) 入射波的工作频率。



题图5.15

5.16　在介电系数分别为 ε_1 与 ε_3 的介质中间放置一块厚度为 d 的介质板，其介电常

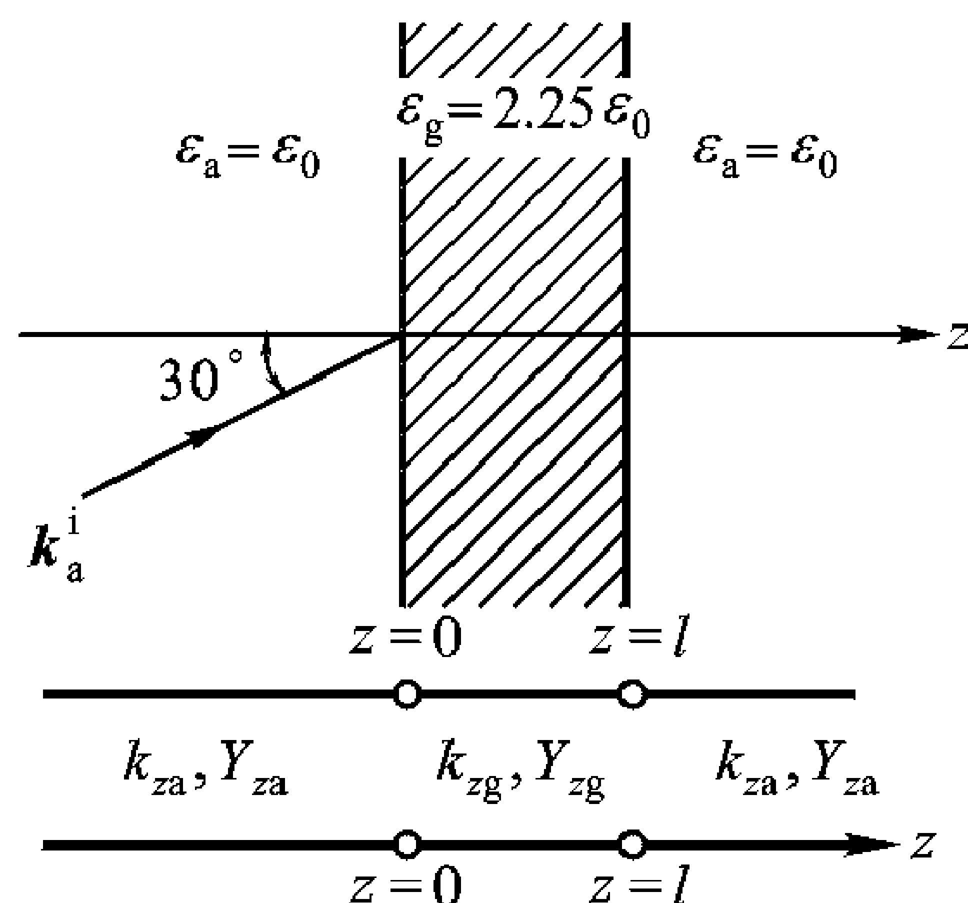
数为 ε_2，3 种介质的磁导率均为 μ_0，若均匀平面波从介质 1 以 $\theta^i=0°$垂直投射到介质板上，问题如下：

(1) 证明当 $\varepsilon_2=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}$，且 $d=\dfrac{\lambda_0}{4\sqrt{\varepsilon_{r2}}}$时，没有反射；

(2) 如果 $\theta^i\neq 0°$，导出没有反射时的 d 的表达式。

5.17 空气中均匀平面波垂直投射到厚度为 d 的铜片上，铜的 $\mu=\mu_0$，$\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon}>>1$，求铜两侧的电场之比。

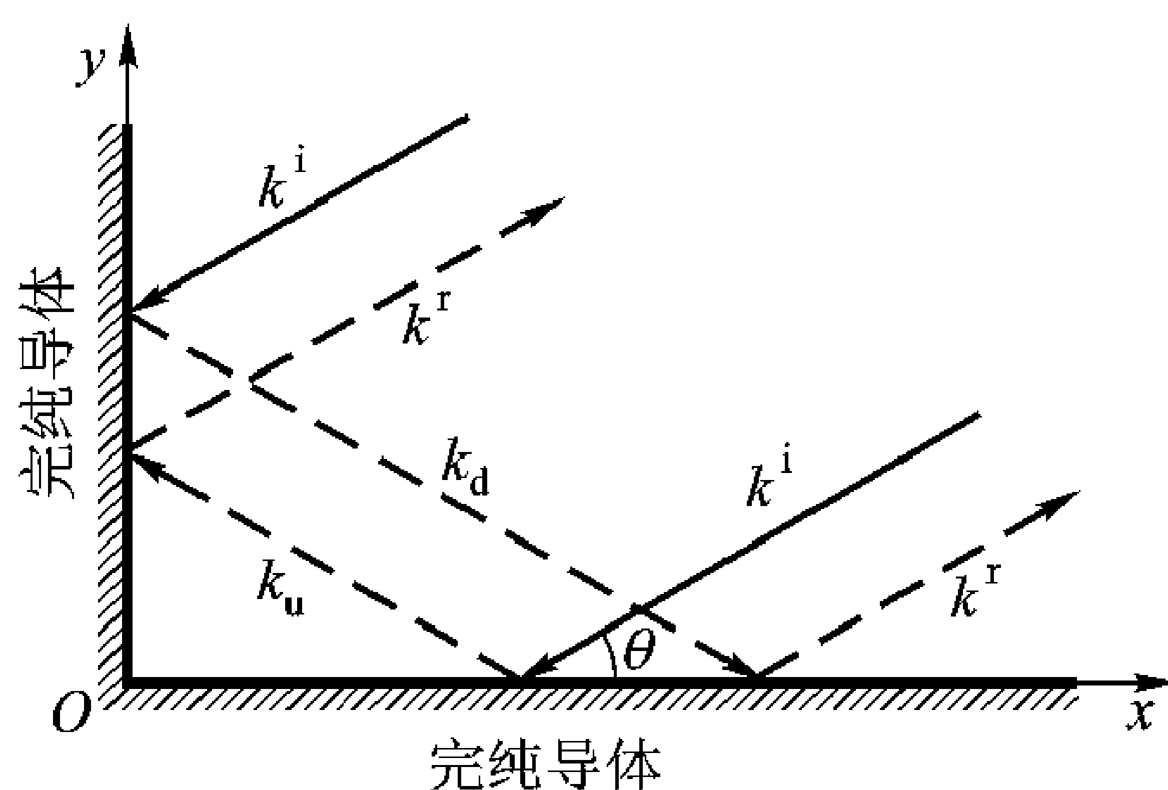
5.18 光从空气以 $\theta=30°$角投射到厚度为 l 的薄层介质，见题图 5.18。薄层介质的介电系数 $\varepsilon_g=2.25\varepsilon_0$，请给出 x 方向等效传输线模型(给出级连传输线的特征参数)，并用传输线模型求反射系数、透射系数及沿 z 轴场分布，设 $l=0.65\lambda$。



题图 5.18

5.19 在玻璃基片上涂复多层介质膜，试从原理上说明，只要适当选择每层膜的厚度及膜材的介电系数，该多层膜系统既可制作成增透膜($\Gamma\to 0$)，也可作成全反射膜($\Gamma\to 1$)。你能设计这样的多层膜系统吗？如果能，谈谈你的设计思想。

5.20 如题图 5.20 所示，两彼此垂直导电板组成直角导体系统，均匀平面波 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{z}_0E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(kx\cos\theta+ky\sin\theta)}$ 以 θ 角投射到该系统，证明总的电场 $\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{z}_0 4E_0\sin(kx\cos\theta)\sin(ky\sin\theta)$。



题图 5.20

第6章　波　　导

导引电磁波的结构叫波导，它用来定向传播电磁波。以平行双导体为结构特征的波导——平行双导线、同轴线、微带线已在第2章简要讨论过，它们工作于TEM模。由于辐射损耗等原因，平行双导线的工作频率到几百兆就很高了，同轴线虽然在毫米波段也能工作，但因损耗大、尺寸小、加工精度高，在毫米波段很少应用，主要用于厘米波段以及厘米波段以下的频率范围。同轴线内导体附近电场较强，大功率应用时容易引起“击穿”，因此同轴线的大功率传输受到限制。微带线与平面集成电路工艺兼容，适用于器件与电路的互连，工作在毫米波段也有困难。

本章着重讨论3类波导。一类是柱形金属波导，包括矩形波导与圆波导，同轴线也属于柱形金属波导，本章不再深入讨论。矩形波导与圆波导适合于厘米波、毫米波段的大功率传输。另一类波导具有平面结构特征，可以用集成电路工艺加工，如平板介质波导与微带线。微带线本章不再讨论。平板介质波导在毫米波、亚毫米波、光波段都能工作，尤其可应用在集成光路中。最后一类是光纤，光纤损耗小，传输容量大，是信号远距离传输的最佳选择。本章6.1节概述各类波导共同的工作原理与特征参数；6.2、6.3节讨论柱形金属波导即矩形波导与圆波导；6.4节着重分析平面结构介质光波导；6.5、6.6节分别从射线光学与波动光学角度对光纤进行较深入的讨论。

6.1　概述

6.1.1　波导的基本特征

参看图6-1，工作于微波波段的矩形波导[图6-1(a)]、圆波导[图6-1(b)]，其横截面的尺寸一般在厘米量级，而工作于光波段的平板介质光波导[图6-1(c)]和光纤[图6-1(d)]的横截面尺寸在微米量级，两者相差3~4个数量级。但如果以波长来量度，它们在同一量级。从结构特征看，矩形波导、圆波导由金属材料围成封闭结构，而平板介质光波导、光纤则用介质材料构成，其结构是敞开的。它们看似差别很大，但从导引电磁波的角度看其横截面都可分为内部区域与外部区域两部分，波主要限制在内部区域传播。对于矩形波导、圆波导，被金属波导壁包围的部分就是内部区域，构成波导的金属壁就

是外部区域；平板介质光波导通常由基片、导模层及覆盖层三部分组成，覆盖层有时就是空气，光波主要限制在导模层（一般不到 1 μm）中传播，故也称为薄膜波导。导模层就是内部区域，覆盖层、基片就是外部区域。光纤主要由纤芯（单模光纤一般为 4 ~ 10 μm）与包层构成，纤芯是内部区域，包层就是外部区域，光线主要限制在纤芯中传播。

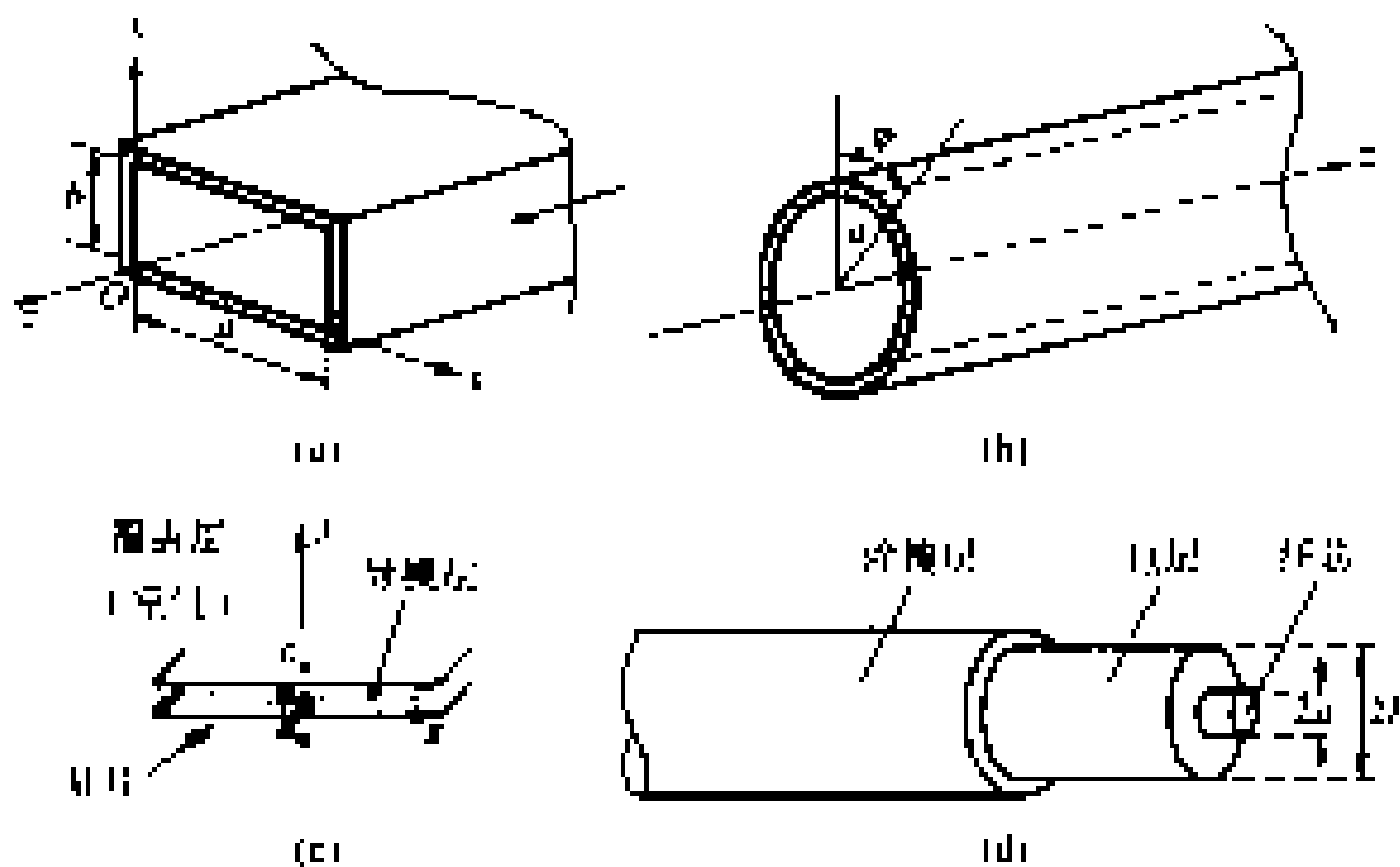


图 6 - 1　波导结构示例图

(a) 矩形波导　(b) 圆波导　(c) 平板介质光波导　(d) 光纤

电磁波沿矩形波导、圆波导、平板介质光波导、光纤中传播的基本过程是：内部区域传播的电磁波倾斜投射到内外区域的交界面发生全内反射，从而沿内部区域轴线曲折向前传播。各类波导波传播的具体物理过程将在以后有关章节中说明。

在内外区域交界面发生全内反射并不是电磁波限制在内部区域传播的充分条件，只有在内外区域交界面多次反射的波相位相同而不相互抵消时才能保证波沿内部区域无衰减传播。这就是说，内部区域波来回反射一次相移必须为 2π 的整倍数。所以在波导横截面内，内部区域的场按驻波分布，即场在横截面内发生谐振。这就是所谓的横向谐振原理。在以后分析各类波导色散特性时，横向谐振原理会反复应用到。

从上面的讨论可知，尽管各类波导在物理尺寸、材料、结构等方面有很大差别，但当它们用波长来量度时都处于同一量级，横截面内场都取驻波分布。因此我们将矩形波导、圆波导、平板介质光波导、光纤等组织在同一章中讨论。

6.1.2　波导的特征参数

从应用角度看，描述波导的特征参数主要有4个，即色散特性、特征阻抗、损耗与场分布。

色散特性表示波导纵向传播常数 k_z 与频率 ω 的关系，常用 $\omega-k_z$ 平面上的曲线表示。曲线上任一点与原点连线斜率 ω/k_z 表示波导工作于该点所对应频率点的相速 v_p，而切线斜率 $\frac{d\omega}{dk_z}$ 则表示工作于该点所对应频率点的群速 v_g。波导纵方向波长 $\lambda_z=\frac{2\pi}{k_z}$。色散特性也可表示为 $(k_z/k_0)^2$ 与 ω 或 λ 的关系，k_0 为自由空间波数。$(k_z/k_0)^2$ 定义为有效介电系数 ε_{eff}，它表示波沿波导纵向 z 传播的速度与介电系数为 ε_{eff} 的介质中光的传播速度相等。色散特性也可直接表示为相速 v_p 与角频率 ω 的关系，即 $v_p\sim\omega$。微波波段，色散特性习惯用 $k_z\sim\omega$ 表示，光波波段，色散特性习惯用 $\varepsilon_{eff}\sim\lambda$ 表示。

特征阻抗 Z 在幅值上反映波导横向电场与横向磁场之比。当不同的波导连接时，特征阻抗越接近，连接处的反射越小。所以不同波导连接时，波导的特征阻抗是量度连接处对电磁波反射大小的一个很有用的参量。特征阻抗 Z 与传播常数 k_z 有关，即

$$Z=\begin{cases}\omega\mu/k_z & \text{(TE 模)}\\ k_z/\omega\varepsilon_r\varepsilon_0 & \text{(TM 模)}\end{cases}$$

损耗是限制波导远距离传输电磁波的主要因素。目前光纤的损耗可以做到每公里0.2 dB以下。损耗的分析一般较难，本章不作专门讨论。

波导横截面内的场分布充分反映了波导的工作特性，以波导为基础的各类无源、有源器件的设计，波导中场分布的知识至关重要。满足波导横截面边界条件的一种可能的场分布叫做波导的模式，不同的模式有不同的场结构，它们都满足波导横截面的边界条件，可以独立存在。

波导中的场结构可以分为两大类，一类电场没有纵向分量，叫TE模，另一类磁场没有纵向分量，叫做TM模。

如果只对电磁波的远距离(相对于波长)传输感兴趣，并不十分关心场在波导横截面内的分布，那么最迫切要了解的是波导的色散特性。因为色散特性知道了，特征阻抗也就确定了。所以本章对波导问题的分析，对于色散特性给予较多的关注。

6.2　矩形波导

在深入分析矩形波导问题之前，从物理概念理解矩形波导为什么能导引电

磁波对于学好本章是十分有益的。一种理解是把矩形波导管看成平行双导线并联上无限多 $\lambda/4$ 短路线而成，如图 6－2。因为 $\lambda/4$ 短路线的输入阻抗为无穷大，平行双导线上并联一个无穷大的阻抗对双导线上波的传播没有影响，无限多 $\lambda/4$ 短路线的并联就形成封闭结构——中空的金属波导。但是中空的金属波导与平行双导线还是有本质的差别。中空的金属波导管场只局域于金属波导管内，而平行双导线场在横截面并不局限在某一区域。

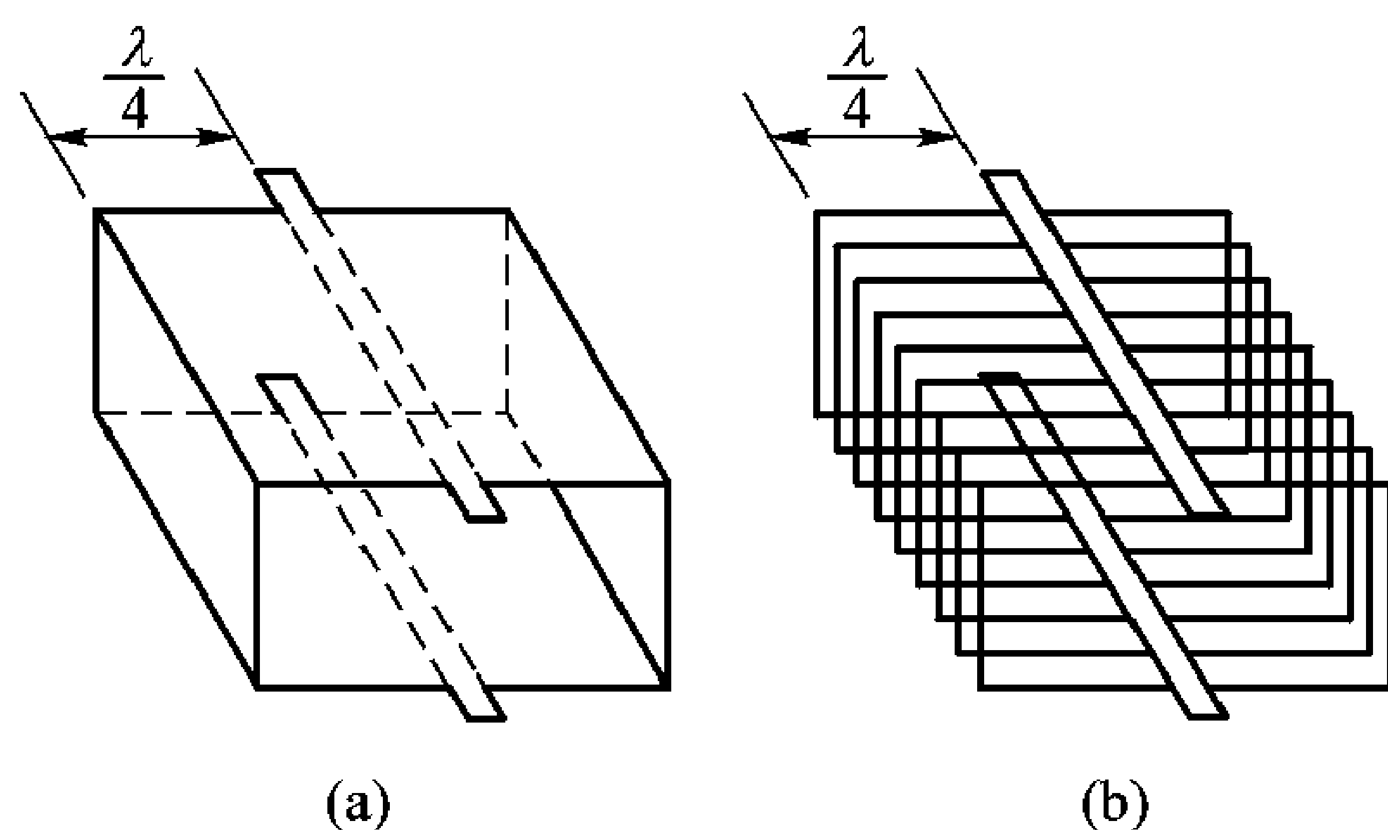


图 6－2 从平行双导线发展到矩形波导

(a) 矩形波导 (b) 矩形波导可看成平行双导线与无限多 $\lambda/4$ 短路线的并联

对矩形波导的研究，不仅因为矩形波导有实用价值，还在于对矩形波导分析得出的概念、结论对于理解其他各类波导非常有益。因为矩形波导边界条件规则可以得到解析解，有关波导的各种概念可以得到清晰的解释。

6.2.1 矩形波导的传输线模型

本节分析的矩形波导见图 6－3 (a)，其截面为矩形，宽边长度为 a，窄边长度为 b。图 6－3 (b)是其 z 方向传输线模型。要确定的是表示矩形波导横截面场分布的模式函数，$\boldsymbol{e}$ ($\boldsymbol{\rho}$)或 $\boldsymbol{h}$ ($\boldsymbol{\rho}$)，以及等效传输线的传播常数 k_z 及特征阻抗 Z。

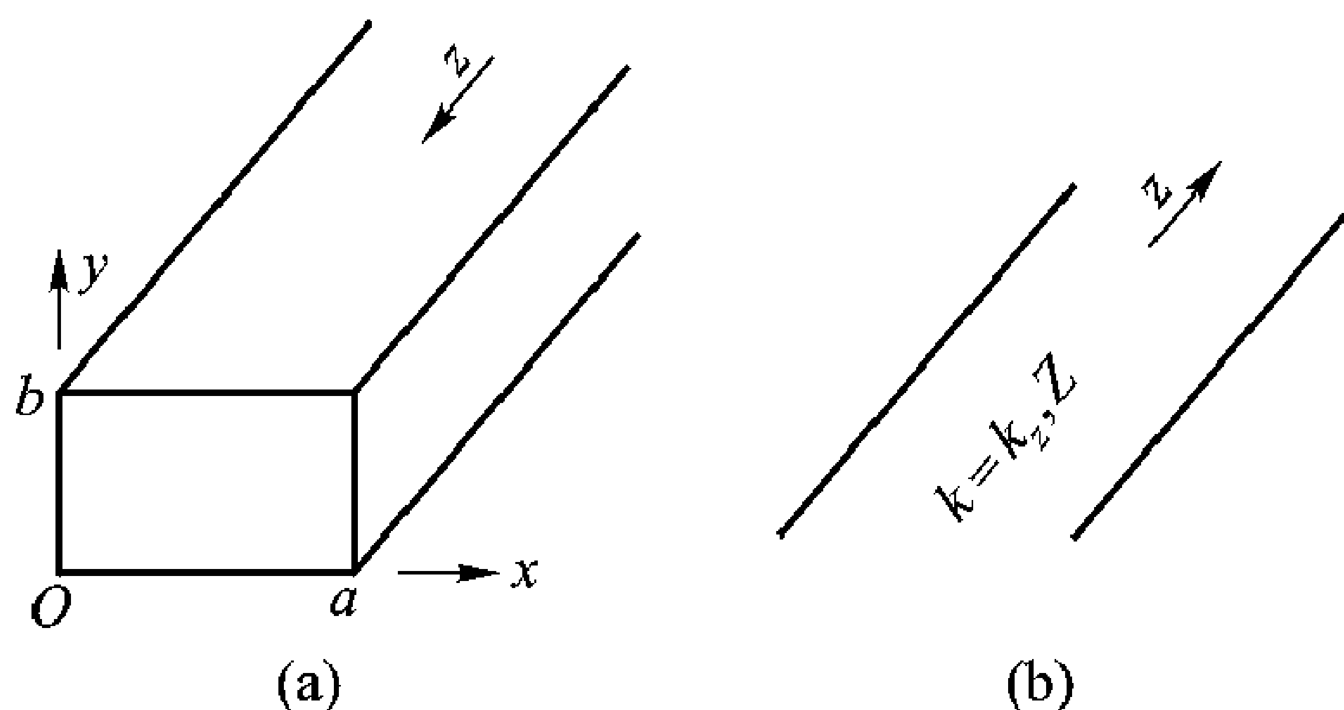


图 6－3 矩形波导及其传输线模型

(a) 矩形波导 (b) 传输线模型

6.2.2 模式函数与场分布

根据波导的传输线模型，可以将矩形波导中的场按 TE、TM 模分解，再将场量分解为横向场量与纵向场量，并用横向场量表示纵向场量，横向场量又表示成模式函数与其幅值(模式电压或模式电流)的乘积，见表 6－

1。表中场量下标 t 表示横向场量。

表 6 – 1

TE 模	TM 模
$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E}'_t$	$\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}''_t + \boldsymbol{E}''_z \boldsymbol{z}_0$
$\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}'_t + \boldsymbol{H}'_z \boldsymbol{z}_0$	$\boldsymbol{H}'' = \boldsymbol{H}''_t$
$\boldsymbol{E}'_t = \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) V'(z)$	$\boldsymbol{E}''_t = \boldsymbol{e}''(\boldsymbol{\rho}) V''(z)$
$\boldsymbol{H}'_t = \boldsymbol{h}'(\boldsymbol{\rho}) I'(z)$	$\boldsymbol{H}''_t = \boldsymbol{h}''(\boldsymbol{\rho}) I''(z)$
$\boldsymbol{H}'_z = \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu} \nabla_t \times \boldsymbol{E}'_t$	$\boldsymbol{E}''_z = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} \nabla_t \times \boldsymbol{H}''_t$

由表 6 – 1 可见，波导横截面内场分布决定于模式函 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\rho})$或 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\rho})$，纵向的场分布由模式函数的幅值 $V(z)$、$I(z)$决定。模式函数满足二维矢量波方程，模式函数幅值满足传输线方程，并重写如下：

$$(\nabla_t^2 + k_t^2)\begin{cases}\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) \\ \boldsymbol{h}''(\boldsymbol{\rho})\end{cases} = 0 \tag{6.2.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Z I(z) \tag{6.2.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Y V(z) \tag{6.2.3}$$

式中

$$k_t^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon \tag{6.2.4}$$

$$Z = \frac{1}{Y} = \begin{cases}\omega\mu / k_z & (\text{TE 模}) \\ k_z / \omega\varepsilon & (\text{TM 模})\end{cases} \tag{6.2.5}$$

注意，模式函数幅值 V、I 满足的传输线方程，对于 TE、TM 模形式上虽然一样，但传输线的特征阻抗 Z（或特征导纳 Y）是不一样的。

传输线方程的解已在第 2 章详细研究过，主要是解二维矢量波方程(6.2.1)。对于无界均匀介质，我们在第 4 章已用分离变量法得出三维矢量波方程的平面波解。下面结合矩形波导的具体边界条件求解。我们先研究 TE 模。

在直角坐标系下，TE 模模式函数 $\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{e}'(x, y)$可分解为

$$\boldsymbol{e}'(x, y) = e'_x(x, y)\boldsymbol{x}_0 + e'_y(x, y)\boldsymbol{y}_0 \tag{6.2.6}$$

e'_x、e'_y 则分别满足二维标量波方程

$$(\nabla_t^2 + k'^2_t) e'_x(x, y) = 0 \tag{6.2.7}$$

$$(\nabla_t^2 + k'^2_t) e'_y(x, y) = 0 \tag{6.2.8}$$

波方程(6.2.7)可用分离变量法求解。令

$$e'_x(x,y)=\varphi_x(x)\varphi_y(y) \tag{6.2.9}$$

将式(6.2.9)代入式(6.2.7)得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+k'^2_x\right)\varphi_x(x)=0 \tag{6.2.10a}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}+k'^2_y\right)\varphi_y(y)=0 \tag{6.2.10b}$$

其中

$$k'^2_x+k'^2_y=k'^2_t \tag{6.2.11a}$$

而

$$k'^2_t+k'^2_z=k^2 \tag{6.2.11b}$$

$\varphi_x(x)$、$\varphi_y(y)$的一般解为

$$\varphi_x(x)=A_1\sin(k'_x x+\varphi_1)$$

$$\varphi_y(y)=A_2\sin(k'_y y+\varphi_2)$$

将上两式代入式(6.2.9)，得到

$$e'_x(x,y)=A\sin(k'_x x+\varphi_1)\sin(k'_y y+\varphi_2) \tag{6.2.12}$$

利用式(4.6.43)，可得 e'_x、e'_y 满足的关系

$$\nabla_t\cdot\boldsymbol{e}'=\frac{\partial}{\partial x}e'_x+\frac{\partial}{\partial y}e'y=0$$

将式(6.2.12)代入上式，得到

$$e'_y(x,y)=\frac{Ak'_x}{k'_y}\cos(k'_x x+\varphi_1)\cos(k'_y y+\varphi_2) \tag{6.2.13}$$

如果假定构成波导壁的金属为完纯导体，那么根据矩形波导横截面的边界条件[见图6－3(a)]

$$e'_x(x,y)=0 \qquad (\text{当 } y=0, b \text{ 时})$$

$$e'_y(x,y)=0 \qquad (\text{当 } x=0, a \text{ 时})$$

可确定待定常数 φ_1、φ_2 及 k'_x、k'_y 为

$$\varphi_1=\pi/2$$

$$\varphi_2=0$$

$$k'_x=m\pi/a \tag{6.2.14}$$

$$k'_y=n\pi/b \tag{6.2.15}$$

式中 m，n 为0，1，2，…，但 m，n 不能同时为零，否则所有场量均为零。将式(6.2.12)、(6.2.13)同乘 k'_y，于是得到模式函数 e'_x、e'_y 为

$$e'_x(x,y)=A_{mn}\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \tag{6.2.16}$$

$$e'_y(x,y) = -A_{mn}\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y \tag{6.2.17}$$

由式(4.6.50)得到

$$h'_x(x,y) = -e'_y = A_{mn}\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y \tag{6.2.18}$$

$$h'_y(x,y) = e'_x = A_{mn}\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \tag{6.2.19}$$

不同的一组数(m,n)表示模式函数满足矩形波导横向边界条件的一组解，矩形波导横截面内一种可能存在的场分布，称为场分布的一种模式，并用 m、n 标记。对于 TE 模，第(m,n)模式函数幅值 $V_{mn}(z)$、$I_{mn}(z)$满足传输线方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}V_{mn}}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_{zmn}Z_{mn}I_{mn} & (6.2.20)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}I_{mn}}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_{zmn}Y_{mn}V_{mn} & (6.2.21)\end{cases}$$

式中

$$Z_{mn} = \frac{1}{Y_{mn}} = \frac{\omega\mu}{k_{zmn}}$$

由式(6.2.11)、(6.2.14)、(6.2.15)得到

$$k_{zmn} = \sqrt{k^2 - k_t^2} = \sqrt{k^2 - k_{xm}^2 - k_{yn}^2} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{6.2.22}$$

所以，对于特定的某一模式，就可用特定参数 k_{zmn}、Z_{mn}的传输线等效。如果矩形波导中有无限多个模式传播，就要用无限多对不同参数的传输线等效。式(6.2.22)就是矩形波导的色散关系，以后会进一步讨论。

$V_{mn}(z)$、$I_{mn}(z)$的具体解，由纵向边界条件确定，如果波导纵向趋于无穷远，其解为

$$V_{mn}(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{zmn}z} \tag{6.2.23}$$

$$I_{mn}(z) = Y_{mn}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{zmn}z} \tag{6.2.24}$$

根据表 6-1，TE 模横向场量 $\boldsymbol{E}'_t$、$\boldsymbol{H}'_t$ 为模式函数与其幅值电压、电流的乘积。而纵向场量 H'_z 又可用横向场量表示，将以前省略的时间因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$写进去，于是得到 TE 模的场量表达式。前已指出，不同的 m，n 表示 TE 模的一组解，称为 TE 模的一种模式，记为 TE_{mn}。由线性微分方程理论可知，E'_{xmn}、E'_{ymn}、H'_{xmn}、H'_{ymn}、H'_{zmn}是其解，它们的线性组合也是其解，故实际矩形波导 TE 模的场可表示为

$$E'_x = \sum_{m,n} A_{mn}\frac{n\pi}{b}\cos\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.25}$$

$$E'_y = \sum_{m,n} -A_{mn}\frac{m\pi}{a}\sin\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.26}$$

$$E'_z = 0 \tag{6.2.27}$$

$$H'_x = \sum_{m,n} A_{mn} \frac{k_z}{\omega\mu} \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.28}$$

$$H'_y = \sum_{m,n} A_{mn} \frac{k_z}{\omega\mu} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.29}$$

$$H'_z = \sum_{m,n} -\mathrm{j} A_{mn} \frac{\pi^2}{\omega\mu} \left[\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2} \right] \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.30}$$

对于 TM 模,也可进行类似的分析,有关导出过程留给读者作为练习,其场量表达式如下:

$$E_x'' = \sum_{m,n} -B_{mn} \frac{k_z}{\omega\varepsilon} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.31}$$

$$E_y'' = \sum_{m,n} -B_{mn} \frac{k_z}{\omega\varepsilon} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.32}$$

$$E_z'' = \sum_{m,n} B_{mn} \frac{\pi^2}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} \left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{m^2}{a^2} \right) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.33}$$

$$H_x'' = \sum_{m,n} B_{mn} \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.34}$$

$$H_y'' = \sum_{m,n} -B_{mn} \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.35}$$

$$H_z'' = 0 \tag{6.2.36}$$

由式(6.2.25)~(6.2.36)可见,式中 m 表示场沿宽边 x 方向变化的半波数,n 表示沿窄边 y 方向变化的半波数,同时还应注意到,对于 TE_{mn}模,下标 m、n 中有一个可以为零,而对于 TM_{mn}模,下标 m、n 不能为零,否则所有场量均为零,这是与 TE_{mn}模不同的地方。

由式(6.2.25)~(6.2.36)可见,不管是 TE 模还是 TM 模,E_y 与 H_x,E_x 与 H_y 空间分布规律是一样的,但 E_y 与 H_x 相差一负号,因为 $\boldsymbol{y}_0 E_y$ 与 $\boldsymbol{x}_0 H_x$ 的叉积表示的功率流在 $-z$ 方向,而实际功率流在 $+z$ 方向。E_y 与 H_x 差一负号保证纵向功率流在 $+z$ 方向。E_y/H_x 与 E_x/H_y 都为特征阻抗 Z。对于 TE 模,有 $Z=\omega\mu/k_z$,对于 TM 模,有 $Z=k_z/\omega\varepsilon$。E_x 与 E_y 在横截面内分布,如果 E_x 取正弦分布,E_y 一定取余弦分布。反之,如果 E_x 取余弦分布,E_y 则取正弦分布。H_x 与 H_y 在横截面内的分布也有这种关系。掌握了这些规律,对我们理解与记忆矩形波导中场分量表达式很有帮助。

矩形波导中场分布最简单的是 $m=1$、$n=0$ 的 TE_{10}模。将 $m=1$,$n=0$ 代入 TE 模场量表达式(6.2.25)~(6.2.30)即可得到 TE_{10}模场量表达式,它只有 3 个场分量,即 E_y、H_x 和 H_z,并有

$$E_y = -A_{10} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.37}$$

$$H_x = A_{10} \frac{k_z}{\omega\mu} \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi}{a} x \ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.38}$$

$$H_z = -\mathrm{j}A_{10}\frac{1}{\omega\mu}\frac{\pi^2}{a^2}\cos\frac{\pi}{a}x\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.2.39}$$

$$E_x = E_z = H_y = 0 \tag{6.2.40}$$

且场在 y 方向没有变化。

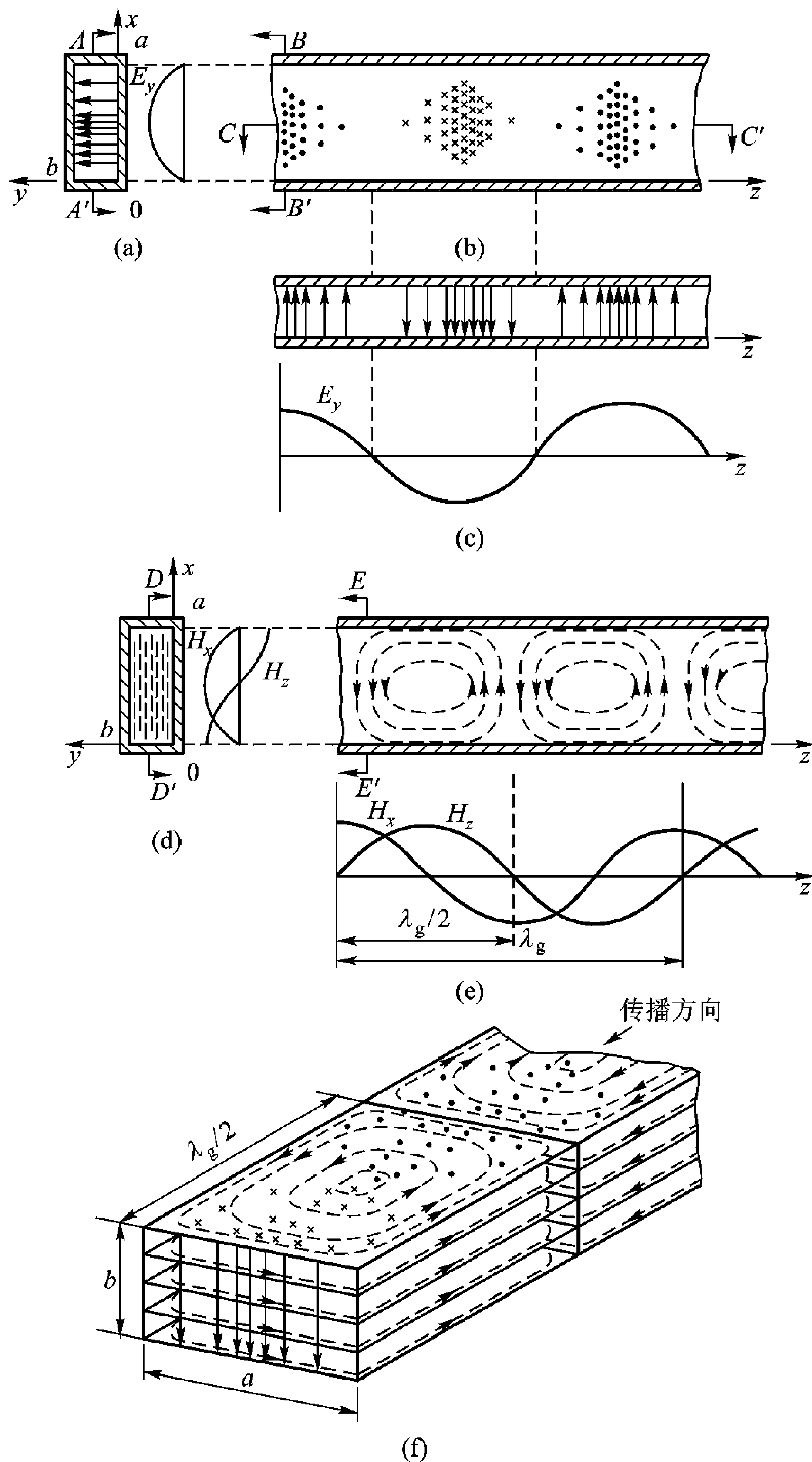


图 6-4 矩形波导中 TE_{10} 模场分布

(a)、(b)、(c)电场分布 (d)、(e)磁场分布

(f)电磁场分布的三维图

所以无论从前面导出的矩形波导的模式函数表达式(6.2.16)~(6.2.19)还是场量表达式(6.2.25)~(6.2.36)，区分场量在横截面分布特征的主要是三角函数宗量中的正整数 m、n。不同的一组数(m,n)就表示不同结构的场，所以矩形波导中可以存在的电磁模式有 TE_{01}、TE_{02}、…，TE_{10}、TE_{20}、…，TE_{11}、TE_{12}、TE_{22}、TE_{23}、…，TM_{11}、TM_{12}、TM_{21}、TM_{22}、…。这无穷多个模式中的任何一个都满足矩形波导的边界条件，它们都可以独立存在。实际波导中究竟存在多少模式电磁场，对于纵向均匀的波导，取决于工作频率在各模式截止频率以上还是以下(截止频率概念在后面讨论)以及波导的激励方式。如果波导纵向有不均匀性，就会激励起无穷多个模式，使得众多个模式场的叠加满足不均匀处的边界条件。

对于矩形波导中应用最广的 TE_{10}模，其场结构见图 6-4。TE_{10}模电场只有 E_y 分量，它沿 x 方向是正弦变化，在宽边有半个驻波分布，在 $x=0$ 和 a 处为零，在 $x=a/2$ 处最大，如图 6-4 (a)和 6-4 (b)所示。E_y 沿 z 按正弦变化，如图 6-4 (c)所示。

TE_{10}模的磁场有 H_x 和 H_z 两个分量。H_x 沿宽边呈正弦分布，有半个驻波分布，即在 $x=0$ 和 a 处为零，在 $x=a/2$ 处最大；H_z 沿宽边呈余弦分布，在 $x=0$ 和 a 处最大，在 $x=a/2$ 处为零，如图 6-4 (d)。H_x 沿 z 方向按正弦变化，H_z 沿 z 方向按余弦变化。H_x 与 H_z 在 xz 平面内合成闭合曲线，类似椭圆形状，如图 6-4 (e)所示。E_y 和 H_x 沿 z 方向同相，它们与 H_z 沿 z 方向则有 90°相位差。这是传输模的特点。

图 6-4 (f)表示 TE_{10}模的完整场结构图。

例 6-1 工作于 TE_{10}模的矩形波导中磁场分布如图 6-5，当波沿正 z 方向传播时，在 AA'位置由 A 向 A'看时与在 BB'位置由 B 向 B'看时磁场末端点运动轨迹有什么不同。试进行具体说明。

解： 当波沿 $+z$ 方向传播时，在 AA'位置，由 A 向 A'看时为右旋极化波。在 BB'位置，由 B 向 B'看时为左旋极化波。

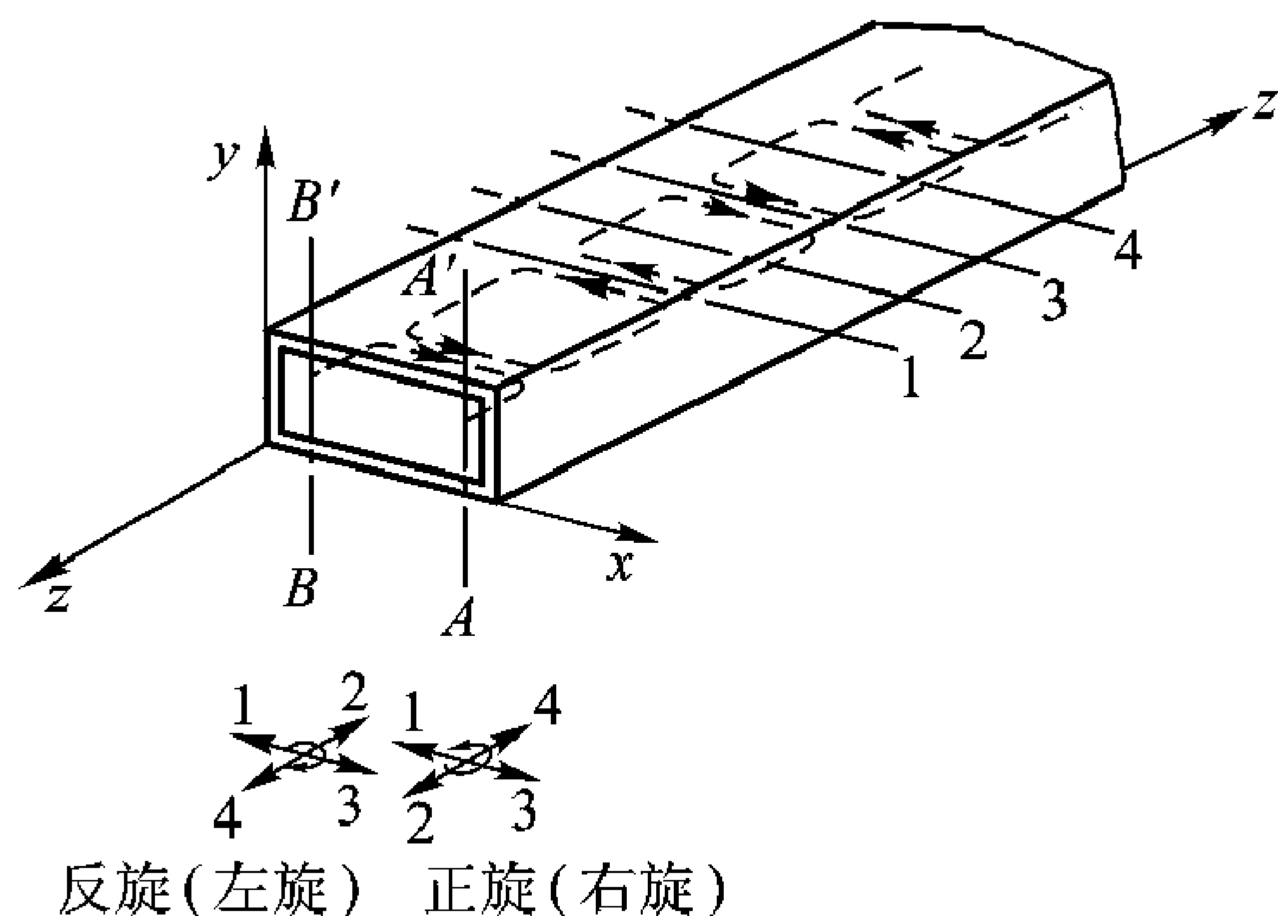


图 6-5 矩形波导中 TE_{10}模的圆极化现象

6.2.3 色散特性

截止频率 f_c 与截止波长 λ_c

由色散方程(6.2.22)可知，对于尺寸一定的波导和一定的模式，即当矩形

波导宽边尺寸 a，窄边尺寸 b 以及模式序号 m、n 一定时，横向传播常数 $k_t=\sqrt{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}$ 为一常数，而波数平方 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$ 取决于频率的高低。这样，当 ω 由小变大时，将出现3种情况：

(1) $k_t^2>\omega^2\mu\varepsilon$，$k_z$ 为虚数，则传播因子 $e^{-jk_z z}$ 成了衰减因子，说明波不能传播；

(2) $k_t^2<\omega^2\mu\varepsilon$，$k_z$ 为实数，波可以传播；

(3) $k_t^2=\omega^2\mu\varepsilon$，$k_z=0$，这是波导中波能否传播的临界状态。这时沿 z 方向没有波的传播，只是在横截面内振荡，沿 z 方向波的振幅和相位均不变。

由 $k_t^2=\omega^2\mu\varepsilon$ 决定的频率称为截止频率(或临界频率)，用 f_c 表示；相应的波长称为截止波长(或临界波长)，用 λ_c 表示。于是有关系

$$k_t^2=\omega_c^2\mu\varepsilon$$

由此求得截止频率为

$$f_c=\frac{k_t}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}=\frac{k_t}{2\pi}v \tag{6.2.41}$$

式中 v 为介质(ε、μ)中的光速，相应的截止波长则为

$$\lambda_c=v/f_c=2\pi/k_t \tag{6.2.42}$$

对于矩形波导中 TE_{mn} 和 TM_{mn} 模，将 $k_t=\sqrt{(m\pi/a)^2+(n\pi/b)^2}$ 代入，得到截止波长为

$$\lambda_c=\frac{2}{\sqrt{(m/a)^2+(n/b)^2}} \tag{6.2.43}$$

截止波长或截止频率是波导最重要的特性之一。由上面的分析可知，只有 $\omega^2\mu\varepsilon>k_t^2$ 时电磁波才能在波导中传播；对一定的波导和模式，k_t 是常数，因此只有 $\lambda<\lambda_c$ (或 $f>f_c$)的波才能在波导中传播。所以矩形波导具有“高通滤波器”的性质。

对于 $a=2b$ 的矩形波导，可以得到如图6-6所示截止波长分布图。由图可见，当 $a<\lambda<2a$ 时，波导中只能传播 TE_{10} 模，可以做到单模工作。

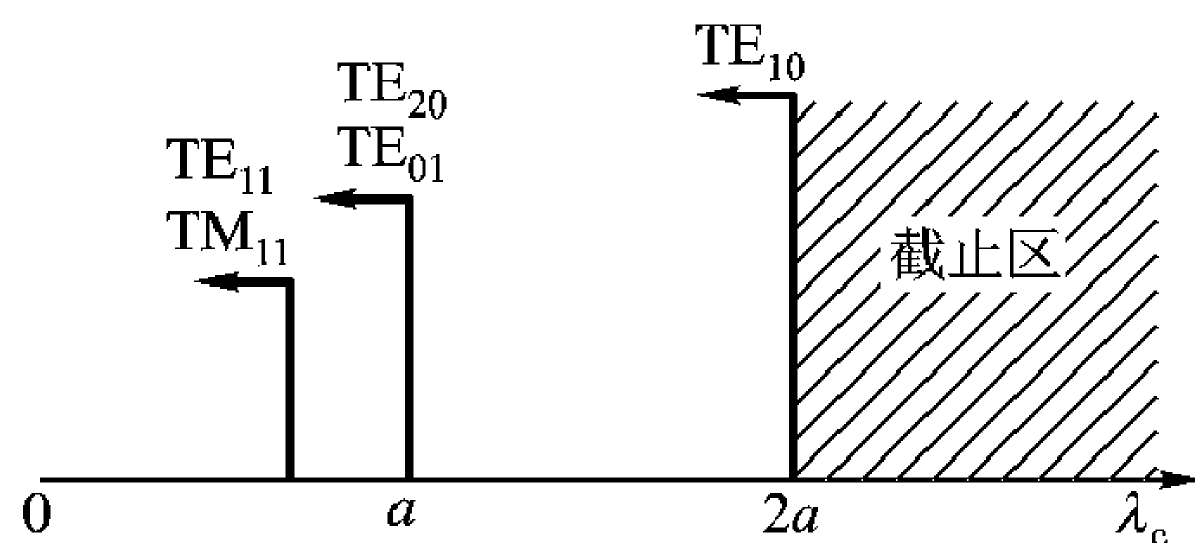


图6-6　$a=2b$ 矩形波导的截止波长分布图

波导中不同模具有相同的截止波长(或截止频率)的现象，称为波导模式的“简并”，在矩形波导中，除 TE_{m0} 模和 TE_{0n} 模以外的模都有简并，即 TE_{mn} 模和 TM_{mn} 模(m、$n\neq0$)是简并的。

波导中截止波长最长(或截止频率最低)的模称为波导的最低型模(或称主

模、基模)，其他的模称为高次模。矩形波导中的主模是 TE_{10}模(如果 $a>b$)，其截止波长最长，等于 $2a$。

例 6-2 工作于 x 波段的矩形波导宽边 $a=23$ mm，窄边 $b=10$ mm，求该波导单模工作的波长范围或频率范围。

解：根据截止波长决定波导单模工作的条件，对于宽边 $a=23$ mm，窄边 $b=10$ mm 的矩形波导，TE_{10}、TE_{01}、TE_{20}模的截止波长分别为

$$\lambda_{cTE_{10}}=2a=46\text{ mm},\quad \lambda_{cTE_{01}}=2b=20\text{ mm},\quad \lambda_{cTE_{20}}=a=23\text{ mm}$$

所以该矩形波导单模工作的波长范围为 $23\text{ mm}<\lambda<46\text{ mm}$，如用频率表示时则为 $6.52\text{ GHz}<f<13.05\text{ GHz}$。

色散特性曲线

高于截止频率时，由式(6.2.22)表示的色散关系对于 TE_{m0}模在(ω/ω_{10}、k_z/k_0)平面上的曲线示于图 6-7。纵坐标 ω 用 ω_{10} 归一化，ω_{10}是 TE_{10}模的截止角频率，横坐标 k_z 用 k_0 归一化，k_0 为自由空间波数。图 6-7 表明，不管什么模式，愈接近截止频率色散愈严重。

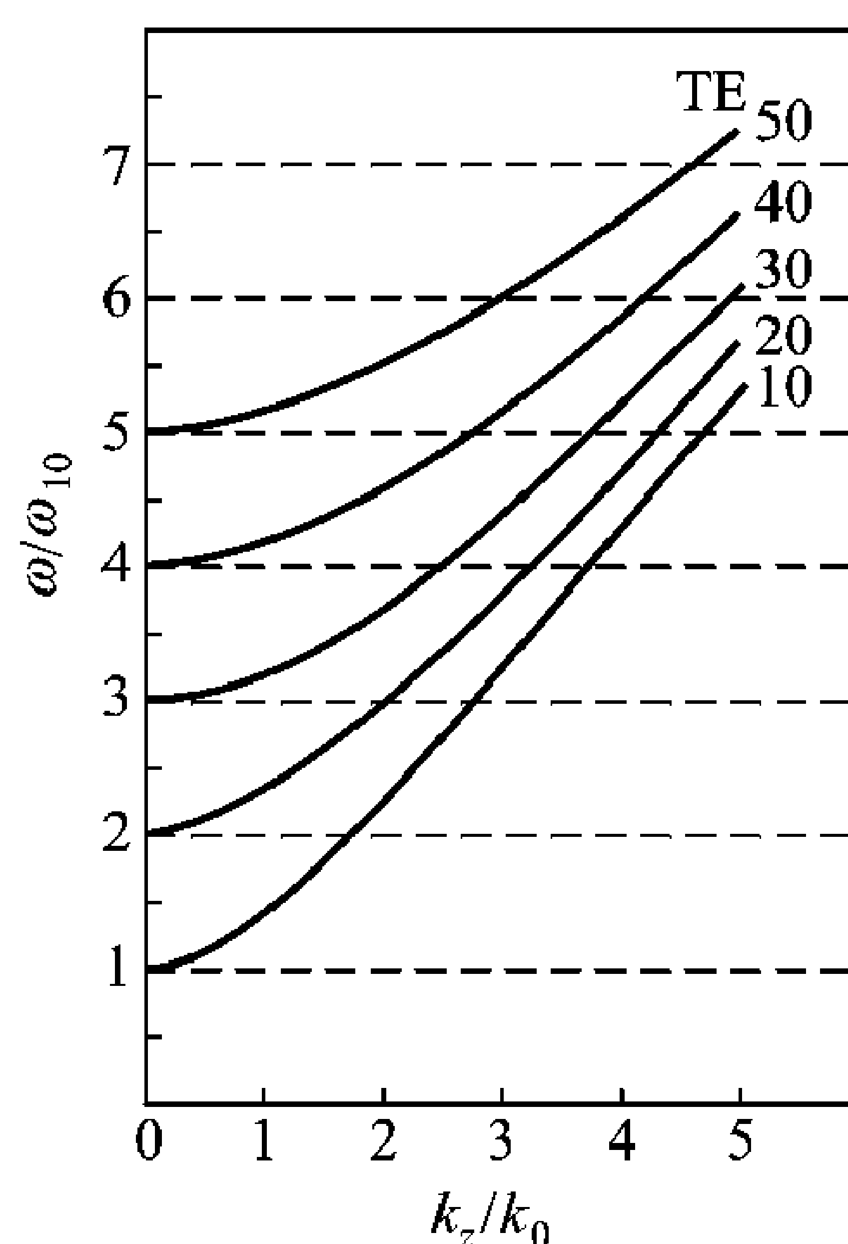


图 6-7 矩形波导色散特性

式(6.2.22)表示的色散关系称为波导色散，而由于填充介质所引起的色散称为材料色散，在微波频率，材料色散一般不是主要的。

相速度和群速度

波导中波的相速度是指传输模等相位面沿波导轴向移动的速度。由相速度一般公式

$$v_p=\omega/k_z$$

以及 k_z 满足的关系

$$k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon-k_t^2$$

可得

$$\frac{k_z^2}{\omega^2}=\mu\varepsilon-\frac{k_t^2}{\omega^2}=\frac{\lambda_c^2-\lambda^2}{\lambda_c^2v^2}=\frac{1-(\lambda/\lambda_c)^2}{v^2}$$

于是得到波导中传输模的相速度

$$v_p=\frac{v}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}} \tag{6.2.44}$$

式中，v 和 λ 分别为介质中的光速和波长。由此可见，波导中传输模的相速度

大于同一介质中的光速。

矩形波导传输 TE_{10}模时

$$v_{pTE_{10}} = \frac{v}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}} \tag{6.2.45}$$

群速度是指由许多频率组成的波群的速度，或者说是波包的速度，其一般公式为

$$v_g = d\omega/dk_z$$

由关系 $k_z = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - k_t^2}$，则得

$$v_g = v\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2} \tag{6.2.46}$$

由此可见，波导中传输模的群速度小于同一介质中的光速。

矩形波导传输 TE_{10}模的群速度为

$$v_{gTE_{10}} = v\sqrt{1-(\lambda/2a)^2} \tag{6.2.47}$$

由式(6.2.44)、(6.2.46)可见，波导中传输模的相速度和群速度有关系

$$v_p \cdot v_g = v^2 \tag{6.2.48}$$

波导波长

波导中某传输模相邻两等相位面之间的轴向距离(或说相角差为 360°的两个相平面之间的距离)称为该模的波导波长或相波长，以 λ_g 表示之。它与相速度 v_p 的关系是

$$\lambda_g = v_p/f \tag{6.2.49}$$

式中 f 是信号的振荡频率。以式(6.2.44)代入，得到

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_c)^2}} \tag{6.2.50}$$

式(6.2.50)即表示波导中传输模的波导波长 λ_g、截止波长 λ_c 与介质中的波长 λ 三者之间的重要关系。

矩形波导中 TE_{10}模的波导波长为

$$\lambda_{gTE_{10}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}} \tag{6.2.51}$$

由式(6.2.44)以及 $v_p = \omega/k_z$ 可得到波导波长与传输模的纵向传播常数 k_z 的关系为

$$\lambda_g = 2\pi/k_z \tag{6.2.52}$$

例 6-3 工作于 x 波段的矩形波导宽边 $a = 23$ mm，窄边 $b = 10$ mm，求工作波长 $\lambda = 3.2$ cm 时 TE_{10}模的波导波长 λ_g。

解： 对于 $a = 23$ mm，$b = 10$ mm 矩形波导，截止波长 $\lambda_{cTE_{10}} = 2a = 46$ mm，

当 TE_{10}模的工作波长 $\lambda = 3.2$ cm 时，$\lambda_{gTE_{10}} = 32/\sqrt{1-(32/46)^2} = 44.54$ mm，比自由空间波长来得大。

6.2.4 特征阻抗与等效阻抗

根据第 4 章对波导等效传输线特征阻抗的解释，矩形波导 TE、TM 模的特征阻抗反映了入射波场横向电场与横向磁场间的关系。对于 TE 模，特征阻抗为

$$Z_{TE} = \omega\mu / k_z$$

对于 TM 模，有

$$Z_{TM} = k_z / \omega\varepsilon$$

利用式(6.2.52)可得

$$Z_{TE} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\lambda_g}{\lambda} = \eta\frac{\lambda_g}{\lambda} \tag{6.2.53}$$

$$Z_{TM} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\lambda}{\lambda_g} = \eta\frac{\lambda}{\lambda_g} \tag{6.2.54}$$

式中 $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ 是介质中的特征波阻抗。如果波导中的介质是空气，则 $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \doteq 377\ \Omega$，有

$$Z_{TE} = \eta_0\frac{\lambda_g}{\lambda_0}$$

$$Z_{TM} = \eta_0\frac{\lambda}{\lambda_g}$$

λ_0 是自由空间波长。

空气填充的矩形波导，对于 TE_{10}模特征阻抗为

$$Z_{TE_{10}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}} \tag{6.2.55}$$

注意，这里我们用 η 表示均匀介质中波阻抗 $\sqrt{\mu/\varepsilon}$，用 η_0 表示自由空间波阻抗 $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$。可见 TE_{10}模的特征阻抗与波导窄边尺寸 b 无关。因此，宽边尺寸 a 相同而窄边尺寸 b 不同的两个工作于 TE_{10}模的矩形波导特征阻抗相等。这两个波导连接时，在连接处必将产生波的反射而得不到匹配，所以波导的特征阻抗用来研究不同截面波导连接问题，对于 TE_{10}模并不有效。

为此，对于矩形波导 TE_{10}模引进等效阻抗的概念。有 3 种定义，一种按功率－电压定义，一种按功率－电流定义，还有一种按电压－电流定义，分别为

$$Z_{P\cdot V} = |V|^2/2P$$

$$Z_{P\cdot I}=2P/|I|^2$$

$$Z_{V\cdot I}=V/I$$

式中 P 为矩形波导工作于 TE_{10} 模的纵向功率流；V 定义为波导截面中心从底面到顶面电场的线积分；I 为顶面上总的纵向电流，即

$$V=\int_0^b E_y\big|_{x=\frac{a}{2}}\mathrm{d}y$$

$$I=\int_0^a H_x\mathrm{d}x=\int_0^a J_z\mathrm{d}x$$

将 TE_{10} 模有关场量代入 P、V 和 I 表达式，得到

$$(Z_{eTE_{10}})_{P\cdot V}=\frac{\pi}{2}\frac{b}{a}Z_{TE_{10}} \tag{6.2.56a}$$

$$(Z_{eTE_{10}})_{P\cdot I}=\frac{\pi^2}{8}\frac{b}{a}Z_{TE_{10}} \tag{6.2.56b}$$

$$(Z_{eTE_{10}})_{V\cdot I}=2\frac{b}{a}Z_{TE_{10}} \tag{6.2.56c}$$

三种方法定义的等效阻抗都与 b/a 有关，只是前面的系数有一些差别，实际计算时无关紧要，因为具体应用时阻抗(或导纳)都要归一化。故矩形波导 TE_{10} 模等效阻抗一般定义为

$$Z_{eTE_{10}}=\frac{b}{a}Z_{TE_{10}} \tag{6.2.57}$$

当研究工作于 TE_{10} 模的不同截面矩形波导级连而引起阻抗失配问题时，等效阻抗 $Z_{eTE_{10}}$ 比特征阻抗 $Z_{TE_{10}}$ 有用得多。

例 6－4 求图 6－8 所示矩形波导中膜片前的输入导纳，并借此证明图 6－8 (a)所示膜片为容性膜片，而图 6－8 (c)所示膜片为感性膜片。假设膜片厚度 $t \ll \lambda$。

解： 矩形波导[图 6－8(a)、(c)]中膜片可看成截面为 $a\times b'$ 或 $a'\times b$、长度为 t 的一小段波导，z 方向等效电路如图 6－8 (b)和(d)。在图 6－8 (a)中，$b'<b$，所以小段波导的等效阻抗 Z_e' 小于矩形波导等效阻抗 Z_e，即 $Z_e'<Z_e$。在 6－8 (c)中，$a'<a$，所以小段波导等效阻抗 Z_e' 大于矩形波导等效阻抗 Z_e，即 $Z'_e>Z_e$。由等效电路图 6－8 (b)可知，对于图 6－8 (a)，归一化负载 $z_L=Z_e/Z_e'>1$，在圆图实轴右半径上。因为 $t\ll\lambda$，所以 $k_{ze}t\ll 1$，利用圆图求 $z=0$ 处输入阻抗，从实轴右半径顺时针旋转 $t/\lambda\ll 1$，一定在阻抗圆图下半圆，故是容性的。对于 6－8 (d)，归一化负载 $z_L=Z_e/Z_e'<1$，在阻抗圆图实轴左半径。利用圆图求 $z=0$ 处输入阻抗，从实轴左半径顺时针旋转 $t/\lambda\ll 1$，一定在上半圆，故是感性的。

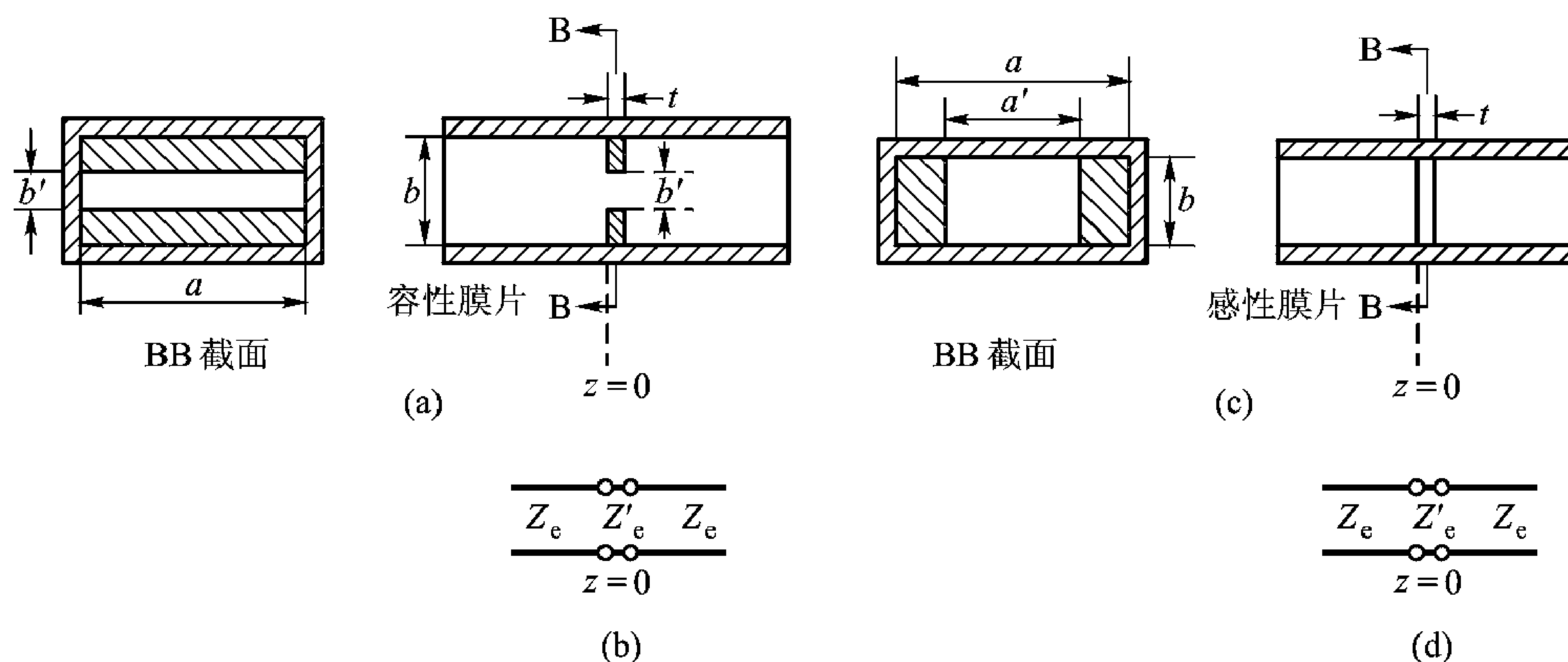


图 6-8 矩形波导中的膜片

(a)、(b)容性膜片及其等效电路 (c)、(d)感性膜片及其等效电路

谐振窗

如果把图 6-8 (a)和(c)的容性、感性膜片结合起来，如图 6-9，就构成谐振窗。它相当于并联 LC 回路。当波导传播电磁波工作频率与回路固有谐振频率相等，即 $\omega=1/\sqrt{LC}$，电磁波可无反射通过。这种谐振窗常用于大功率波导系统作充气用的密封窗，也用于微波电子器件中作为真空部分与非真空部分的隔离窗。窗口密封用材料可以是玻璃、聚四氟乙烯、陶瓷片等。

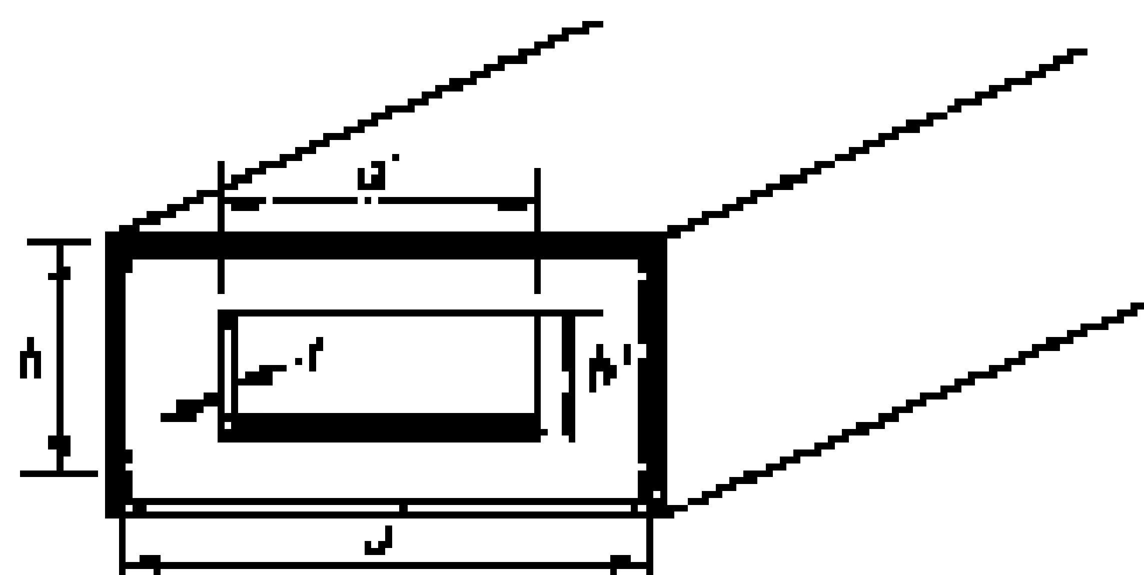


图 6-9 谐振窗

6.2.5 矩形波导管壁的电流

当波导中传输微波能量时，在金属波导内表面将产生感应电流，称之为管壁电流。在微波情况下，由于趋肤效应，这种管壁电流集中在波导内壁表面层内流动，其趋肤深度的典型数量级是 10^{-4}cm，所以这种管壁电流可以看成是面电流。

管壁电流的分布由管壁附近的磁场分布决定，即应满足关系

$$\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{H}_s \tag{6.2.58}$$

式中 $\boldsymbol{n}_0$ 是波导内壁的单位法向矢量，$\boldsymbol{H}_s$ 为管壁附近的切向磁场。将 TE_{10} 模管壁表面的切向磁场分量代入(6.2.58)即可得到 TE_{10}模的管壁电流分布，其

推导留作练习。具体分布见图6-10。

结果表明，当矩形波导传输TE_{10}模时，在左、右侧壁只有J_y分量电流，且大小相等，方向相同。在上、下宽壁内电流由J_x和J_z合成，在同一x位置的上下宽壁内的电流大小相等，方向相反。在波导宽边中心只有纵向电流。

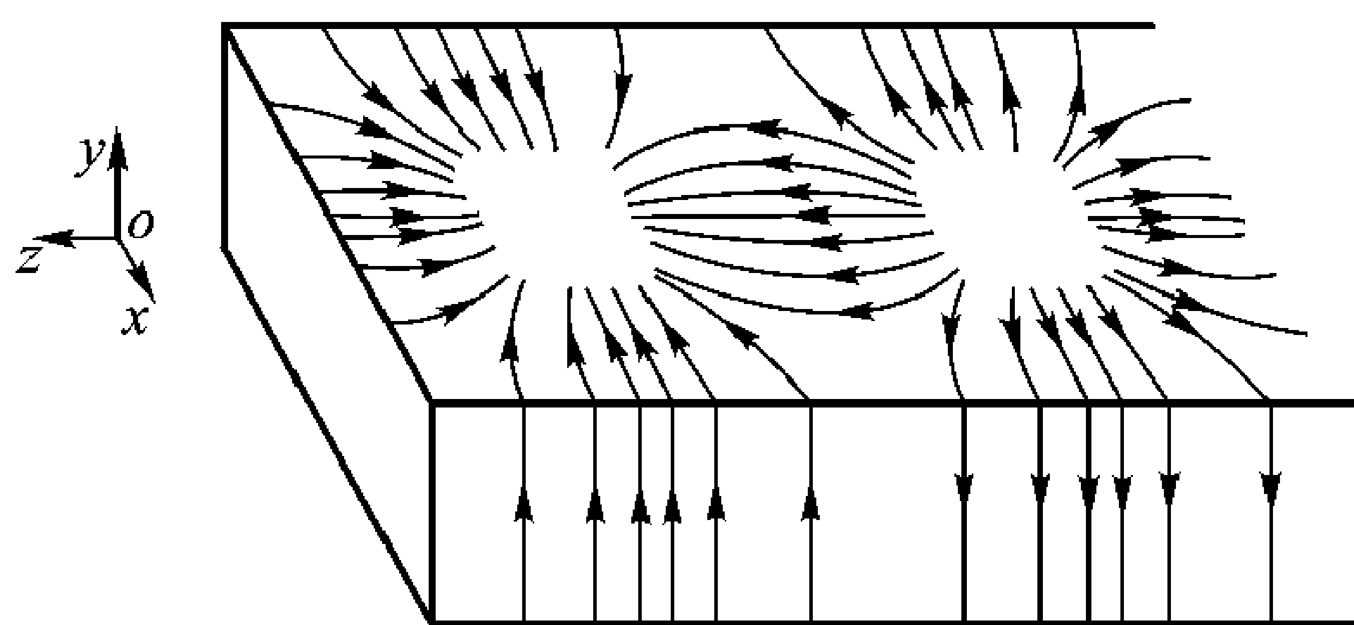


图6-10 TE_{10}模的管壁电流结构

对管壁电流分布进行了解有助于波导器件的设计，驻波测量线设计就是一例。

驻波测量线

驻波测量线用来检测波导中纵向场分布，图6-11所示的是工作于TE_{10}模的波导驻波测量线。

检测微波能量的探针实际上就是同轴线内导体的延伸，探针从波导宽边中间插入。波导宽边中间开纵向槽，以便探针沿波导纵向移动。波导宽边中间只有纵向电流，纵向开槽不会切断表面电流，对波导中场分布几乎没有什么扰动。探针检测到的微波能量经同轴检波器输出。同轴检波器中微波晶体二极管与内导体串接，可调短路器用来调配阻抗以提高检波效率。当探针沿波导纵向移动时，只要探针插入波导的深度很小，对场的扰动可忽略，那么探针检测的波导纵向场分布与实际波导中的场分布就十分接近。

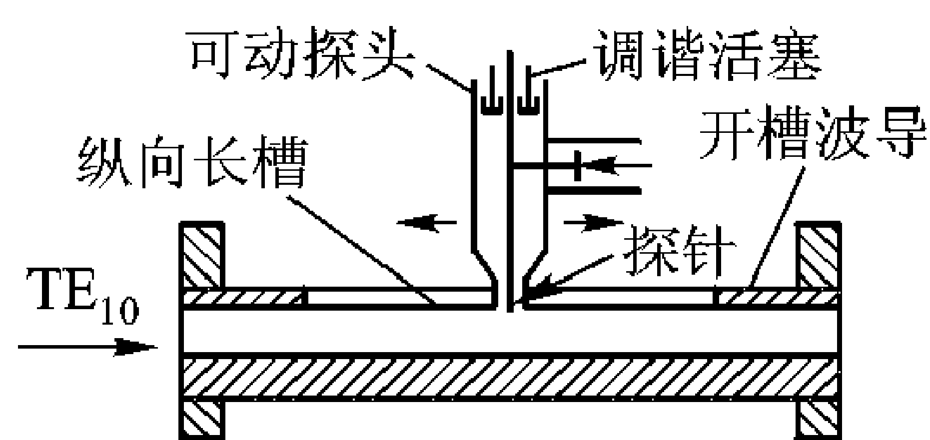


图6-11 波导驻波测量线

6.2.6 矩形波导的损耗

当波导壁不是完纯导体时，电磁波沿波导传播过程中就会有功率损耗在波导壁上，电磁场的振幅将沿传输方向逐渐衰减。这种波导称为非理想波导。实际金属管波导都是非理想波导。如果波导中填充某种介质，而且又不是完纯介质，则会引起波导体积中的介质损耗，这种损耗也会造成波的衰减。

矩形波导的损耗使得纵向传播常数k_z不再是实数而是复数，即

$$k_z = \beta - \mathrm{j}\alpha$$

β为相位常数，表示波的传播。β与ω关系即色散特性。α为衰减常数，$\alpha > 0$表示波的衰减。此时沿波导传输的功率将按指数规律衰减，即

$$P_z = P_0 e^{-2\alpha z}$$

式中 P_0 为无耗波导的传输功率。波导单位长度的功率损耗则为

$$P_l = -\frac{\partial P_z}{\partial z} = 2\alpha P_z$$

由此得到衰减常数

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{P_l}{P_z} \qquad (\text{单位为 N/m}) \tag{6.2.59}$$

式(6.2.59)是一个精确公式。实际计算时，通常取 P_0 代替 P_z，从而得到 α 的近似公式

$$\alpha \approx \frac{1}{2}\frac{P_l}{P_0} \tag{6.2.60}$$

所以波导损耗问题的研究归结为衰减常数 α 的研究。

波导壁为非完纯导体时其特性可用有限电导率 σ 表示。当切向磁场在导电壁感应的电流在导体表面流动时就产生欧姆损耗。介质有损耗时，其相对介电常数为复数，可表示为

$$\varepsilon_r = \varepsilon'_r - j\varepsilon''_r$$

ε''_r 表示介质损耗。一般情况下 $\varepsilon''_r \ll \varepsilon'_r$。

对于导体，如 4.4 节讨论过的，其相对介电系数可表示为

$$\varepsilon_m = \varepsilon'_m - j\varepsilon''_m$$

ε'_m 一般视为 1，$\varepsilon''_m = \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$，在微波频率 $\varepsilon''_m \gg \varepsilon'_m$，此时不论对于 TE 模还是 TM 模，导电体可用一阻抗为 Z_m 的负载等效。Z_m 的值由式(5.5.5)给出。

现以 TE_{10} 波为例用扰动法计算计及金属波导壁及介质损耗时的纵向传播常数。根据定义，TE_{10} 波的纵向传播常数为

$$k_z = \beta - j\alpha = \sqrt{k_0^2\varepsilon_r - k_t^2} \tag{6.2.61}$$

计及损耗时，k_z 可以看作对不计损耗时 k_{zu} 的扰动，下标 u 表示不计损耗扰动时的量。没有损耗时

$$k_{zu} = \sqrt{k_0^2\varepsilon_{ru} - k_{tu}^2} \tag{6.2.62}$$

式中

$$k_{tu}^2 = k_{xu}^2 + k_{yu}^2 \tag{6.2.63}$$

对于 TE_{10} 波

$$k_{xu} = \frac{\pi}{a} \tag{6.2.64}$$

$$k_{yu} = 0 \tag{6.2.65}$$

$$\varepsilon_{ru} = \varepsilon'_r \tag{6.2.66}$$

由于损耗的存在，ε_{ru}代之以 $\varepsilon'_r - j\varepsilon''_r$，横向传播常数 k_{tu}代之以 k_t，可设

$$k_t^2 = \left(\frac{\pi}{a} + \Delta k_x\right)^2 + \Delta k_y^2 \tag{6.2.67}$$

将式(6.2.62)~(6.2.67)代入式(6.2.61)，当扰动比较小时

$$k_z = \beta - j\alpha = \sqrt{k_0^2(\varepsilon'_r - j\varepsilon''_r) - \left(\frac{\pi}{a} + \Delta k_x\right)^2 - \Delta k_y^2}$$

$$\approx k_{zu} - \frac{jk_0^2\varepsilon''_r}{2k_{zu}} - \frac{\pi}{k_{zu}a}\Delta k_x - \frac{\Delta k_y^2}{2k_{zu}} \tag{6.2.68}$$

因为 Δk_x、Δk_y 为复数，上式除右边 k_{zu}项外，都对衰减常数 α 有贡献。其中一项表示介质损耗，另两项表示波导壁上损耗。由式(6.2.68)可得

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_{wx} + \alpha_{wy} \tag{6.2.69}$$

$$\alpha_d = \frac{k_0^2\varepsilon''_r}{2k_{zu}} \tag{6.2.70}$$

$$\alpha_{wx} = \frac{\pi}{k_{zu}a}\mathrm{Im}\,[\Delta k_x] \tag{6.2.71}$$

$$\alpha_{wy} = \frac{1}{2k_{zu}}\mathrm{Im}\,[\Delta k_y^2] \tag{6.2.72}$$

式中 Im 表示取虚部，α_d 表示介质中损耗，α_{wx}表示 $x=0$，a 波导壁上的损耗，α_{wy}则表示 $y=0$，b 波导壁上的损耗。

所以考虑损耗时衰减常数 α 的计算可归结为计及损耗时对横向传播常数的扰动 Δk_x、Δk_y 的计算。为此我们要应用横向谐振原理。

本节开头曾经指出，波沿 z 轴传播时，在 x、y 方向由于波导壁的全反射而产生谐振。就 y 方向而言，可得到图 6-12 所示的等效电路。其中 $y=\pm b/2$ 处的金属波导壁的阻抗 $Z_m = \frac{\omega\mu_0\delta}{2}(1+j)$。对于 TE_{10}波，电场在 y 方向，就 y 方向传播的波，涉及的是 TM 波，电场对于 $y=0$ 是奇对称，即 $y=0$ 处的阻抗

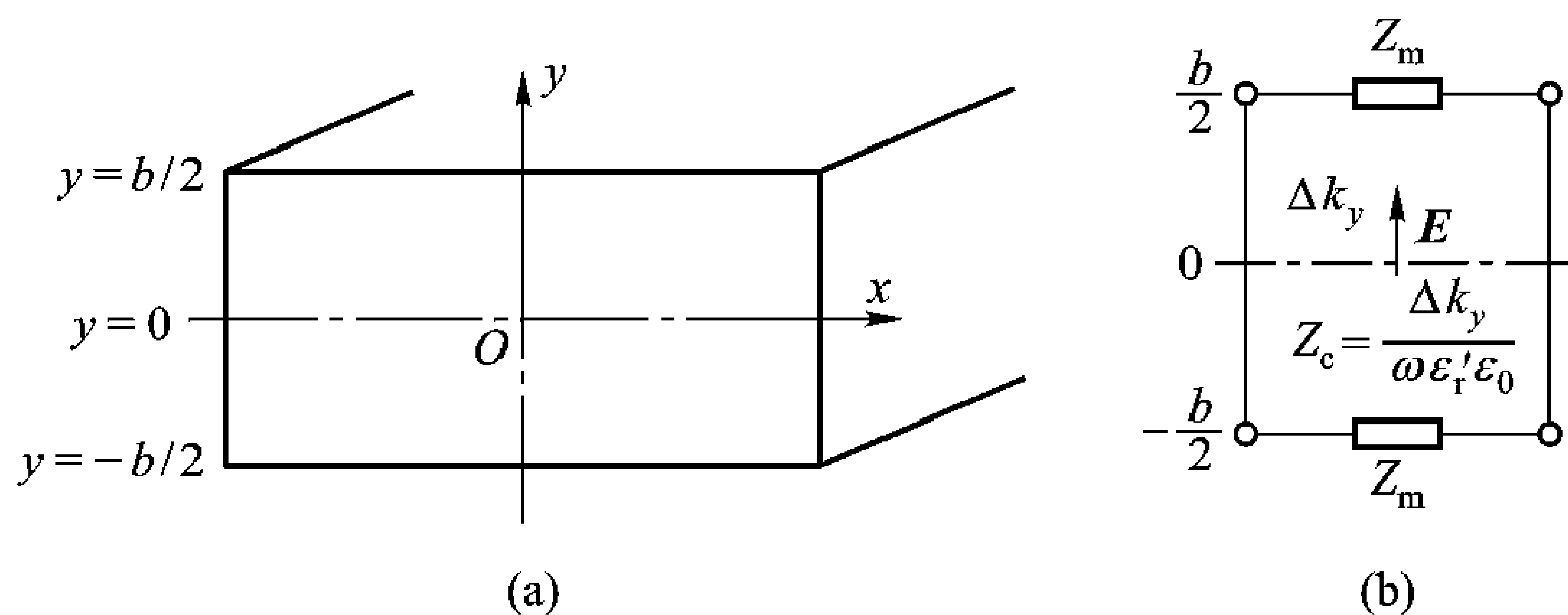


图 6-12　矩形波导及其 y 方向等效电路(计及波导壁损耗)

(a) 矩形波导　(b) y 方向的等效电路

等于零。这样从 $y=b/2$ 处向上、下看进去的阻抗分别为

$$Z^{\uparrow}\left(\frac{b}{2}\right)=Z_{\mathrm{m}}=\frac{\omega\mu_0\delta}{2}(1+\mathrm{j})$$

$$Z^{\downarrow}\left(\frac{b}{2}\right)=\mathrm{j}\frac{\Delta k_y}{\omega\varepsilon'_{\mathrm{r}}\varepsilon_0}\tan\frac{\Delta k_y b}{2}$$

y 方向谐振要求

$$Z^{\uparrow}\left(\frac{b}{2}\right)+Z^{\downarrow}\left(\frac{b}{2}\right)=0$$

将 $Z^{\uparrow}\left(\frac{b}{2}\right)$、$Z^{\downarrow}\left(\frac{b}{2}\right)$ 代入上式，并假定扰动很小，$\Delta k_y b<<1$，可得

$$\Delta k_y^2=k_0^2\varepsilon'_{\mathrm{r}}\frac{\delta}{b}(\mathrm{j}-1) \tag{6.2.73}$$

将 Δk_y^2 代入式(6.2.72)，得到

$$\alpha_{\mathrm{w}y}=\frac{k_0^2\varepsilon'_{\mathrm{r}}}{2k_{z\mathrm{u}}}\frac{\delta}{b} \tag{6.2.74}$$

同样，利用 x 方向谐振，可得

$$\alpha_{\mathrm{w}x}=\frac{k_0^2}{k_{z\mathrm{u}}}\frac{\delta}{a}\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2 \tag{6.2.75}$$

注意，涉及 x 方向谐振时，所处理的是 TE 模，且对称面上的电压是波幅，故对称面上的导纳 $Y=0$。式(6.2.75)的推导留给读者作练习。

由此我们得到矩形波导 TE_{10}模的等效传输线参数为

$$Z=\frac{\omega\mu_0}{k_z}$$

$$k_z=k_{z\mathrm{u}}-\mathrm{j}\alpha$$

$$k_{z\mathrm{u}}=\sqrt{k_0^2\varepsilon'_{\mathrm{r}}-\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$$

$$\alpha=\alpha_{\mathrm{d}}+\alpha_{\mathrm{w}}$$

$$\alpha_{\mathrm{d}}=\frac{k_0^2}{k_{z\mathrm{u}}}\frac{\varepsilon''_{\mathrm{r}}}{2}$$

$$\alpha_{\mathrm{w}}=\frac{k_0^2}{2k_{z\mathrm{u}}}\frac{\delta}{b}\left[\varepsilon'_{\mathrm{r}}+\frac{2b}{a}\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2\right]$$

6.2.7 矩形波导的激励与耦合

6.2.2 分析了规则金属波导中可能存在的电磁场的各种模式。那么，如何在波导中产生这些导行模呢？这就涉及到波导的激励。而另一方面，要从波导中提取微波信息，就涉及到波导的耦合。波导的激励与耦合就本质而言是电磁波的辐射和接收，是微波源向波导内有限空间的辐射或从波导的有限空间内接

收微波信息。由于辐射和接收是互易的，因此激励与耦合具有相同的场结构，所以我们只介绍波导的激励。严格地用数学方法来分析波导的激励总是比较困难，这里仅定性地对这一问题作一说明。激励波导的方法通常有三种：电激励，磁激励和电磁混合激励，分述如下。

1. 电激励

将同轴线内导体延伸一小段，沿电场方向插入矩形波导内，构成探针激励，如图 6－13（a）。由于这种激励类似于电偶极子的辐射（电偶极子辐射在第8章讨论），故称电激励。在探针附近，由于电场强度会有 E_z 分量，电磁场分布与 TE_{10}模有所不同，因而必然有高次模被激发。但当波导尺寸只允许主模传输时，激发起的高次模随着与探针位置的远离将快速衰减，因此不会在波导内传播。为了提高功率耦合效率，使探针位置两边波导与同轴线的阻抗匹配，往往在波导一端接上一个短路活塞，如图 6－13（b）。调节探针插入深度 d 和短路活塞位置 l，使同轴线耦合到波导中去的功率达到最大。短路活塞用以提供一个可调电抗以抵消和高次模相对应的探针电抗。

原则上，只要探针激励的电磁场中有一个分量（无论是电场还是磁场）与所激励的工作模式的某一分量相吻合，该模式的场就可以被激励。矩形波导中 TE_{10}模电场只有 E_y 分量，且波导宽边中间最强。因此，为优先激励起 TE_{10}模，激励探针应从波导宽边中间插入，因为此时探针激励的场与 TE_{10}模场结构最吻合。

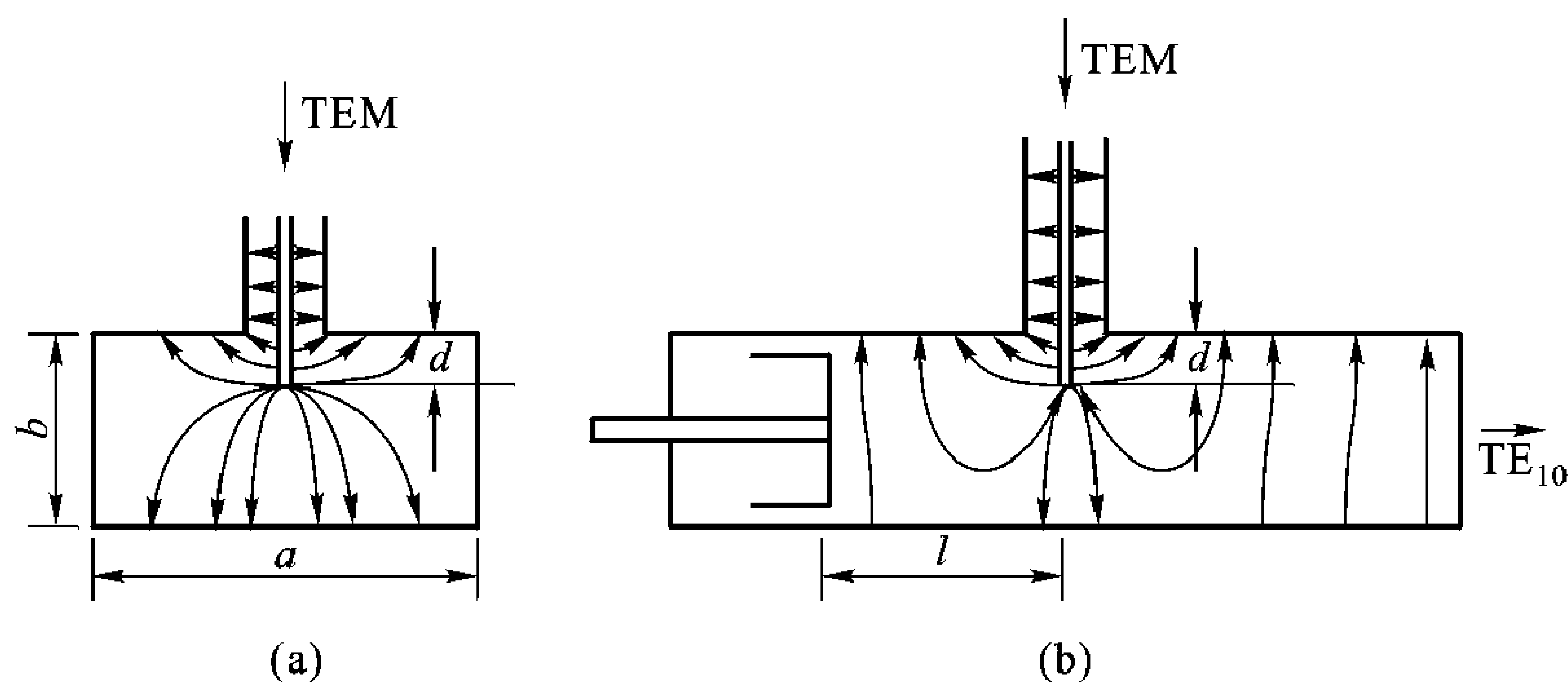


图 6－13 探针激励及其调配

（a）正视图 （b）侧视图

2. 磁激励

将同轴线的内导体延伸一小段后弯成环形，将其端部焊在外导体上，然后插入波导中所需激励模式的磁场最强处，并使小环法线平行于磁力线，如图 6－14所示。由于这种激励类似于磁偶极子辐射（磁偶极子辐射也在第 8 章讨

论)，故称为磁激励。同样，也可连接一个短路活塞以提高功率耦合效率。但由于耦合环不容易和波导紧耦合，而且匹配困难，频带较窄，最大耦合功率也比探针激励小，因此在实际中常用探针耦合。

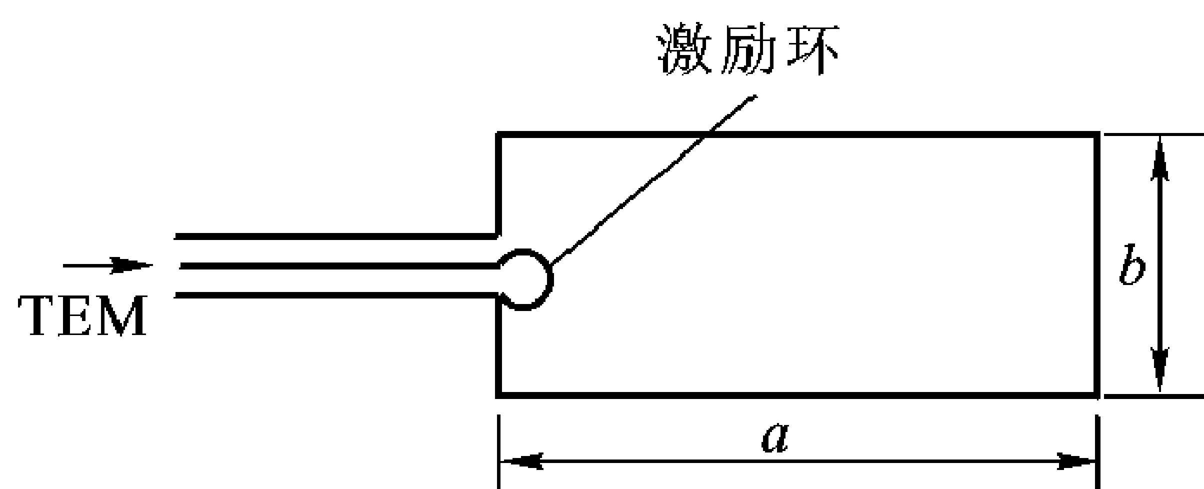


图 6-14 磁激励示意图

3. 电磁混合激励

除了上述两种激励之外，波导之间的激励往往采用小孔耦合，即在两个波导的公共壁上开孔或缝，使一部分能量辐射到另一波导中去，以此建立所要的传输模式。

小孔耦合时，如果小孔开在只有电场而切向磁场为零的地方，则激励是通过电场进行的，故称之为电激励，如图 6-15 (a)。如果小孔开在只有切向磁场而电场为零的地方则称为磁激励，如图 6-15 (b)。实际遇到的常常是孔开在既有法向电场又有切向磁场的地方，即属电、磁混合激励。电磁混合激励也叫作电流激励。

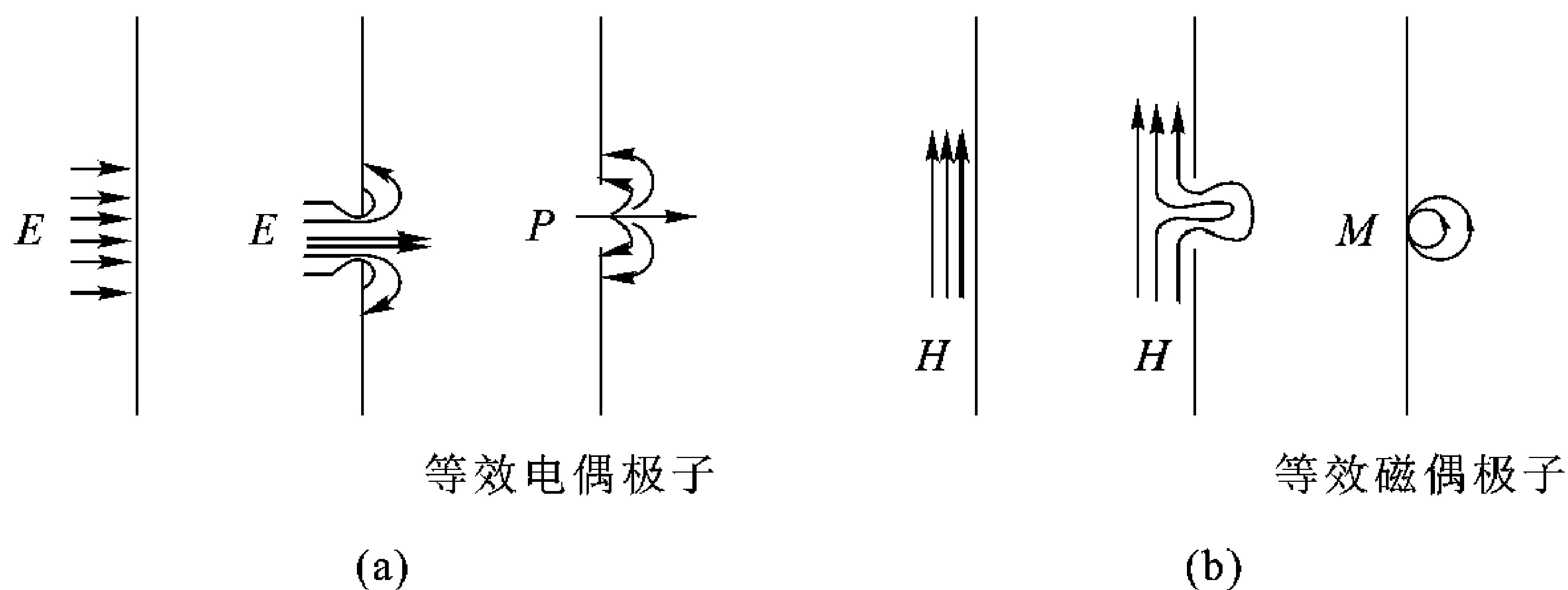


图 6-15 导电壁上耦合孔附近的场分布

(a) 电耦合时 (b) 磁耦合时

小孔耦合最典型的应用是定向耦合器 (见图 6-16)。它在主波导和副波导的公共壁上开有小孔，以便将主波导的电磁能量耦合到副波导。一般来说，副波导中被激励起的波在两个方向均有传播，但在某些特殊的孔或缝的耦合下，副波导中波的传播有方向性。图 6-16 所示小孔耦合装置就有定向传播特性，故称为定向耦合器。图 6-16 (a)所示的双十字形定向耦合器的基本工作原理如下：

十字形定向耦合器在主波导宽边开有两个“+”字形耦合孔，x、y 方向一般相距 $\lambda_g/4$。通过这两个孔，主波导能量耦合到副波导。副波导几何位置的安放，使其轴与主波导垂直。两个十字槽孔的辐射场在时间上有 $\pi/2$ 相移，另

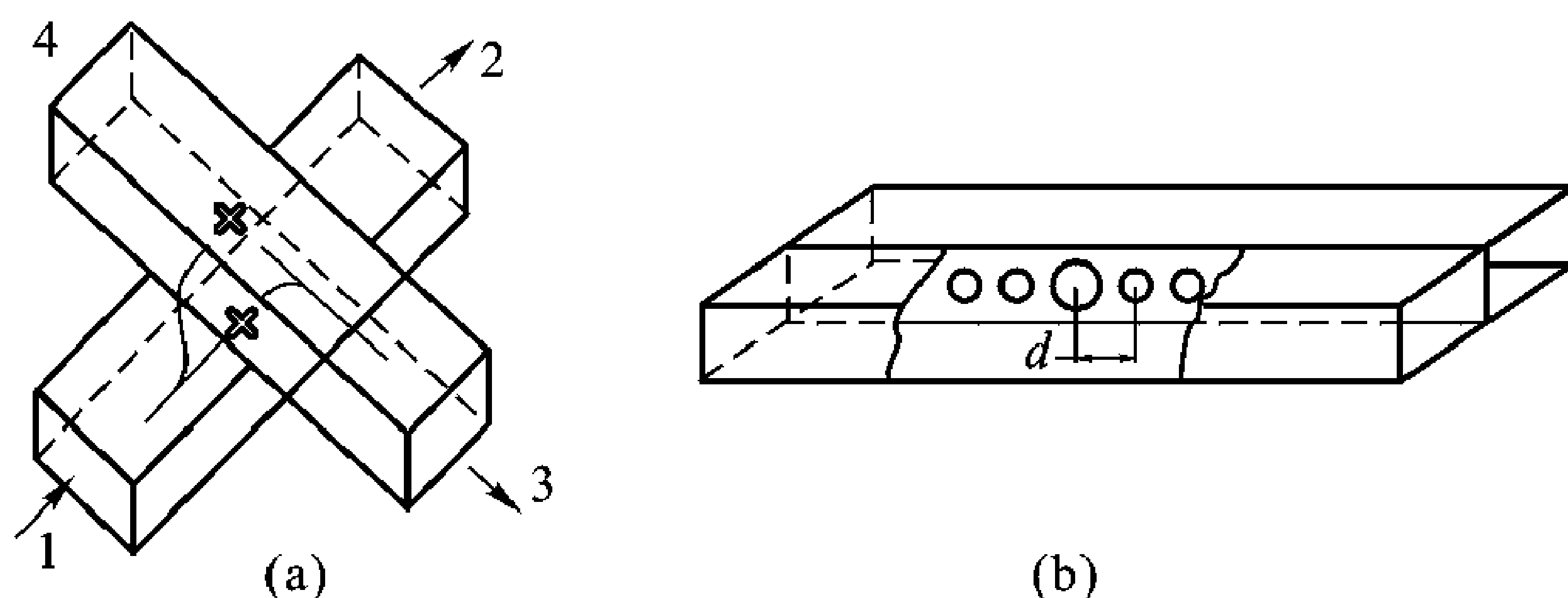


图 6-16　小孔激励的典型例子——定向耦合器

(a) 十字形定向耦合器　(b) 窄边多孔定向耦合器

外根据波在传输方向上相位依次落后的原理，空间上也有 $\pi/2$ 相移。所以，从端口 1 进入主波导的 TE_{10} 模电磁波通过两个十字形耦合孔向副波导辐射。向端口 4 方向传播的波相位相同，叠加的结果是辐射加强；而向端口 3 方向传播的波相位相反，彼此抵消，几乎没有波的传播。从端口 2 向端口 1 传播的波，通过两个十字形耦合孔辐射到副波导，在端口 3 方向波相加，在端口 4 方向波相互抵消。所以定向耦合器能检测入射波、反射波场强。

6.2.8　矩形波导元件

波导不仅用来传输电磁波，还可构成各类无源、有源波导器件。常用的波导元件很多，如连接器、衰减器(固定的、可调的)、终端匹配负载与终端反射器、阻抗变换器、移相器、功率分配与合成器、定向耦合器、驻波测量线、检波器、谐振器、滤波器、隔离器、环形器、波型转换器。其中驻波测量线、定向耦合器的基本工作原理前面已提过，滤波器、隔离器、环形器等将在以后有关章节中讨论。本小节只就部分矩形波导元件作简要介绍。

抗流连接法兰

不同波导元件通过法兰连接。如果波导传输功率大，波导壁有很大的高频电流流过，两连接法兰之间的接触电阻有可能引起高频“打火”。图 6-17 所

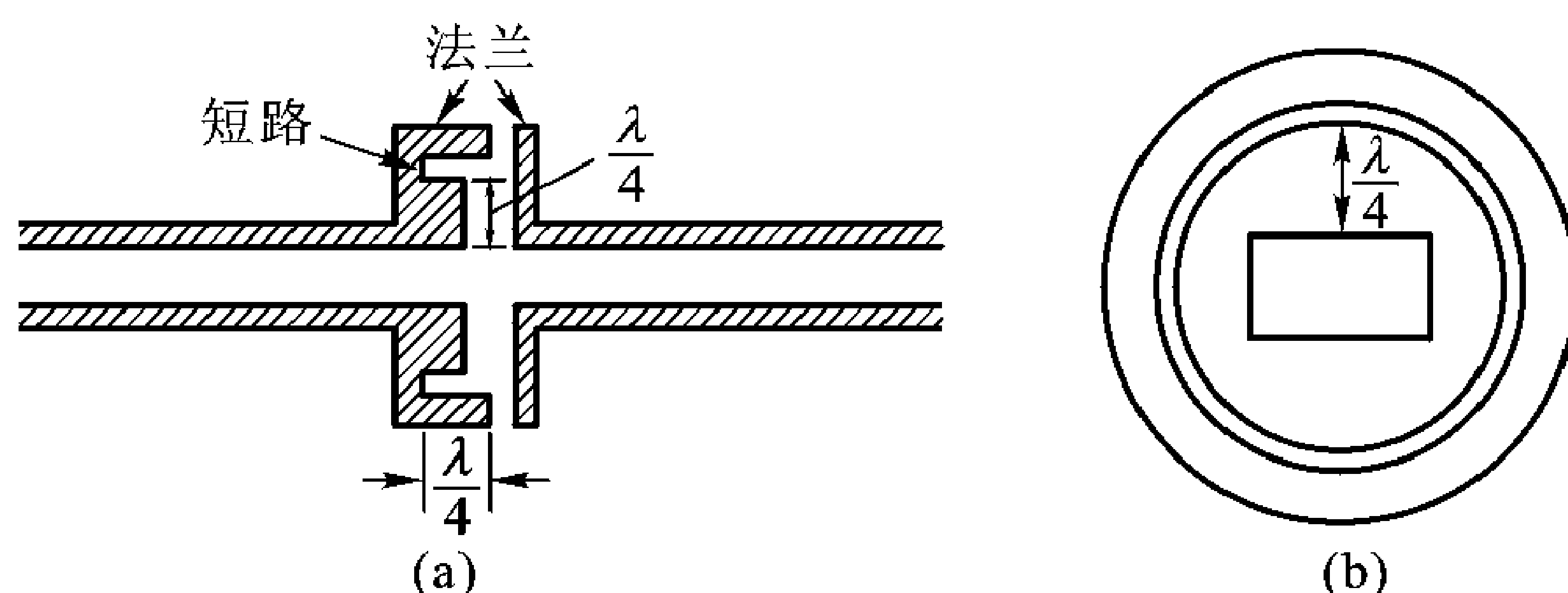


图 6-17　抗流法兰

(a) 侧面图　(b) 端面图

示的抗流法兰，在离开波导壁 $\lambda/4$ 处开长度为 $\lambda/4$ 的纵向槽，以构成一段 $\lambda/4$ 短路线，使得从两波导法兰接触处向 $\lambda/4$ 短路线看进去的阻抗，相当于开路，因而两波导法兰接触处没有或只有很小的高频电流流过，从而避免连接处"打火"现象的产生。两法兰接触处离开波导壁又近似 $\lambda/4$，构成一个在两法兰接触处开路的 $\lambda/4$ 伞形线，因而在波导内壁，两波导虽然没有直接接触，但对微波还是短路的。

波导短路器

波导终端接上一块金属片就构成波导短路器。因为对于切向电场，金属短路面反射系数 $\Gamma=-1$。

波导短路器有接触式与抗流式之分，接触式短路器的金属短路片通过弹簧片与波导壁紧密接触。这种短路器多用于同轴线中，图 6-18 (a)所示的为接触式同轴波导短路器。在矩形波导中多用抗流式短路器[见图 6-18(b)]，它利用 $\lambda_g/4$ 阻抗变换器原理，在有效短路面上，虽然金属片与波导壁没有直接接触，但在电性能上却是短路的，即输入阻抗为零。图 6-18 (c)是其等效电路，如不计短路器壁厚，即厚度$\overline{ad}\to 0$，则$\overline{bc}\approx\overline{dc}$且$\overline{bc}$、$\overline{dc}$都近似为 $\lambda_g/4$，所以$\overline{dc}$段相当于 $\lambda_g/4$ 终端短路的传输线，$\overline{bc}$段相当于终端开路的 $\lambda_g/4$ 传输线，两段传输线之间有接触电阻 R_k，它在电流波节处，在有效短路面$\overline{ab}$处，输入阻抗为零。于是活塞块沿波导移动时，就实现了短路面的移动，所以 6-18

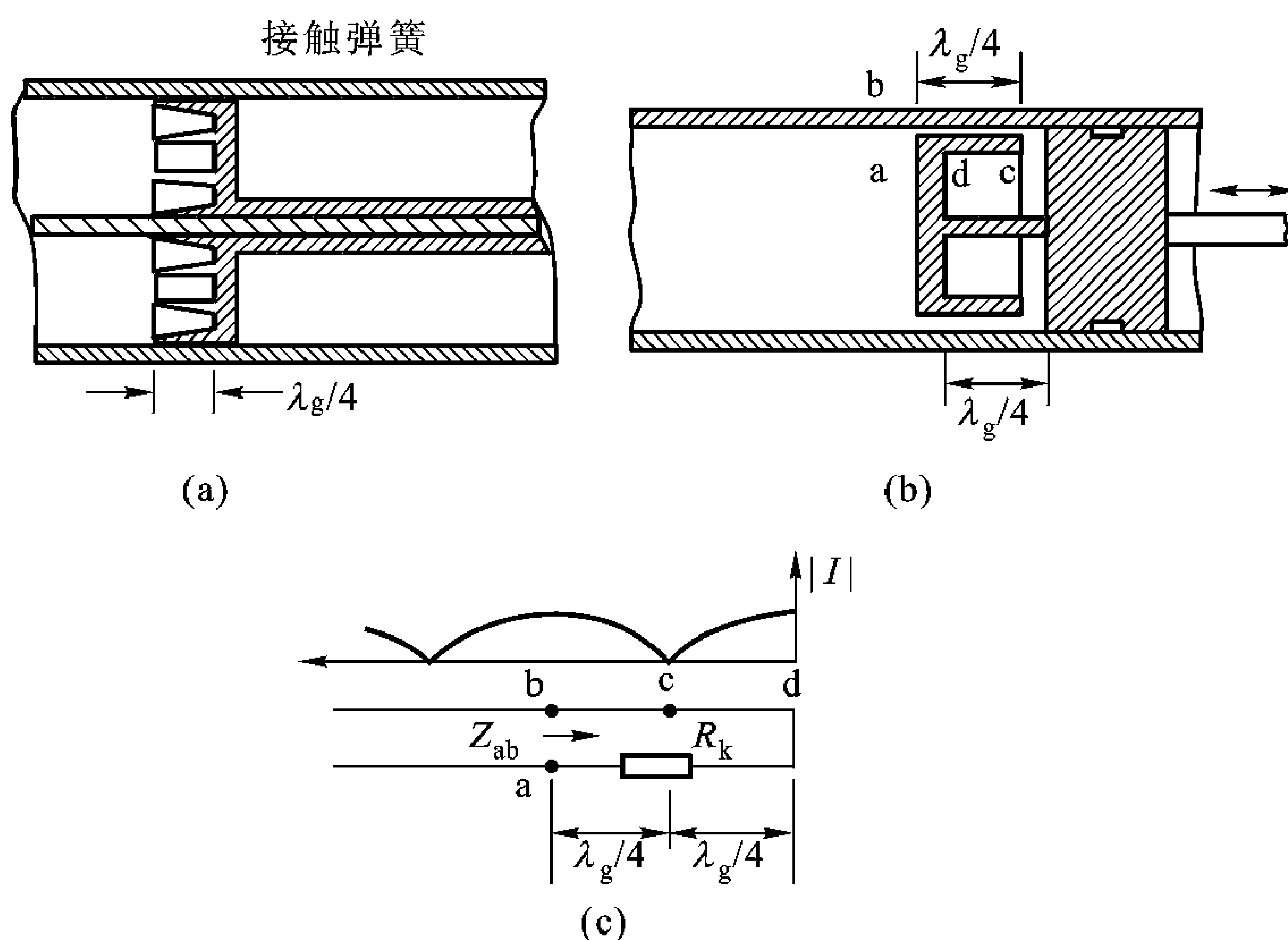


图 6-18 短路器

(a) 接触式短路器 (b) 抗流式短路器 (c) 抗流短路器等效电路

(b)所示波导短路器，其短路面是可调的。抗流短路活塞的优点是损耗小，而且驻波系数可大于100，但频带较窄，一般只有10%～15%的带宽。

平行双导线末端断开叫做开路，但矩形波导末端开口还有部分能量辐射出去，不等于平行双导线的开路。矩形波导的短路、开路、匹配用波导终端的反射系数 Γ 定义。$\Gamma=-1$，定义为短路；$\Gamma=1$，定义为开路；而 $\Gamma=0$ 定义为匹配。离开波导短路面 $\lambda_g/4$ 处的阻抗为无穷大，$\Gamma=1$，故相当于开路。

匹配负载与可调衰减器

如果在波导终端安置吸收微波的介质，将入射波能量全部吸收，使得反射系数 $\Gamma=0$，这种终端装置就叫做匹配负载，如图6－19（a）。小功率时微波吸收材料一般做成薄片，或者涂在玻璃等介质基片上，薄片或基片表面与电场平行，微波能量将有效地为吸收介质片衰减。为了与波导匹配，吸收片做成尖辟形状，使阻抗渐变过渡。

对于TE_{10}模，波导宽边中心电场最强，如果吸收片从波导宽边中间插入，则随吸收片插入波导深度的增加，对微波场的衰减也不断增加。如果吸收片从窄边逐步移向波导中心，吸收片对微波场的衰减也越来越增加。这种装置叫可调衰减器，见图6－19（b）、（c）。

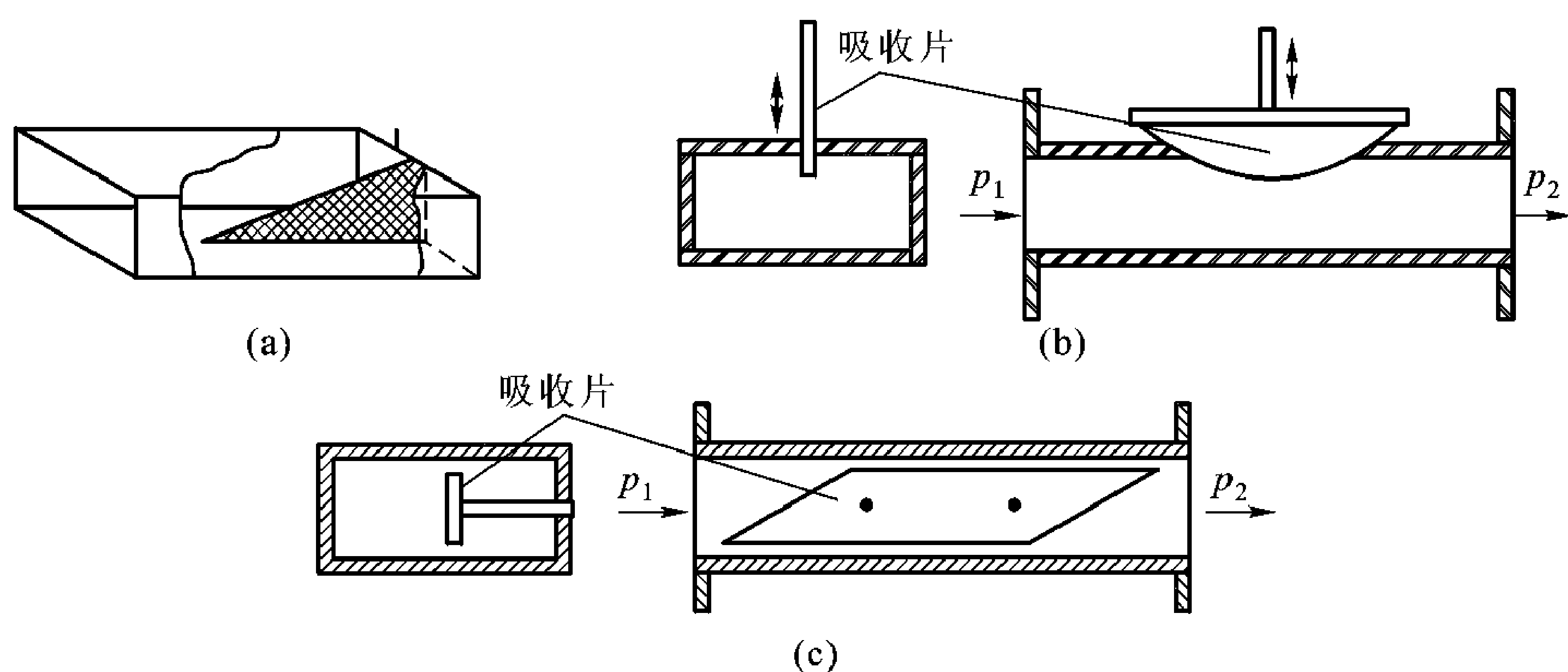


图6－19　匹配负载和可调衰减器
（a）匹配负载　（b）、（c）可调衰减器

波导分支器

E－T分支、H－T分支都是在波导某个方向上的分支，见图6－20（a）、6－21（a）。当分支波导宽面与TE_{10}模电场 $\boldsymbol{E}$ 所在平面平行时称为E－T分支；当分支波导宽面与TE_{10}模磁场 $\boldsymbol{H}$ 所在平面平行时称为H－T分支。E－T、H－

T分支可作功率分配、合成器。

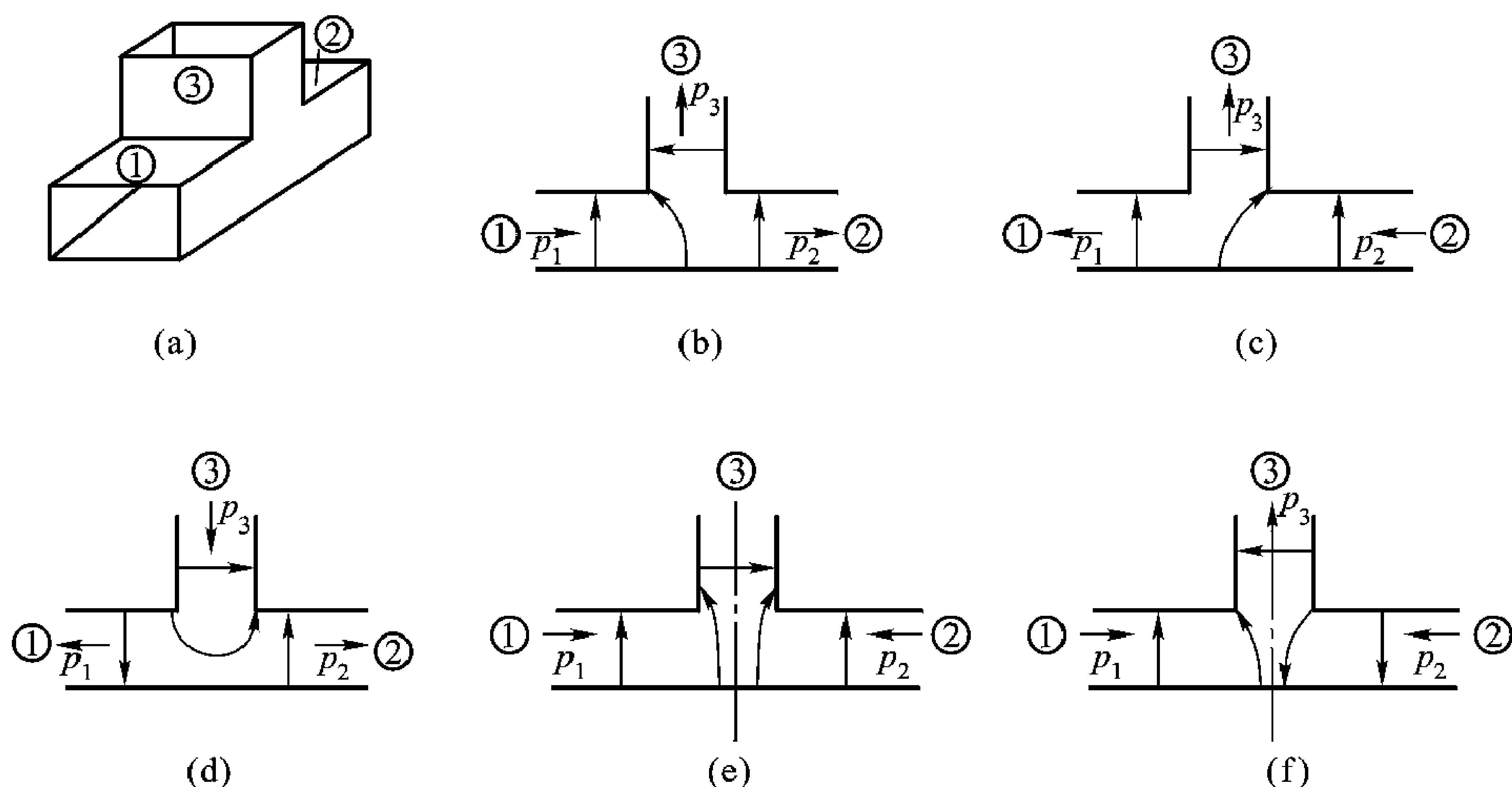


图6-20 E-T分支的特性

(a) E-T分支 (b) 端口①输入 (c) 端口②输入 (d) 端口③输入

(e) 端口①和②和同相输入 (f) 端口①和②反相输入

假定各端口只有TE_{10}模传输，E-T分支有如下特性：

(1) 当信号由端口①输入时，端口②和③都有输出且同相，如图6-20 (b)；

(2) 当信号由端口②输入时，端口①和③都有输出且同相，如图6-20 (c)；

(3) 当信号由端口③输入时，端口①和②都有输出且反相，如图6-20 (d)；

(4) 当信号由端口①和②同相输入时，在端口③的对称面上可得电场的驻波波腹，端口③输出最小；如果①、②信号振幅也相等，则端口③的输出为零，如图6-20 (e)所示；

(5) 当信号由端口①和②反相输入时，在端口③的对称面上可得到电场的驻波波节，端口③输出最大，如图6-20 (f)所示。

H-T分支的特性与E-T分支相似，其主要特性是，当信号由端口③输入时，端口①和②有等幅同相输出，如图6-21。所以H-T分支可用作功率分配器和合成器。

将具有共同对称平面的E-T和H-T分支组合在一起就构成双T接头，如图6-22。通常称3臂为E臂，4臂为H臂，1、2臂为平分臂或侧臂，3、4臂为隔离臂。由E-T、H-T接头的特性可知双T具有如下特性：

(1) 由E臂输入的功率将由侧臂反相等分输出，而不进入H臂；

(2) 由H臂输入的功率将由侧臂同相等分输出，而不进入E臂；

(3) 如果E和H臂接匹配负载，功率由两侧臂输入。如果输入信号在共

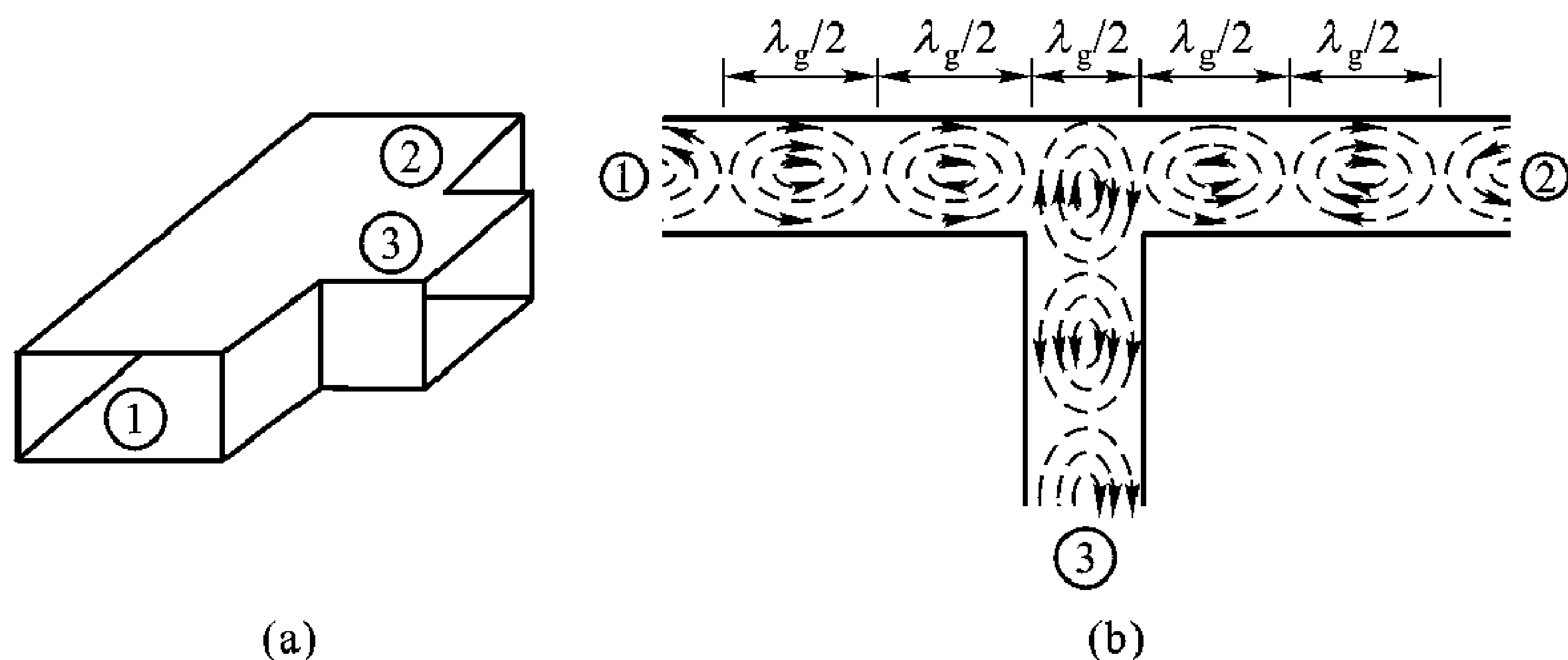


图 6-21 H-T分支特性及其场分布

(a) H-T分支结构 (b) H-T分支的场分布

同对称面上为同相时(即为电场波腹时)，则功率进入 H 臂而不进入 E 臂；如果对称面上为反相时(即为电场波节时)，则功率进 E 臂而不进入 H 臂。

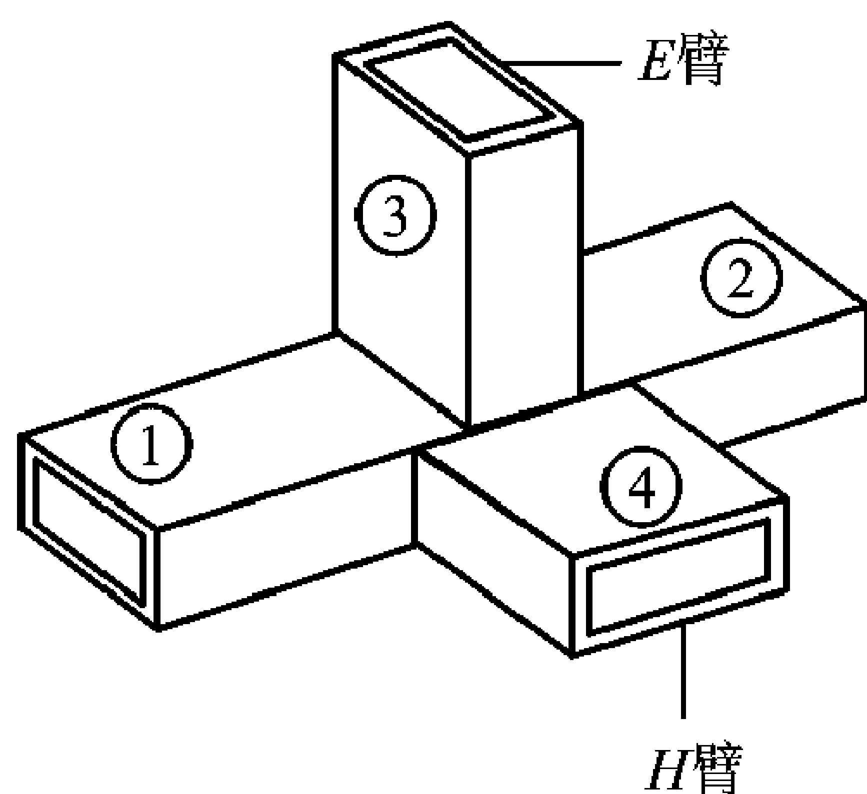


图 6-22 双T接头

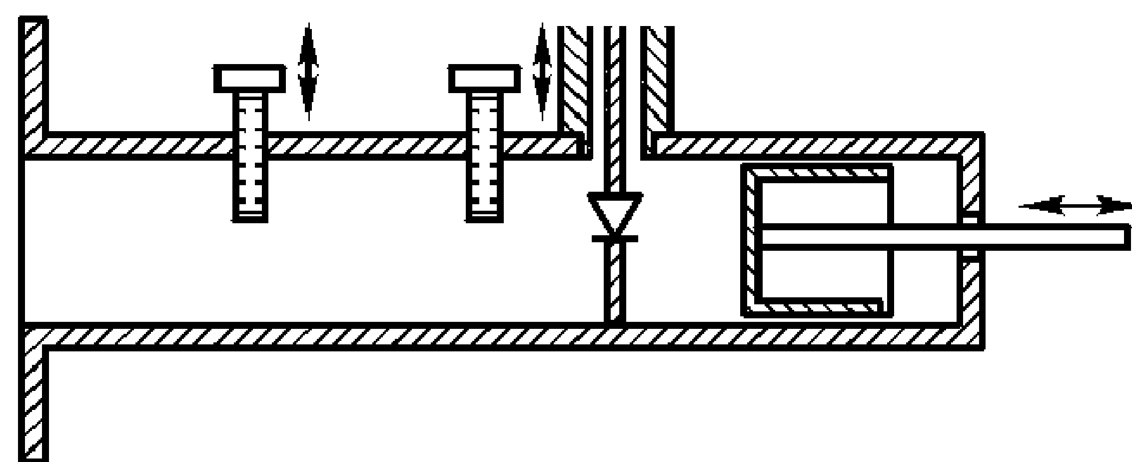


图 6-23 波导检波器

微波检波器

微波检波器用于检测微波信号。根据结构特点，微波检波器有波导检波器与同轴检波器之分。图 6-23 所示的为波导检波器，微波二极管作为接收天线插入波导宽边电场最强处检测微波能量。检波二极管前面的两个可调螺钉以及后面的可调短路器都是用来调配阻抗的，以使微波能量能更多地被检波器吸收。同轴检波器则将微波二极管接入同轴线内导体，我们已在驻波测量线中作过简要介绍。

6.3 圆波导

图 6-24 所示的半径为 a 的圆波导具有损耗较小与双极化的特性，常用在

天线馈线中。圆波导还广泛用作微波谐振器。对圆波导的分析可以沿用矩形波导的分析方法，通过求解模式函数的二维矢量波方程(6.2.1)及传输线方程(6.2.2)、(6.2.3)，得到横向场量 $\boldsymbol{E}_t$、$\boldsymbol{H}_t$，再用横向场量求得纵向场量 E_z（对于 TM 模）和 H_z（对于 TE 模）。在极坐标下解式(6.2.1)并不方便。事实上，场的横向分量与纵向分量是相对而言的，6.2 节求解矩形波导问题时，先求横向场量，再求纵向场量，当然也可以先求纵向场量，再求横向场量。对于矩形波导问题，在直角坐标系下，先求横向场量还是先求纵向场量，解题的复杂性是相同的。对于圆波导在圆柱坐标系下求解，先求纵向场量再求横向场量比先求横向场量再求纵向场量方便得多。一般教科书对柱形波导问题的分析，都是先求出场的纵向分量。所以本节对圆波导的分析先得出场的纵向分量 E_z（对于 TM 模）、H_z（对于 TE 模）的解，再通过 E_z、H_z 得出场的其他分量。

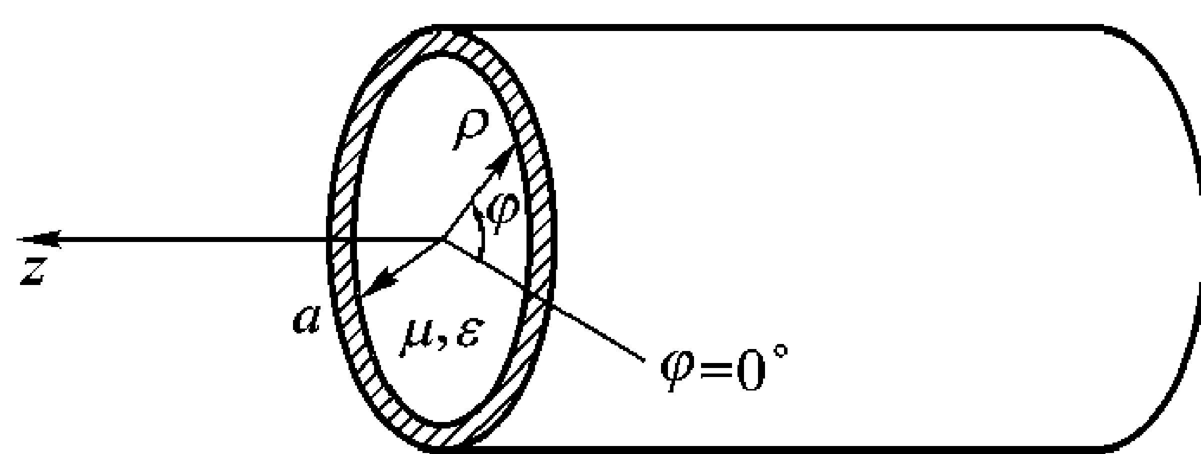


图 6-24 圆波导及其坐标系

6.3.1 用纵向场量表示横向场量

为了用纵向场量表示横向场量，还得从麦克斯韦方程出发。已知

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}$$

先将电场 $\boldsymbol{E}$、磁场 $\boldsymbol{H}$ 表示为横向场量 $\boldsymbol{E}_t$、$\boldsymbol{H}_t$ 与纵向场量 $E_z z_0$、$H_z z_0$ 之和，

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_t + E_z z_0 \tag{6.3.1}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_t + H_z z_0 \tag{6.3.2}$$

再将算符 ∇ 表示为横向算符 ∇_t 与 $z_0\frac{\partial}{\partial z}$ 之和，即

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z} z_0 \tag{6.3.3}$$

在圆柱坐标下

$$\nabla_t = \boldsymbol{\rho}_0 \frac{\partial}{\partial \rho} + \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

则麦克斯韦方程可写为

$$\left(\nabla_t + z_0\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{E}_t + z_0 E_z) = -\mathrm{j}\omega\mu(\boldsymbol{H}_t + H_z z_0) \tag{6.3.4}$$

$$\left(\nabla_t + z_0\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\boldsymbol{H}_t + H_z z_0) = \mathrm{j}\omega\varepsilon(\boldsymbol{E}_t + E_z z_0) \tag{6.3.5}$$

式(6.3.4)、(6.3.5)两边纵向、横向场量分别相等，得到

$$-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}} = \nabla_{\mathrm{t}} \times z_0 E_z + z_0 \times \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}}{\partial z} \tag{6.3.6}$$

$$\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} = \nabla_{\mathrm{t}} \times z_0 H_z + z_0 \times \frac{\partial \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}}{\partial z} \tag{6.3.7}$$

$$-\mathrm{j}\omega\mu H_z z_0 = \nabla_{\mathrm{t}} \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} \tag{6.3.8}$$

$$\mathrm{j}\omega\varepsilon E_z z_0 = \nabla_{\mathrm{t}} \times \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}} \tag{6.3.9}$$

从式(6.3.6)、(6.3.7)，并利用$z_0 \times (\nabla_{\mathrm{t}} \times E_z z_0) = \nabla_{\mathrm{t}} E_z$ 以及$z_0 \times (z_0 \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}) = -\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}$，就可用 E_z、H_z 表示$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}$、$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}$，因此

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} = \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(\nabla_{\mathrm{t}} \frac{\partial E_z}{\partial z} - \mathrm{j}\omega\mu\ \nabla_{\mathrm{t}} \times z_0 H_z \right) \tag{6.3.10}$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}} = \frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(\nabla_{\mathrm{t}} \frac{\partial H_z}{\partial z} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\ \nabla_{\mathrm{t}} \times z_0 E_z \right) \tag{6.3.11}$$

或

$$E_\rho = -\frac{1}{k_{\mathrm{t}}^2}\left(\mathrm{j}k_z \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \tag{6.3.12}$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{k_{\mathrm{t}}^2}\left(\frac{\mathrm{j}k_z}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \mathrm{j}\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \tag{6.3.13}$$

$$H_\rho = -\frac{1}{k_{\mathrm{t}}^2}\left(\mathrm{j}k_z \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) \tag{6.3.14}$$

$$H_\varphi = -\frac{1}{k_{\mathrm{t}}^2}\left(\frac{\mathrm{j}k_z}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \mathrm{j}\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \tag{6.3.15}$$

得出上两式时，我们假定$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k_z^2$，因为波导在纵向 z 趋于无穷远，场在 z 方向按 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$变化。式中，$k_{\mathrm{t}}^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_z^2 = k^2 - k_z^2$。

6.3.2 场分布与截止特性

1. 纵向场量 E_z、H_z 的解及截止条件

下面我们分 TE 模和 TM 模两种情况来求解。

(1) TE 模

对于 TE 模，$E_z = 0$，只需求 H_z。

根据拉普拉斯算子 ∇^2在柱坐标下的表达式(1.7.53)，H_z 满足的波方程$(\nabla^2 + k^2) H_z = 0$ 为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0 \tag{6.3.16}$$

应用分离变量法求解式(6.3.16)，令

$$H_z = \rho(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{6.3.17}$$

代入式(6.3.16)，得到方程

$$\frac{\rho^2}{\rho(\rho)}\frac{\partial^2\rho(\rho)}{\partial\rho^2} + \frac{\rho}{\rho(\rho)}\frac{\partial\rho(\rho)}{\partial\rho} + k_t^2\rho^2 = -\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$$

此式要成立，则等式两边须等于一个共同的常数。令此常数为 m^2，则得到如下两个常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \tag{6.3.18}$$

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2\rho(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2} + \rho\frac{\mathrm{d}\rho(\rho)}{\mathrm{d}\rho} + (k_t^2\rho^2 - m^2)\rho(\rho) = 0 \tag{6.3.19}$$

式中

$$k_t^2 = k^2 - k_z^2 \tag{6.3.20}$$

其解分别为

$$\Phi(\varphi) = B_1\cos m\varphi + B_2\sin m\varphi = B\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix} \tag{6.3.21}$$

$$\rho(\rho) = A_1\mathrm{J}_m(k_t\rho) + A_2\mathrm{Y}_m(k_t\rho) \tag{6.3.22}$$

式中，A_1、A_2、B_1、B_2 为积分常数；$\mathrm{J}_m(k_t\rho)$是第一类 m 阶贝塞尔函数，$\mathrm{Y}_m(k_t\rho)$是第二类 m 阶贝塞尔函数，其变化曲线如图 6-25 所示。贝塞尔函数与

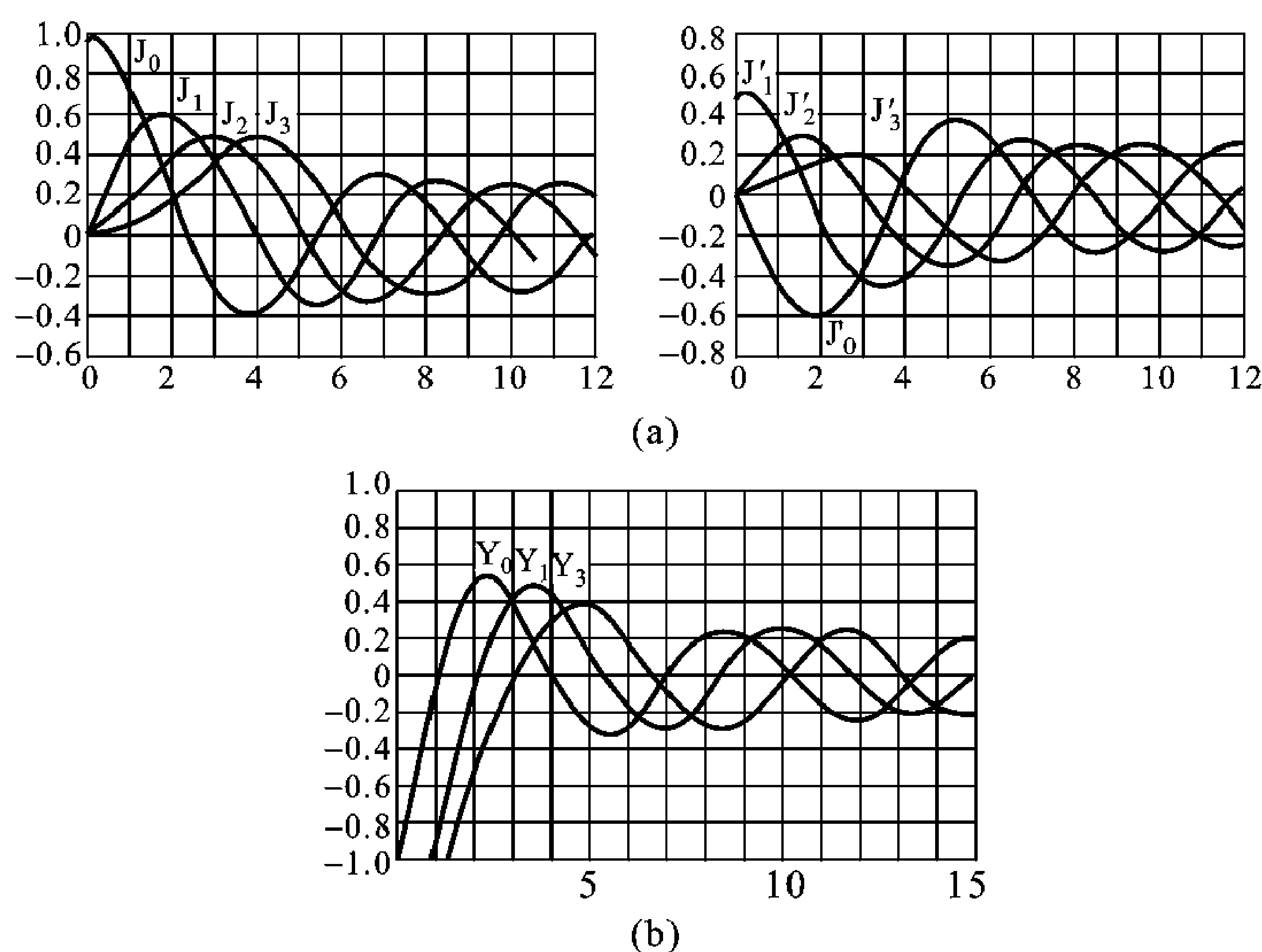


图 6-25 贝塞尔函数

(a) 第一类贝塞尔函数 $\mathrm{J}_m(x)$及其导数 $\mathrm{J}'_m(x)$的变化曲线

(b) 第二类贝塞尔函数 $\mathrm{Y}_m(x)$的变化曲线

三角函数、指数函数极其相似。有关贝塞尔函数与三角函数、指数函数的类比见附录3。

这里要对式(6.3.18)所示$\Phi(\varphi)$的解形作两点解释：第一，这里Φ的解不写成$\Phi=\cos(m\varphi-\psi)$的形式，是考虑到圆波导存在着轴对称性，起始角ψ无法决定。当$\psi=0$时，$\cos(m\varphi-\psi)\to\cos m\varphi$；当$\psi=-\pi/2$时，$\cos(m\varphi-\psi)\to\sin m\varphi$，而当$\psi$为其他任意角时，$\cos(m\varphi-\psi)$可分解成包含$\cos m\varphi$和$\sin m\varphi$的两部分。第二，$m$必须取整数，$m=0$、1、2、…。由于圆波导结构是轴对称的，因此当$\rho$和$z$一定时，坐标$\varphi$旋转360°变成$\varphi+2\pi$后，其电磁场的大小和方向应当不变，即应有

$$\cos(m\varphi-\psi)=\cos[m(\varphi+2\pi)-\psi]$$

此式成立的条件即要求m须为整数，一般取正整数。负整数的结果与正整数一样。将式(6.3.21)和(6.3.22)代入式(6.3.17)，得到

$$H_z=[A_1\mathrm{J}_m(k_t\rho)+A_2\mathrm{Y}_m(k_t\rho)]B\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{6.3.23}$$

边界条件要求：(1)$0\leqslant\rho\leqslant a$，$H_z$应为有限值；(2)在$\rho=a$处，$E_\varphi=E_z=0$。

根据条件(1)，要求$A_2=0$。因为$\rho\to0$时，$\mathrm{Y}_m(k_t\rho)\to-\infty$，而圆波导中心处的场应该是有限的，故须令$A_2=0$。

根据条件(2)，由式(6.3.13)可知，要求

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}=0$$

由式(6.3.23)，得

$$\left.\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}=[A_1k_t\mathrm{J}'_m(k_ta)]B\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}=0$$

则需

$$\mathrm{J}'_m(k_ta)=0$$

令$\mathrm{J}'_m(k_ta)$的第n个根为u'_{mn}，即得到

$$k_ta=u'_{mn}\text{或者}k_t=\frac{u'_{mn}}{a}\qquad(n=1,2,\cdots) \tag{6.3.24}$$

由此求得圆波导中TE模的截止波长为

$$\lambda_c=\frac{2\pi}{k_t}=\frac{2\pi a}{u'_{mn}} \tag{6.3.25}$$

表6-2列出了几个u'_{mn}值与相应的TE模截止波长值。

表 6－2　u'_{mn}值与相应 TE_{mn}模的 λ_c值

波　　型	u'_{mn}值	λ_c值	波　　型	u'_{mn}值	λ_c值
TE_{11}	1.841	3.41a	TE_{22}	6.705	0.94a
TE_{21}	3.054	2.06a	TE_{02}	7.016	0.90a
TE_{01}	3.832	1.64a	TE_{13}	8.536	0.74a
TE_{31}	4.201	1.50a	TE_{03}	10.173	0.62a
TE_{12}	5.332	1.18a			

这样我们就得到 H_z 的解形为

$$H_z = H_{mn}J_m\left(\frac{u'_{mn}}{a}\rho\right)\begin{matrix}\cos\ m\varphi \\ \sin\ m\varphi\end{matrix}e^{-jk_z z} \tag{6.3.26a}$$

式中 $H_{mn}=A_1B$，为任意常数。方程(6.3.17)的一般解应为

$$H_z = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} H_{mn}J_m\left(\frac{u'_{mn}}{a}\rho\right)\begin{matrix}\cos\ m\varphi \\ \sin\ m\varphi\end{matrix}e^{-jk_z z} \tag{6.3.26b}$$

(2) TM 模

对于 TM 模，$H_z=0$，$E_z\neq 0$。用同样的方法可以求得

$$E_z = [A_3J_m(k_t\rho) + A_4Y_m(k_t\rho)]C\begin{matrix}\cos\ m\varphi \\ \sin\ m\varphi\end{matrix}e^{-jk_z z} \tag{6.3.27}$$

边界条件要求：(1)$0\leqslant\rho\leqslant a$，$E_z$ 为有限值；(2)$\rho=a$，$E_\varphi=E_z=0$。由条件(1)，要求 $A_4=0$；由条件(2)，要求 $J_m(k_t a)=0$。

令 $J_m(k_t a)$的第 n 个根为 u_{mn}，则得到

$$k_t=\frac{u_{mn}}{a}\quad(n=1,2,\cdots) \tag{6.3.28}$$

由此可求得圆波导中 TM 模的截止波长为

$$\lambda_c=\frac{2\pi}{k_t}=\frac{2\pi a}{u_{mn}} \tag{6.3.29}$$

表 6－3 列出了几个 TM_{mn}模的截止波长值。

表 6－3　u_{mn}值与相应 TM_{mn}模的截止波长值

波　　型	u_{mn}值	λ_c值	波　　型	u_{mn}值	λ_c值
TM_{01}	2.405	2.62a	TM_{12}	7.016	0.90a
TM_{11}	3.832	1.64a	TM_{22}	8.417	0.75a
TM_{21}	5.135	1.22a	TM_{03}	8.650	0.72a
TM_{02}	5.520	1.14a	TM_{13}	10.173	0.62a

这样，E_z 的解就变成

$$E_z = E_{mn} \mathrm{J}_m\left(\frac{u_{mn}}{a}\rho\right) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{6.3.30a}$$

式中 $E_{mn} = A_3 C$，为任意常数。其一般解应为

$$E_z = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \mathrm{J}_m\left(\frac{u_{mn}}{a}\rho\right) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{6.3.30b}$$

2. 场量表达式

横向场量可用纵向场量表示,由此可由 E_z、H_z 得到其他各场分量表达式。

(1) TE 模

$$E_\rho = \pm \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{j}\omega\mu m a^2}{(u'_{mn})^2\rho} H_{mn} \mathrm{J}_m\left(\frac{u'_{mn}}{a}\rho\right) \begin{matrix}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{matrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.3.31a}$$

$$E_\varphi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{j}\omega\mu a}{u'_{mn}} H_{mn} \mathrm{J}'_m\left(\frac{u'_{mn}}{a}\rho\right) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.3.31b}$$

$$E_z = 0 \tag{6.3.31c}$$

$$H_\rho = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\mathrm{j}k_z a}{u'_{mn}} H_{mn} \mathrm{J}'_m\left(\frac{u'_{mn}}{a}\rho\right) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.3.31d}$$

$$H_\varphi = \pm \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{j}k_z m a^2}{(u'_{mn})^2\rho} H_{mn} \mathrm{J}_m\left(\frac{u'_{mn}}{a}\rho\right) \begin{matrix}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{matrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.3.31e}$$

$$H_z = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} H_{mn} \mathrm{J}_m\left(\frac{u'_{mn}}{a}\rho\right) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.3.31f}$$

由此可见，圆波导中的 TE 模有无穷多个，以 TE_{mn}表示之，m 表示场沿圆周分布的驻波数，n 表示场沿半径分布的半驻波数或场的最大值个数。

(2) TM 模

$$E_\rho = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\mathrm{j}k_z a}{u_{mn}} E_{mn} \mathrm{J}'_m\left(\frac{u_{mn}}{a}\rho\right) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.3.32a}$$

$$E_\varphi = \pm \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{j}k_z a^2 m}{u_{mn}^2} E_{mn} \mathrm{J}_m\left(\frac{u_{mn}}{a}\rho\right) \begin{matrix}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{matrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.3.32b}$$

$$E_z = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \mathrm{J}_m\left(\frac{u_{mn}}{a}\rho\right) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.3.32c}$$

$$H_\rho = \mp \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{j}\omega\varepsilon a^2 m}{u_{mn}^2\rho} E_{mn} \mathrm{J}_m\left(\frac{u_{mn}}{a}\rho\right) \begin{matrix}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{matrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.3.32d}$$

$$H_\varphi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\mathrm{j}\omega\varepsilon a}{u_{mn}} E_{mn} \mathrm{J}'_m\left(\frac{u_{mn}}{a}\rho\right) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_z z)} \tag{6.3.32e}$$

$$H_z = 0 \tag{6.3.32f}$$

结果表明，圆波导中的 TM 模也有无穷多，以 TM_{mn}表示之。

由上面的分析可知：

① 圆波导和矩形波导一样，也具有高通特性，传输模的相位常数也需满足关系 $k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon-k_t^2$。因此圆波导中也只能传输 $\lambda<\lambda_c$的模，且因 λ_c与圆波导的半径 a 成正比，故尺寸越小，λ_c越小。

② 圆波导也有简并现象：一种是 TE_{0n}模和 TM_{1n}模简并，这两种模的 λ_c相同；另一种是特殊的简并现象，即所谓“极化简并”。这是因为场分量沿 φ 方向的分布存在着 $\cos m\varphi$ 和 $\sin m\varphi$ 两种可能性。这两种分布模的 m、n 和场结构完全一样，只是极化面相互旋转了 $90°/m$，故称为极化简并。除 TE_{0n}和 TM_{0n}模外，每种 TE_{mn}和 TM_{mn}模（$m、n\neq0$）本身都存在这种简并现象。这种极化简并现象实际上也是存在的。因为圆波导加工总不可能保证完全是个正圆，如稍微出现有椭圆度，则其中传输的模就会分裂成沿椭圆长轴极化和沿短轴极化的两个模，从而形成极化简并现象。另外，波导中总难免出现不均匀性，如在波导壁上开孔或槽等，这也会导致模的极化简并。故圆波导通常不宜用来作传输系统。但有时我们又需要利用圆波导的这种极化简并现象来做成一些特殊的微波元件。

比较表 6－2 和表 6－3 可以看出，圆波导中的主模是 TE_{11}模，其截止波长最长。图 6－26 示出圆波导模式的截止波长分布图。由图可见，当 $2.61a<\lambda<3.41a$ 时，圆波导中只能传输 TE_{11}模，可以做到单模工作。

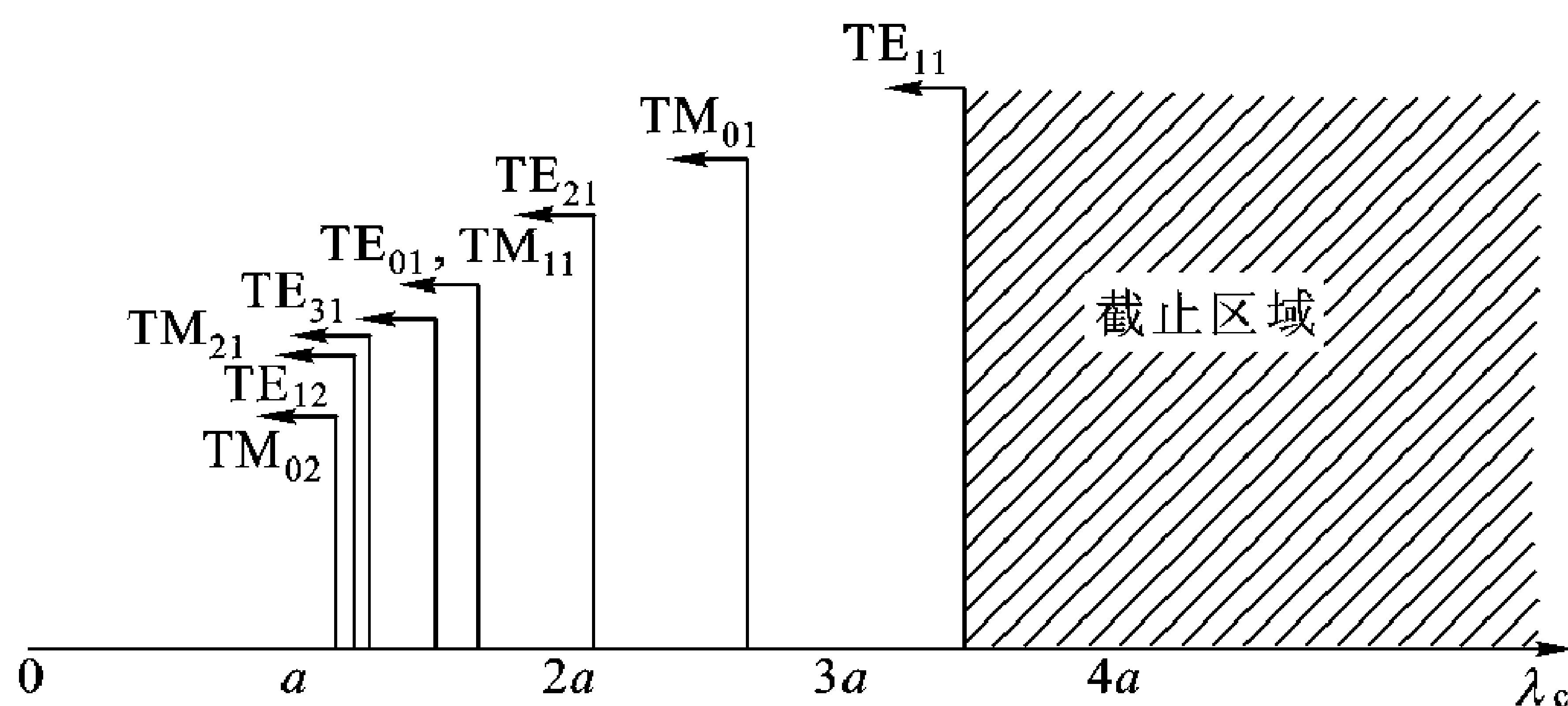


图 6－26　圆波导的模式截止波长分布图

汽车进入隧道为什么接收不到电台信号

汽车进入隧道，车载调幅收音机很难收到电台信号。这是因为调幅广播信号载波频率较低，波长较长。大地可用导体近似，隧道相当于一个圆波导。由于载波波长远大于隧道半径，此波导处于截止状态，因而广播电台发射的电磁波一进入隧道口就很快衰减，在隧道中就很难检测到了。

3. 3个主要模式及其应用

由各模式截止波长分布图(见图6-26)可知,圆波导中TE_{11}模的截止波长最长,其次是TM_{01}模。另外由于TE_{01}模场分布的特殊性,使之具有低损耗的特点。为此我们主要来介绍这3种模式的特点及用途。

(1) 主模TE_{11}模

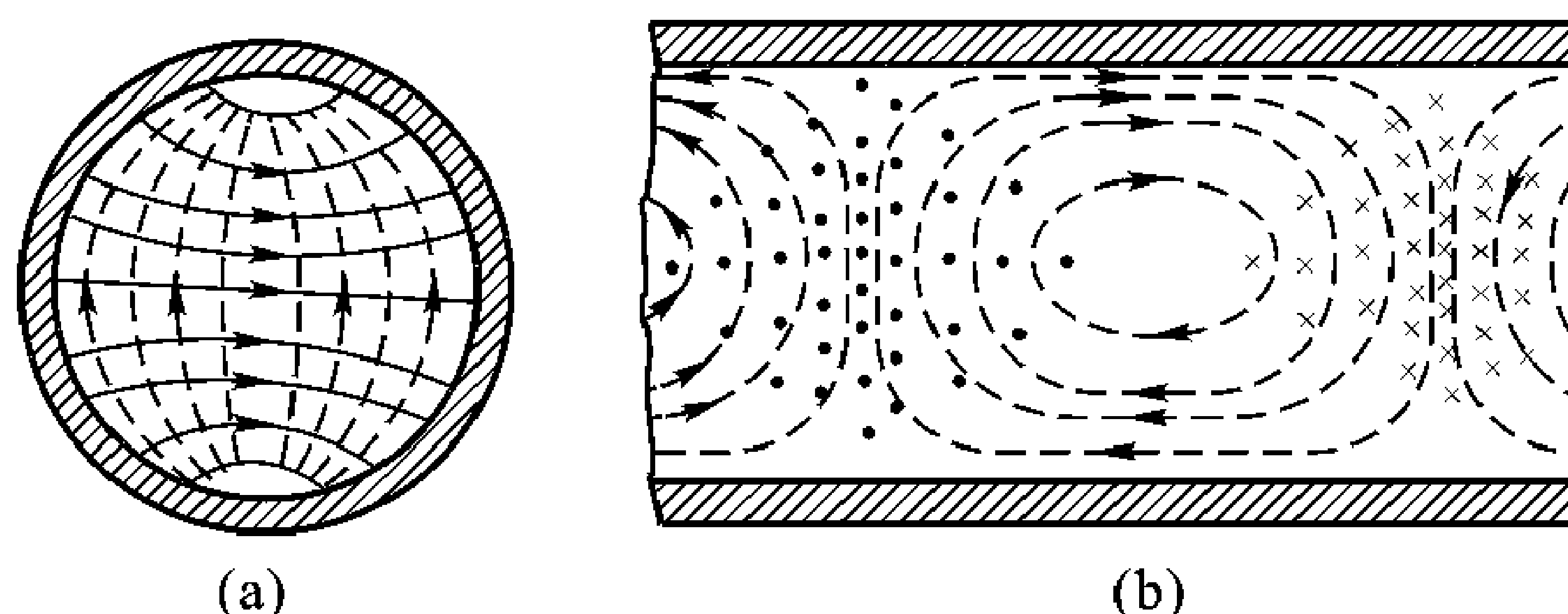


图6-27　圆波导TE_{11}模场分布

(a) 横截面　(b) 纵截面

TE_{11}模的截止波长最长,是圆波导中的最低次模,也是主模。它的场结构分布图如图6-27。由图可见,圆波导中TE_{11}模的场分布与矩形波导的TE_{10}模的场分布很相似,因此工程上容易通过矩形波导的横截面逐渐过渡变为圆波导,如图6-28,从而构成方圆波导变换器。

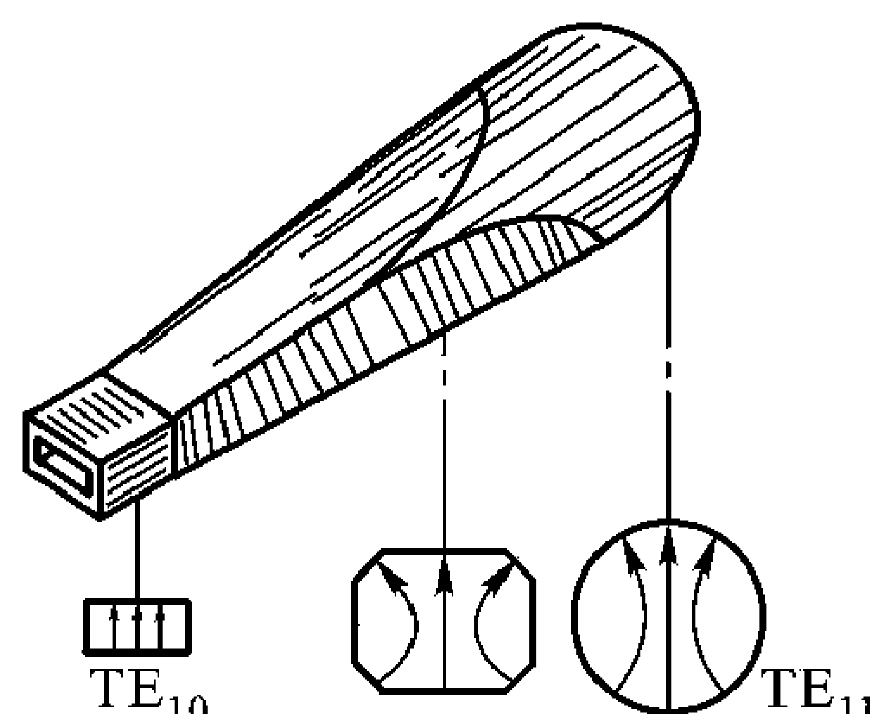


图6-28　由矩形波导TE_{10}模均匀过渡到圆波导TE_{11}模

但由于圆波导中极化简并模的存在,所以很难实现单模传输,因此圆波导不太适合于远距离传输。

(2) 圆对称TM_{01}模

TM_{01}模是圆波导的第一个高次模,其场分布如图6-29。由于它具有圆对称性,故不存在极化简并模,因此常作为雷达

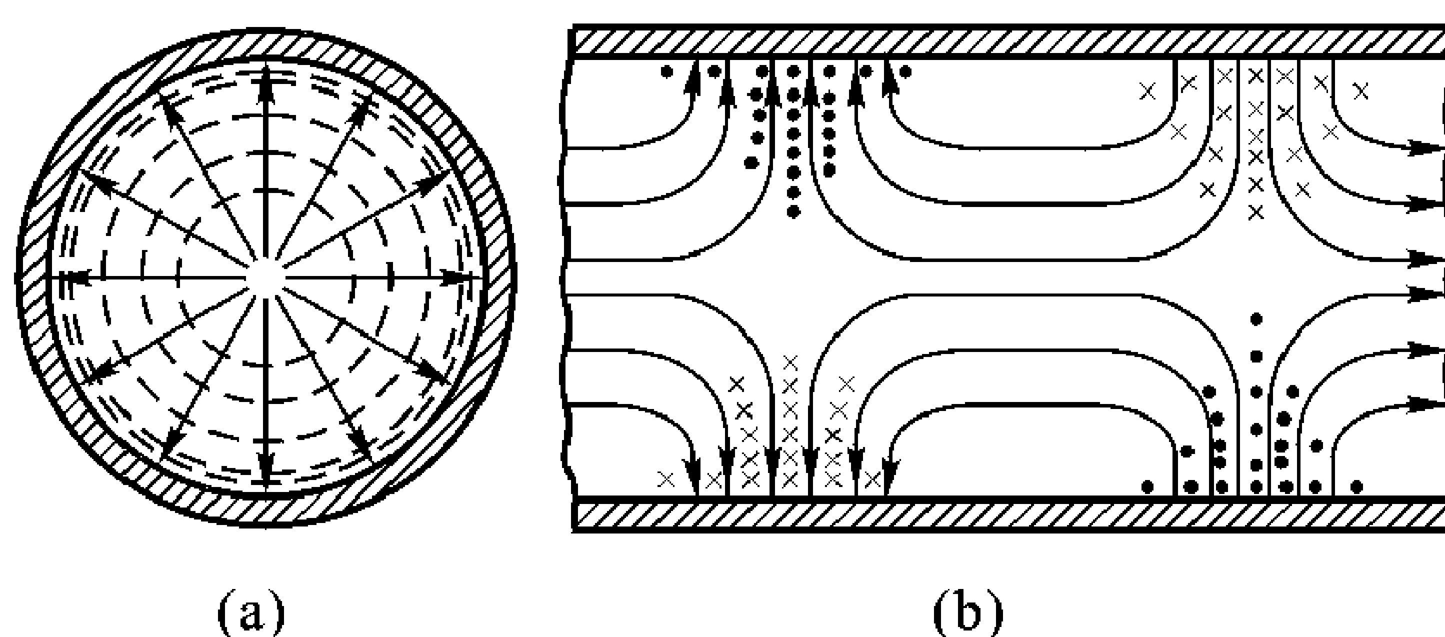


图6-29　圆波导TM_{01}场结构分布图

(a) 横截面　(b) 纵截面

天线与馈线的旋转关节中的工作模式，另外，因其磁场只有 H_φ 分量，故波导内壁电流只有纵向分量，因此它可以有效地和轴向流动的电子流交换能量，由此将其应用于微波电子管中的谐振腔及直线电子加速器中的工作模式。

⑶ 低损耗 TE_{01}模

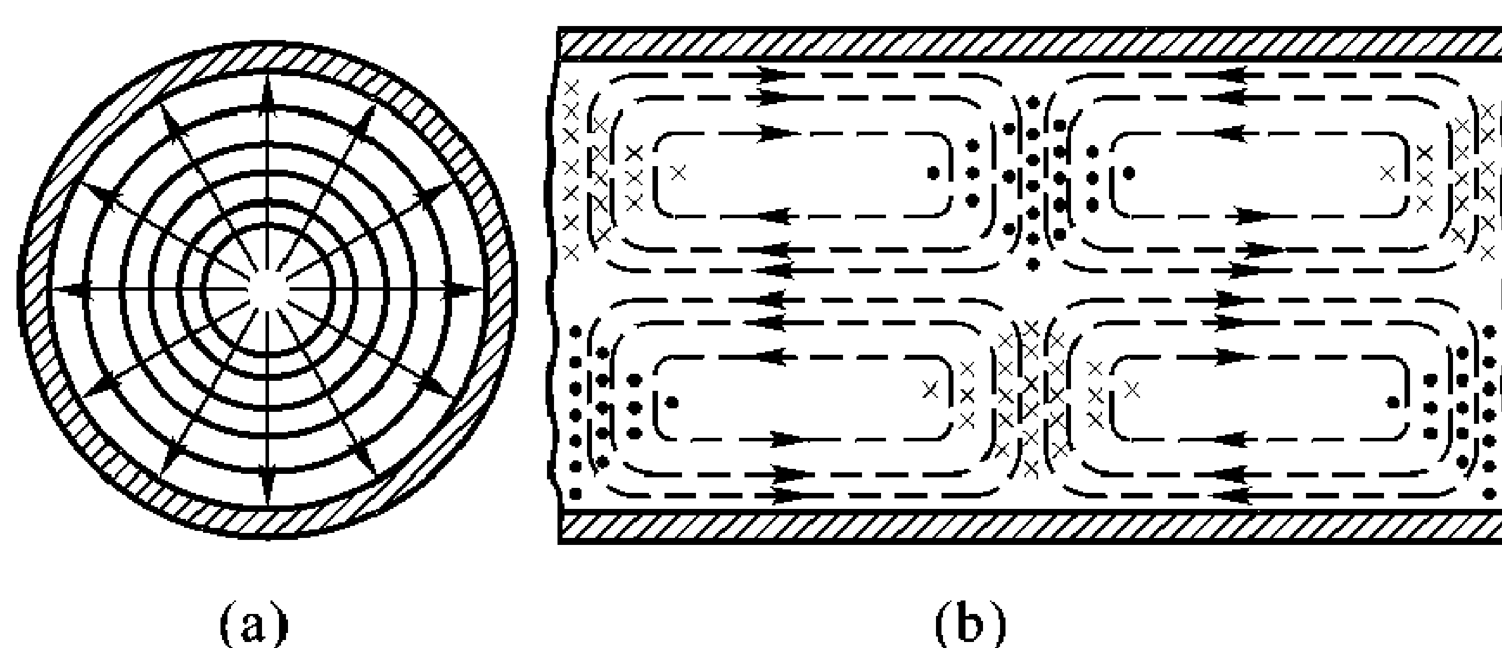


图 6-30 圆波导 TE_{01}模场结构分布图

TE_{01}模是圆波导的高次模式，比它低的模有 TE_{11}、TM_{01}、TE_{21}模，它与 TM_{11}模是简并模。TE_{01}也是圆对称模，故无极化简并。其电场分布如图 6-30。由图可见，磁场只有径向和轴向分量，故波导管壁电流无纵向分量，只有周向电流。因此，当传输功率一定时，随着频率升高，管壁的热损耗将单调下降，故其损耗相对其他模式来说是低的。因此可将工作在 TE_{01}模的圆波导用于毫米波的远距离传输或制作高 Q 值的谐振腔。

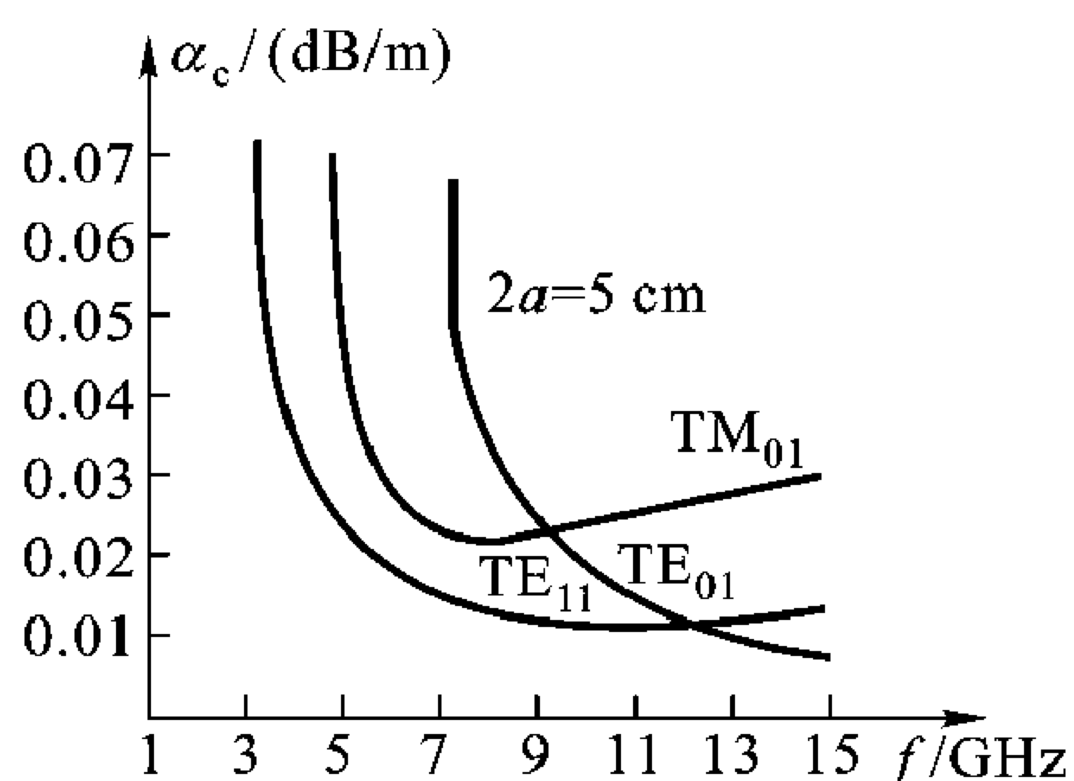


图 6-31 不同模式的导体衰减随频率变化曲线

为了更好地说明 TE_{01}模的低损耗特性，图 6-31 给出了圆波导 3 种模式的导体衰减曲线。

旋转波导结

前面已提到，由于 TM_{01}模场结构具有轴对称性，且只有纵向电流，适合于微波天线馈线系统的旋转铰链的工作模式。一般来说，频率高于 C 波段，雷达发射机微波脉冲功率用矩形波导输出，并通过天线辐射出去，雷达波束的扫描一般要借助天线的旋转实现。图 6-32 所示的旋转波导结，在天线旋转的情况下仍能使高功率微波顺利通过。

由于圆波导的对称性，天线的转动部分在圆波导段比较容易实现。只要转动部分与固定部分电气接触性能好，不会影响波的传播。但是雷达微波功率通

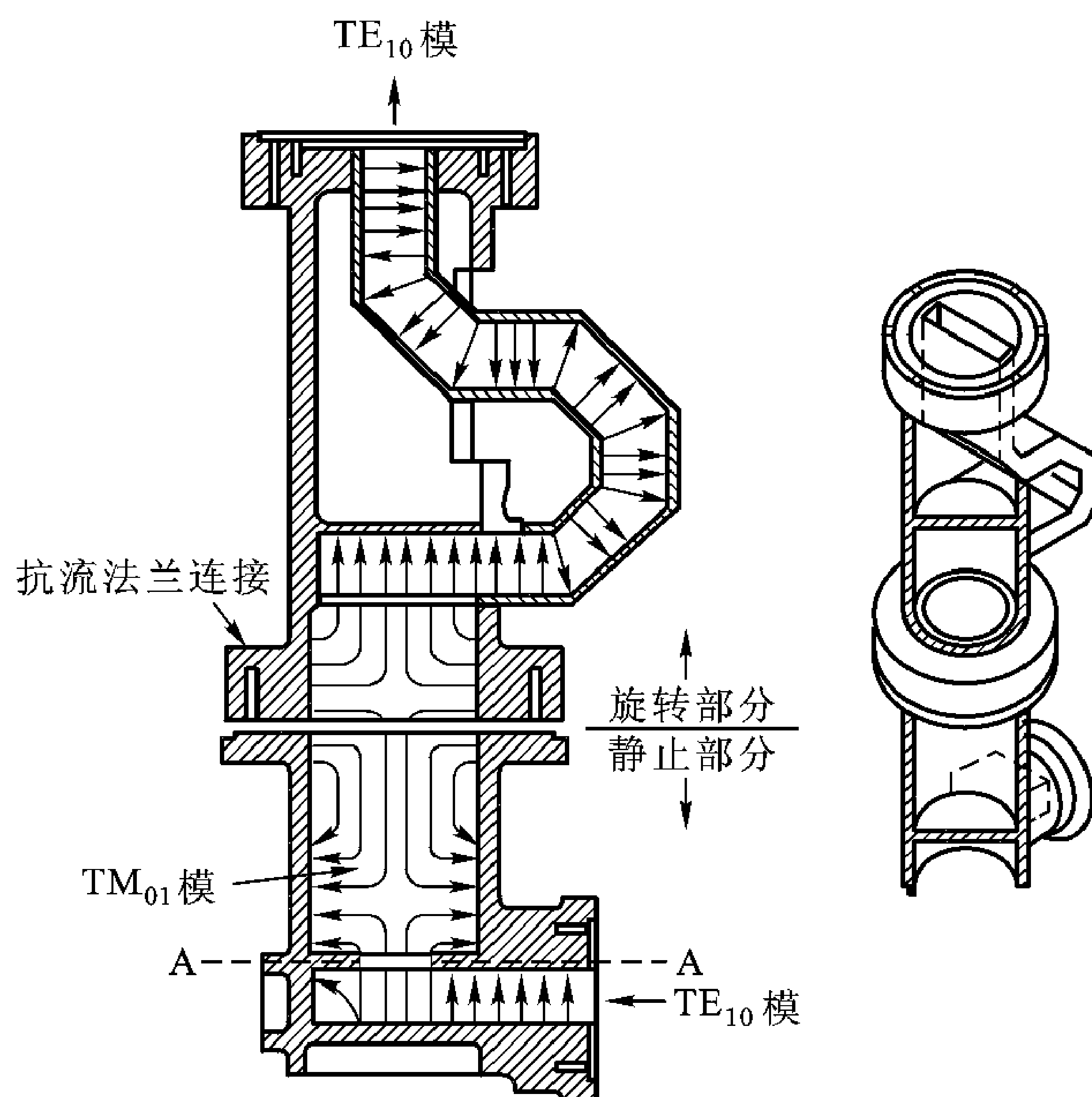


图 6－32　由两个方—圆波导过渡组成的旋转波导结

过矩形波导输出，辐射天线也与矩形波导相连，这样就需要先从矩形波导过渡到圆波导，再从圆波导过渡到矩形波导。这里要解决两个问题：一是矩形波导与圆波导的有效过渡，二是圆波导固定部分与转动部分良好的电气接触性能。第二个问题用所谓抗流法兰给予解决。如图 6－32 所示，它是在离开圆波导壁 $\lambda/4$ 处纵向开 $\lambda/4$ 槽，槽末端短路，其阻抗为零，经过开槽部分 $\lambda/4$ 变换，其阻抗为无穷大，在那个地方串联一转动部分与固定部分接触的小电阻，还是开路，再经过径向 $\lambda/4$ 变换，从波导内壁看，尽管转动部分与固定部分机械上不接触，但电气上还是短路，不影响圆波导中波的传播。至于第一个问题，即矩形波导到圆波导的有效过渡，要使矩形波导 TE_{10}模场有效地耦合到圆波导并在圆波导中激励起所希望的工作模式。图中圆波导选的是 TM_{01}模。耦合孔开在矩形波导宽边中间，中心离矩形波导短路面 $\lambda_g/4$，耦合孔附近的场近似于圆对称，通过耦合孔漏泄到圆波导的场也近似于圆对称，与 TM_{01}模在 AA 面电场相吻合。这样就将圆波导中 TM_{01}模优先激励起来。从圆波导到矩形波导的过渡也可作类似解释。3 个 90°波导弯头则是使天线轴线与圆波导转动部分轴线一致。

6.4　平板介质波导

随着频率提高，尤其进入光波段，金属不再被视为良导体，不宜作为波导

结构的材料，而对光透明或光传播损耗很小的介质就成为波导的首选材料。在毫米波与亚毫米波波段，作为基板材料，金属还在应用，以支撑整个介质波导[图 6－33（a）是其截面]，电磁波主要限制在 ε_g的导模层中传播。夹在导模层和基板之间的缓冲层，其介电系数 $\varepsilon_f < \varepsilon_g$，缓冲层中电磁场从导模层到金属基板呈指数衰减，使金属基板对传播电磁波损耗的影响大大减小。平板介质光波导结构材料全部为介质[图 6－33（b）是其截面]，基片材料可以是硅、砷化镓，也可以是玻璃，用微电子工艺在其上蒸镀一层介质膜，厚度在微米级，覆盖层也可以是空气。如果导模层的介电系数 ε_g比相邻介质的介电系数大，那么当导模层中倾斜投射到相邻介质交界面波的入射角大于临界角时就发生全内反射，电磁波就可限制在导模层中曲折向前传播。

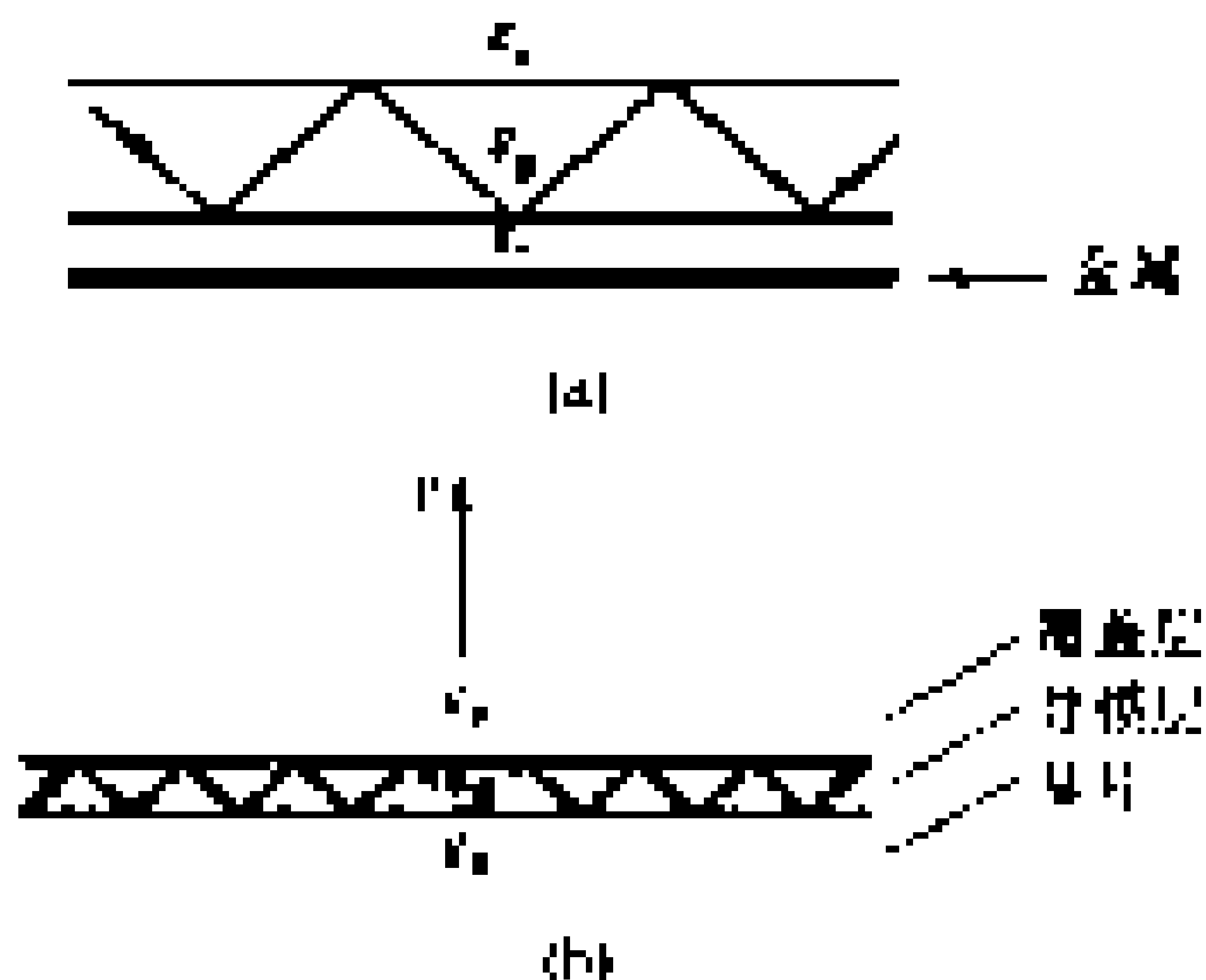


图 6－33　平板介质波导
（a）毫米波介质波导　（b）平板介质光波导

6.4.1　平板介质波导的横向谐振原理

横向谐振原理是分析介质波导的有效方法。下面以图 6－34 的非对称单层介质波导为例证明，横向谐振包含波限制在导模层中传播必要而充分的条件。

参看图 6－34（a），区域Ⅱ为导模层，区域Ⅰ、Ⅲ可理解为覆盖层与基片，如果电磁波局限在介电常数为 $\varepsilon_{r2}\varepsilon_0$ 导模层中传播，那么导模层中倾斜投射到导模层与相邻介质交界面时一定发生全内反射，使得波沿 x 方向曲折前进。这只有当导模层介质的介电系数比相邻介质的介电系数大，即 $\varepsilon_{r2} > \varepsilon_{r1}$，$\varepsilon_{r2} > \varepsilon_{r3}$，且入射角大于临界角时才能发生，同时导模层中波来回反射一次在 z 方向相移为 2π 整倍数，使得多次反射的波相位相同而不相互抵消。因为在 z 方向波全反射，

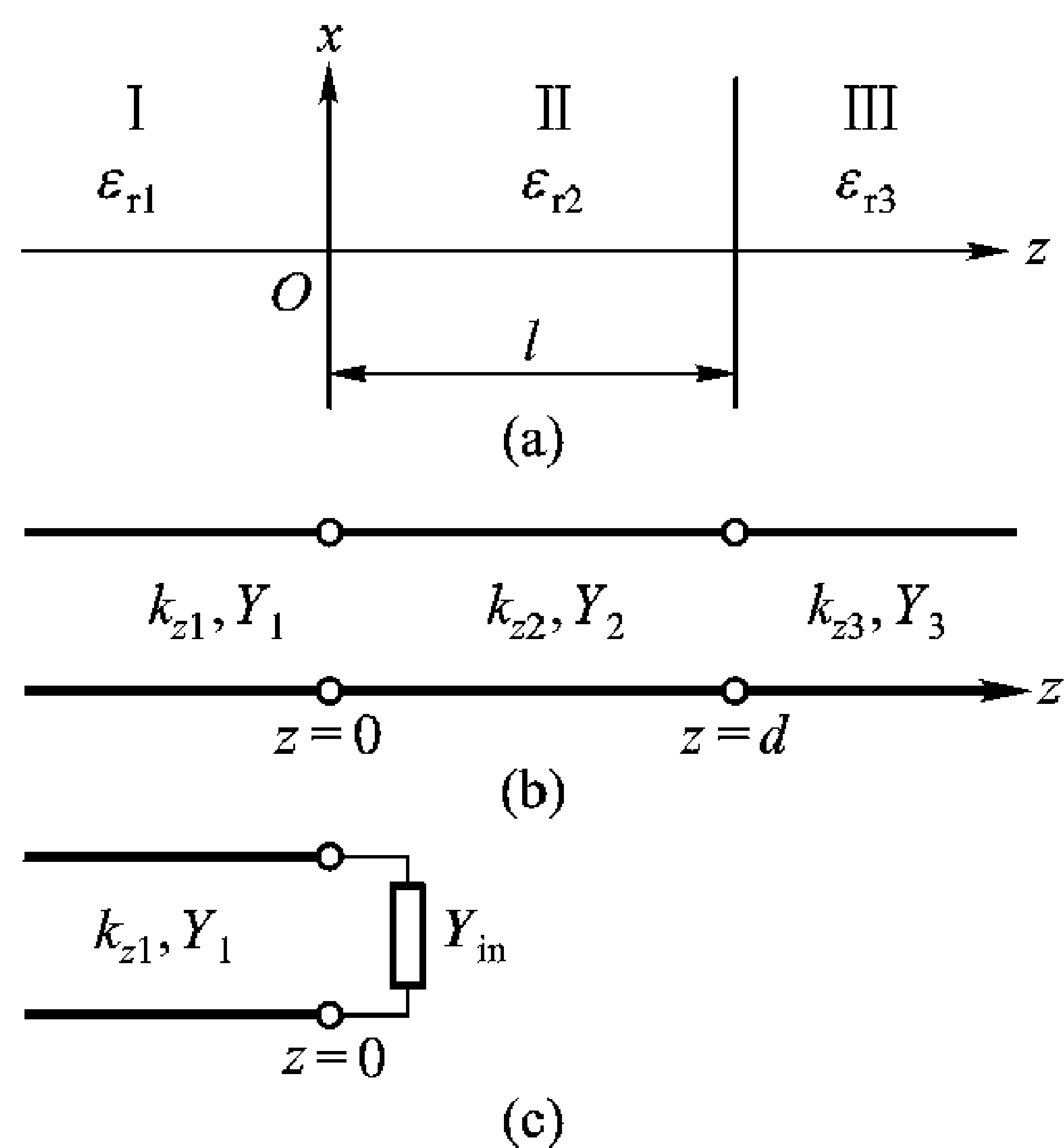


图 6－34　平板介质波导
（a）平板介质波导　（b）、（c）等效电路

入射波与反射波的干涉必形成驻波，即在 z 方向发生谐振。如果波传播的 x 方向定义为纵向，z 方向相对于波传播方向就是横向，故 z 方向谐振叫做横向谐振。根据波传播的传输线理论，z 方向波的传播可用图 6－34（b）、（c）的电路等效，横向谐振要求坐标轴 z 等于常数的任一参考面，比如 $z=0$，向 $z<0$、$z>0$ 区域看进去的输入阻抗或输入导纳之和等于零，即

$$\overleftarrow{Y}+\overrightarrow{Y}=0 \tag{6.4.1}$$

式中

$$\overleftarrow{Y}=Y_1$$

$$\overrightarrow{Y}=Y_2\frac{Y_3+\mathrm{j}Y_2\tan k_{z2}l}{Y_2+\mathrm{j}Y_3\tan k_{z2}l}$$

代入式（6.4.1）得到

$$Y_1+Y_2\frac{Y_3+\mathrm{j}Y_2\tan k_{z2}l}{Y_2+\mathrm{j}Y_3\tan k_{z2}l}=0 \tag{6.4.2}$$

式（6.4.2）可改写成

$$\tan k_{z2}l=\mathrm{j}\frac{Y_2(Y_1+Y_3)}{Y_1Y_3+Y_2^2} \tag{6.4.3}$$

如果电磁波能在薄层介质Ⅱ中传播，k_{z2}必然是实数，相应的特征导纳 Y_2 也是实数。从式（6.4.3）可见，此时 Y_1、Y_3 一定是虚数，相应地 k_{z1}，k_{z3}也是虚数，因而区域Ⅰ、Ⅲ在 z 方向没有波的传播，k_{z1}，k_{z3}为虚数的必要条件是介质Ⅱ的介电常数必须大于介质Ⅰ和Ⅲ的介电常数，即

$$\varepsilon_{r2}>\varepsilon_{r1}$$

$$\varepsilon_{r2}>\varepsilon_{r3}$$

式（6.4.3）还可改写为

$$\frac{Y_2-Y_1}{Y_2+Y_1}=\frac{Y_2+Y_3}{Y_2-Y_3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2k_{z2}l} \tag{6.4.4}$$

定义介质分界面的反射系数

$$\Gamma_{12}=-\Gamma_{21}=\frac{Y_1-Y_2}{Y_1+Y_2}$$

$$\Gamma_{23}=-\Gamma_{32}=\frac{Y_2-Y_3}{Y_2+Y_3}$$

则式（6.4.4）可写成

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z2}l}\Gamma_{23}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{z2}l}\Gamma_{21}=1 \tag{6.4.5}$$

式（6.4.5）表明，波在介质2沿 z 方向来回反射一次后，没有发生变化，倘若反射系数的模 $|\Gamma_{21}|$、$|\Gamma_{23}|$ 小于1，式（6.4.5）不能成立，只有 $|\Gamma_{21}|$、$|\Gamma_{23}|$ 等于1才能使式（6.4.5）成立，这就要求 Y_1、Y_3 为纯虚数。

$$Y_1 = \mathrm{j}x_1$$

$$Y_3 = \mathrm{j}x_3$$

其中 x_1、x_3 为实数，因此介质分界面的反射系数为

$$\Gamma_{2i} = \frac{Y_2 - Y_i}{Y_2 + Y_i} = \frac{Y_2 - \mathrm{j}x_i}{Y_2 + \mathrm{j}x_i} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi_i} \quad (i = 1,3) \tag{6.4.6}$$

$$\varphi_i = \arctan\left(\frac{x_i}{Y_2}\right) \quad (i = 1,3) \tag{6.4.7}$$

利用上面两式，式(6.4.5)还可改写为

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\varphi_3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2k_{z2}l} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2n\pi} \tag{6.4.8}$$

或者

$$\varphi_1 + \varphi_3 + k_{z2}l = n\pi \tag{6.4.9}$$

式(6.4.8)~(6.4.9)表明，电磁波沿导模层(介质 2)来回反射一次，其总相移为 2π 的整倍数。

归结起来，电磁波限制在导模层(介质 2)中传播的条件是：

(1) $\varepsilon_{r2} > \varepsilon_{r1}$，$\varepsilon_{r2} > \varepsilon_{r3}$

(2) $\varphi_1 + \varphi_3 + k_{z2}l = n\pi$

条件(1)保证导模层介质 2 与介质 1、3 分界面发生全内反射，而条件(2)则保证导模层内波来回反射一次总相移为 2π 整倍数，使得介质分界面多次反射的波不会相互抵消而沿导模层曲折前进。

横向谐振条件 $\sum Y = 0$ (或 $\sum Z = 0$)包含了波在波导中传播的必要而充分条件，下面我们主要用横向谐振条件求平板介质波导的特性。

6.4.2　单层平板介质光波导

置于自由空间的相对介电常数为 ε_{r1}、厚度为 $2l$ 的薄层平板介质就构成了本节讨论的最简单的对称单层平板介质光波导，如图 6-35 (a)，并可用图 6-35 (b)和(c)的电路等效。

由于所讨论的单层平板介质光波导具有对称性，其场分布有两种可能，一种是偶对称，对于电压来说，对称面($z = 0$)为波幅，相当于开路；另一种是奇对称，对称面对于电压来说是波节，相当于短路。对称面开路、短路两种情况下的等效电路示于图 6-35 (d)和(e)。因此光沿对称结构的单层平板介质波导的传播可以分为 4 种情况，即

$$\text{对称面开路}\begin{cases}\text{TE 模}\\ \text{TM 模}\end{cases} \qquad \text{对称面短路}\begin{cases}\text{TE 模}\\ \text{TM 模}\end{cases}$$

对称面开路

前已指出，色散特性可通过横向谐振条件求得。对于图 6-35 (d)所示的

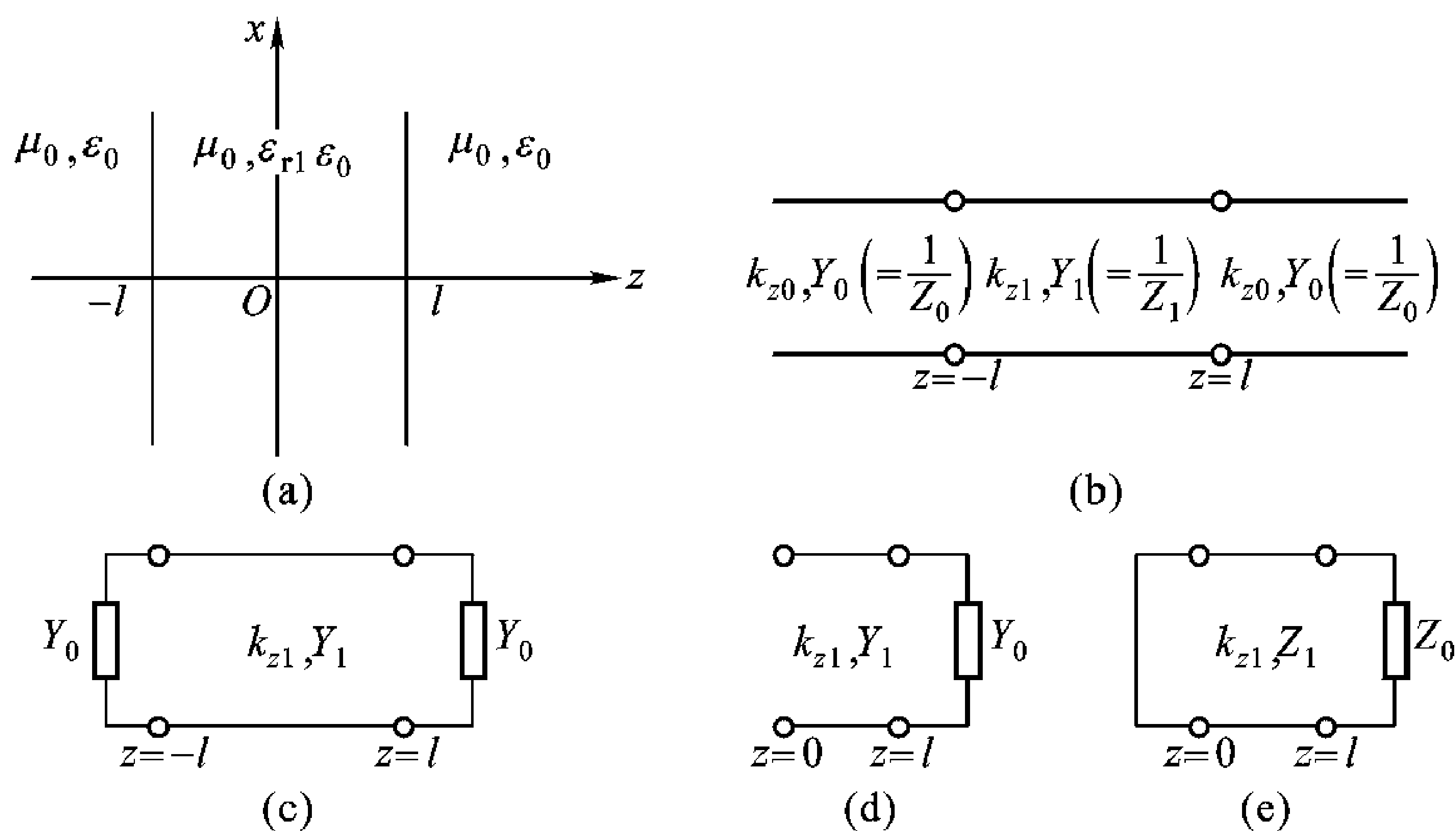


图 6-35 对称单层平板介质波导及其等效电路

(a) 对称单层平板介质波导 (b)、(c)、(d)、(e) 等效电路

对称面开路的等效电路，横向谐振条件为

$$\overrightarrow{Y}+\overleftarrow{Y}=0 \tag{6.4.10}$$

式中 $\overrightarrow{Y}$ 和 $\overleftarrow{Y}$ 分别为 $z=l$ 向右和向左看去的输入导纳。显然，从 $z=l$ 向右看去的输入导纳为

$$\overrightarrow{Y}=Y_0 \tag{6.4.11}$$

从 $z=l$ 向左看去的输入导纳为

$$\overleftarrow{Y}=\mathrm{j}Y_1\tan\ k_{z1}l \tag{6.4.12}$$

式中

$$Y_i=\begin{cases}\dfrac{k_{zi}}{\omega\mu_0} & \text{(TE 模)}\\[2ex] \dfrac{\omega\varepsilon_{ri}\varepsilon_0}{k_{zi}} & \text{(TM 模)}\end{cases}$$

$$k_{zi}=\sqrt{k_0^2\varepsilon_{ri}-k_x^2}$$

其中 $i=0$ 或 1，分别表示自由空间和介质中的量。

将式(6.4.11)、(6.4.12)代入式(6.4.10)，横向谐振条件为

$$Y_0+\mathrm{j}Y_1\tan\ k_{z1}l=0 \tag{6.4.13}$$

对于单层平板介质光波导波限制在薄层介质中传播，k_{z1}是实数，k_{z0}是虚数，要求 k_1、k_0 和 k_x 满足如下关系

$$k_0\sqrt{\varepsilon_{r1}}>k_x>k_0 \tag{6.4.14}$$

此时对于 $z>l$ 的区域

$$k_{z0} = -\mathrm{j}\alpha_0 \tag{6.4.15}$$

$$\alpha_0 = \sqrt{k_x^2 - k_0^2}$$

α_0 是实数。

下面再分 TE、TM 两种情况进一步讨论色散方程(6.4.13)。

(1) TE 模

对于 TE 模，特征导纳 Y_0、Y_1 为

$$Y_0 = k_{z0}/\omega\mu = -\mathrm{j}\alpha_0/\omega\mu$$

$$Y_1 = k_{z1}/\omega\mu$$

代入色散方程(6.4.13)，得到

$$-\mathrm{j}\frac{\alpha_0}{\omega\mu} + \mathrm{j}\frac{k_{z1}}{\omega\mu}\tan k_{z1}l = 0$$

再将 $\alpha_0 = \sqrt{k_x^2 - k_0^2}$，$k_{z1} = \sqrt{k_0^2\varepsilon_{\mathrm{r1}} - k_x^2}$代入并引入有效介电常数$\varepsilon_{\mathrm{eff}}$，其定义为

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}} = (k_x/k_0)^2$$

上式成为

$$\tan k_0 l\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r1}} - \varepsilon_{\mathrm{eff}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathrm{eff}} - 1}{\varepsilon_{\mathrm{r1}} - \varepsilon_{\mathrm{eff}}}} \tag{6.4.16}$$

有效介电常数 $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$的物理意义是电磁波沿单层平板介质光波导 x 方向的波数等效于电磁波在介电常数为$\varepsilon_{\mathrm{eff}}$的均匀介质中的波数。

式(6.4.16)就是对称面开路 TE 模的色散方程，由此可计算 x 方向的波数 k_x 或有效介电常数$\varepsilon_{\mathrm{eff}}$。式(6.4.16)是一个超越方程，直接从 $k_0 l$ 计算$\varepsilon_{\mathrm{eff}}$比较困难，但给定 $\varepsilon_{\mathrm{eff}}$求 $k_0 l$ 则比较容易。可把式(6.4.16)改写成

$$k_0 l = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r1}} - \varepsilon_{\mathrm{eff}}}}\left[n\pi + \arctan\sqrt{\frac{\varepsilon_{\mathrm{eff}} - 1}{\varepsilon_{\mathrm{r1}} - \varepsilon_{\mathrm{eff}}}}\right] \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{6.4.17}$$

分析式(6.4.17)，当 $k_0 l = 0$ 时，$\varepsilon_{\mathrm{eff}} = 1$，而当 $k_0 l$ 趋于无穷大时，$\varepsilon_{\mathrm{eff}} = \varepsilon_{\mathrm{r1}}$。这是因为 $k_0 l = 0$ 时，相当于薄层介质消失，平板介质波导系统等效于自由空间，故 $\varepsilon_{\mathrm{eff}} = 1$。当 $k_0 l \to \infty$ 时，整个空间被相对介电系数 $\varepsilon_{\mathrm{r1}}$的介质填充，有效介电系数自然趋于 $\varepsilon_{\mathrm{r1}}$。

(2) TM 模

对于 TM 模

$$Y_0 = \omega\varepsilon_0/k_{z0} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0/\alpha_0 = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0/k_0\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{eff}} - 1}$$

$$Y_1 = \omega\varepsilon_{\mathrm{r1}}\varepsilon_0/k_{z1} = \omega\varepsilon_{\mathrm{r1}}\varepsilon_0/k_0\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r1}} - \varepsilon_{\mathrm{eff}}}$$

将 Y_0、Y_1 代入色散方程(6.4.13)，同样可得

$$\tan k_0 l \sqrt{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{eff}} = -\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{eff}}{\varepsilon_{eff}-1}} \tag{6.4.18}$$

或者改写成

$$k_0 l = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{eff}}}\left[n\pi - \arctan\left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_{r1}-\varepsilon_{eff}}{\varepsilon_{eff}-1}}\right)\right] \quad (n=1,2,3,\cdots) \tag{6.4.19}$$

对称面短路时的色散特性作为练习读者自行推导。

图6－36给出了 $\varepsilon_{r1}=12$（相当于硅材料的相对介电常数）的单层平面介质光波导的色散曲线。横坐标为平板介质的相对厚度 l/λ，纵坐标为有效介电常数 ε_{eff}。图中给出了对称面开路（TE、TM模）和短路（TE、TM模）4种情况下最低模的色散特性。由图可见，TE模是最低模。

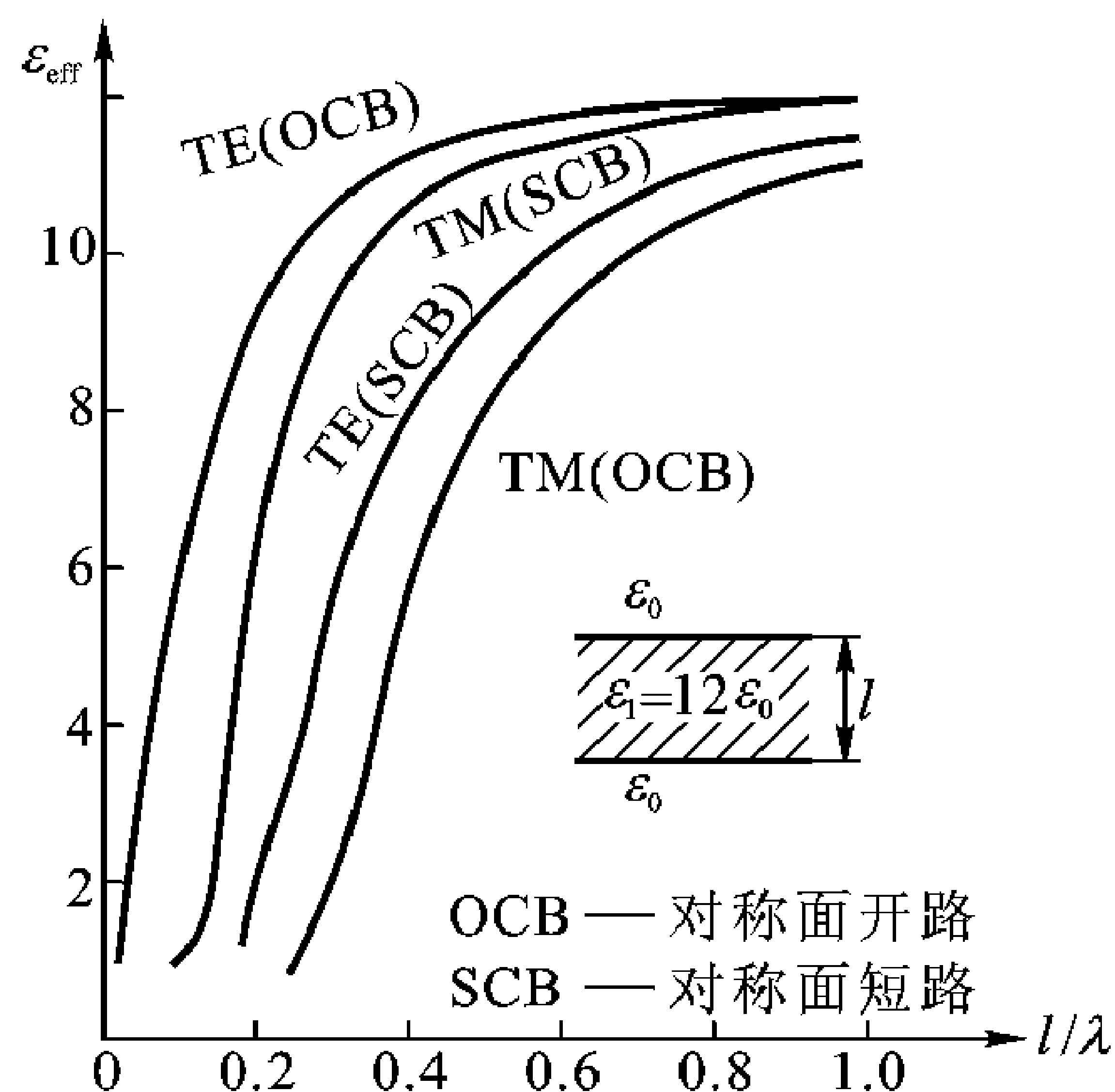


图6－36 对称单层平板介质的色散关系

场分布

下面以对称面开路TE模为例，求对称单层平板介质光波导横截面的场分布。

平板介质和自由空间的场量可表示成

$$E_{yi}(x,z) = -\varphi_i(x)V_i(z) \tag{6.4.20}$$

$$H_{xi}(x,z) = \varphi_i(x)I_i(z) \tag{6.4.21}$$

$$H_{zi}(x,z) = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial}{\partial x}E_{yi}(x,z) \tag{6.4.22}$$

其中 $i=0$ 或1，分别表示自由空间和平板介质中的量。无论在自由空间还是平板介质，x 方向都是均匀的，因而模式函数 $\varphi_0(x)$、$\varphi_1(x)$ 相同，且为

$$\varphi_i(x) = e^{-jk_x x} \quad (i=0,1)$$

平板介质在 z 方向被限制，既存在入射波也存在反射波，故模式函数的幅值，即等效传输线上的电压 $V_1(z)$、电流 $I_1(z)$ 为

$$V_1(z) = \frac{1}{2}(a e^{-jk_{z1}z} + b e^{jk_{z1}z})$$

$$I_1(z) = \frac{1}{2}Y_1(a e^{-jk_{z1}z} - b e^{jk_{z1}z})$$

式中 a、b 分别为入射波和反射波幅值。引入系数1/2主要是为了使以后所得

式子更简洁。对称面开路(即电压偶对称分布)时，对称面($z=0$)电压为波腹，电流 $I_1(0)=0$。因而在对称面入射波等于反射波，即 $b=a$。于是 $V_1(z)$、$I_1(z)$简化为

$$V_1(z)=a\cos k_{z1}z$$

$$I_1(z)=-ja\frac{k_{z1}}{\omega\mu}\sin k_{z1}z$$

所以，在平板介质内场量可表示成

$$E_{y1}(x,z)=-ae^{-jk_x x}\cos k_{z1}z \tag{6.4.23}$$

$$H_{x1}(x,z)=-\mathrm{j}a\frac{k_{z1}}{\omega\mu}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\sin k_{z1}z \tag{6.4.24}$$

$$H_{z1}(x,z)=-\frac{k_x}{\omega\mu}a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\cos k_{z1}z \tag{6.4.25}$$

平板介质以外的空间，在正、负 z 方向均趋于无穷，不存在反射波。又因 k_{z0}是虚数，对于 $z>l$ 的空间，$k_{z0}=-\mathrm{j}\alpha_0$，$\alpha_0$ 是实数。所以 $z>l$ 的空间中场量为

$$E_{y0}=-c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\alpha_0(z-l)} \tag{6.4.26}$$

$$H_{x0}=-\mathrm{j}\frac{\alpha_0}{\omega\mu}c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\alpha_0(z-l)} \tag{6.4.27}$$

$$H_{z0}=-\frac{k_x}{\omega\mu}c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{e}^{-\alpha_0(z-l)} \tag{6.4.28}$$

任意常数 α 由激励条件确定，介质分界面切向场量连续条件可决定平板介质以外的场量表达式中的系数 c。图 6－37 是平板介质光波导横截面内场分布的图解，(a)、(b)表示对称面开路 TE_0、TE_2 模场分布，而(c)、(d)则表示对称面短路 TE_1、TE_3 模场分布。由图可见，电磁场主要限制在介质内。介质表面虽然还有部分电磁能量，但并不沿 z 方向传播，随离开表面距离的增加而指数衰减。电磁波主要限制在平板介质中传播，但在介质表面仍可检测到波的存在，这就是把这类波叫做表面波的原因。

例 6－5 单界面[图 6－38(a)]能否传播表面波？即求证电磁波能否束缚在单个介质交界面传播。

解： 单界面[图 6－38(a)]的横向等效网络如图6－38(b)，取交界面 $x=0$ 为参考面，横向谐振条件要求

$$Z^{\uparrow}+Z^{\downarrow}=0$$

$$Z^{\uparrow}=\begin{cases}\omega\mu/k_{xa} & (\text{TE 模})\\ k_{xa}/\omega\varepsilon_a & (\text{TM 模})\end{cases}$$

图 6－37 单层平板介质波导中的电场分布

(a)、(b) 对称面开路 TE_0、TE_2 (c)、(d) 对称面短路 TE_1、TE_3 模

$$Z^{\downarrow}=\begin{cases}\omega\mu/k_{xs} & (\text{TE 模})\\ k_{xs}/\omega\varepsilon_s & (\text{TM 模})\end{cases}$$

目前已知的介质，μ 不可能为负数，所以对于 TE 模，$Z^{\uparrow}+Z^{\downarrow}=0$ 得不到满足，但对 TM 模，对于某些介质，如等离子体，ε 可以为负，所以对于 TM 膜，$Z^{\uparrow}+Z^{\downarrow}=0$ 在特定的单界面介质系统中可以成立，也就是说对于 TM 模，电磁波束缚在单个介质交界面

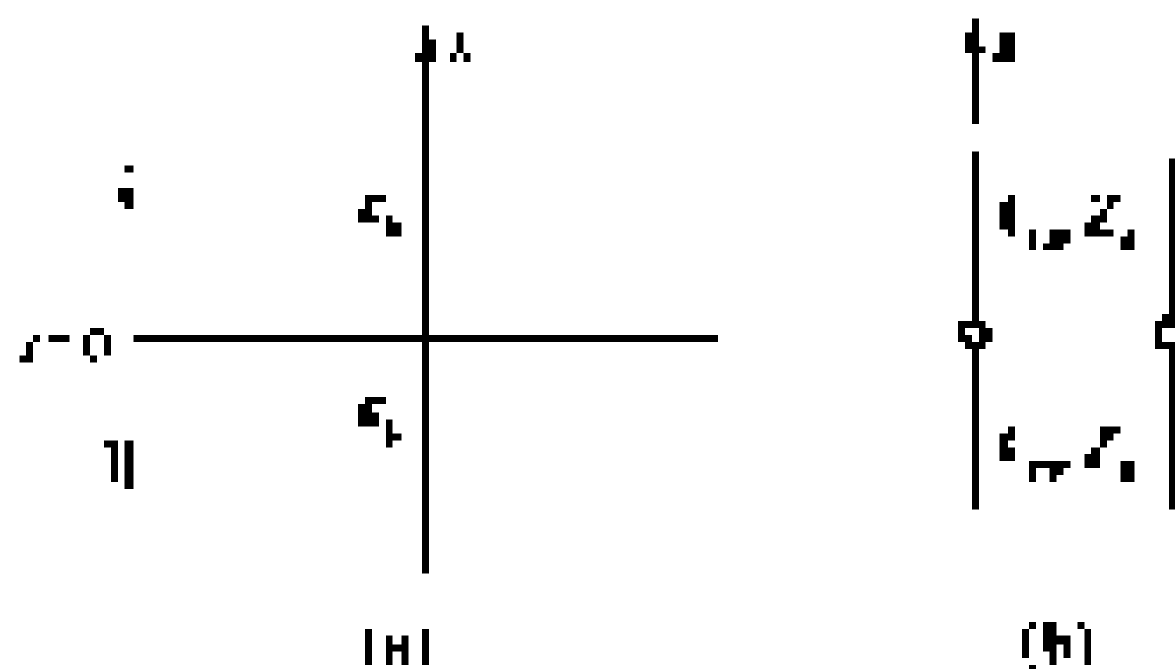


图 6－38 例 6－5 单界面及其等效电路

(a) 单界面 (b) 等效电路

传播是有可能的。对于机械波，地震波就可以沿地球表面传播。

非对称毫米波介质波导色散关系举例

图 6-39 (a)所示为非对称毫米波介质波导，其结构参数如下：衬底为导电板，$\varepsilon_{rs}=1-j10^7$。覆盖层为空气，$\varepsilon_{ra}=1$。平板介质 g 有一定损耗，$\varepsilon_{rg}=12-j10^{-3}$，相当于硅材料。夹在衬底和平板介质 g 之间的介质 f 损耗很小，略去不计，$\varepsilon_{rf}=2.56$。所以$\mathrm{Re}(\varepsilon_{rg})>\varepsilon_{ra}$, $\mathrm{Re}(\varepsilon_{rg})>\varepsilon_{rf}$,电磁波限制在平板介质 g 中传播。在介质 f 中,场按指数规律衰减,愈接近衬底场愈弱。所以夹层介质 f 的引入,使导电板上的场减弱,从而减小了导电板上的功率损耗。

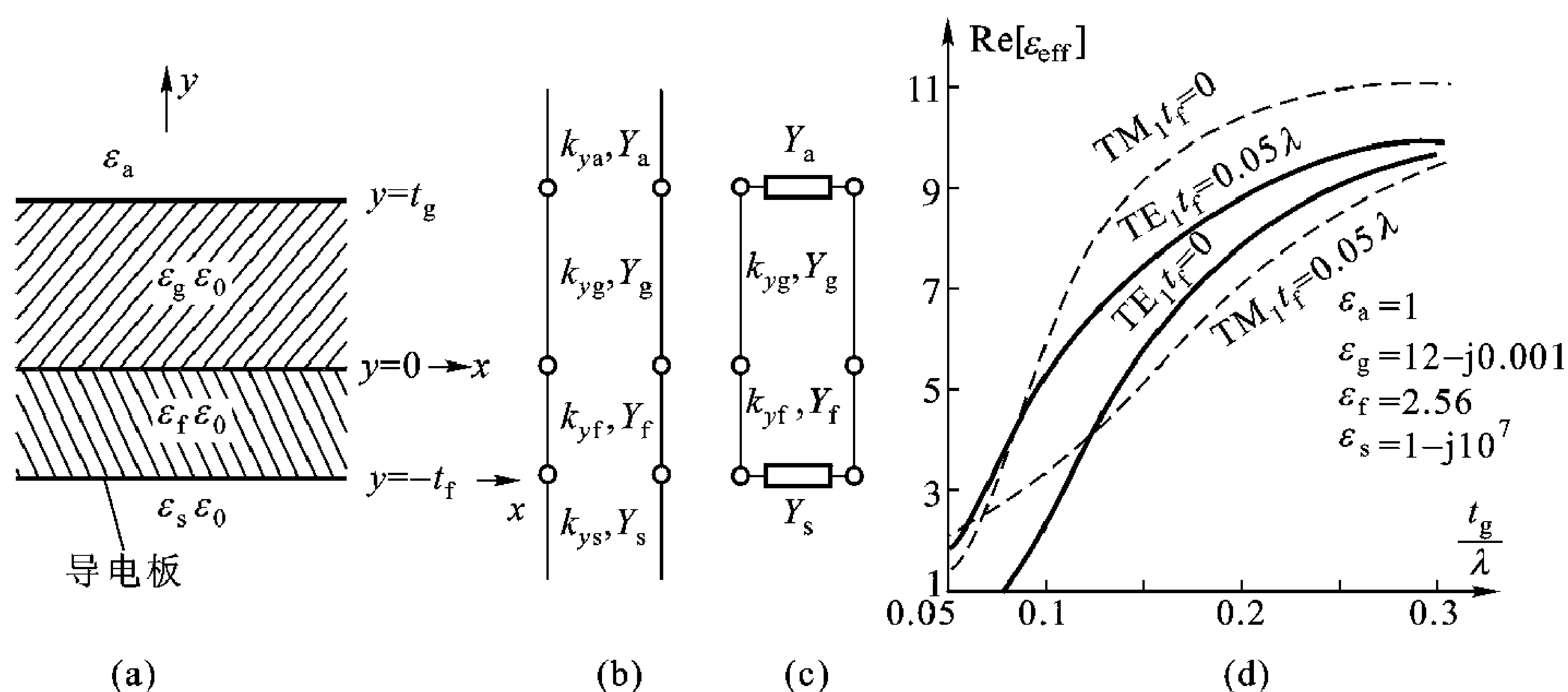


图 6-39　多层介质波导

(a) 多层介质波导　(b)、(c)等效电路　(d) 色散特性

先得出图 6-39 (a)的等效电路图 6-39(b)和(c)。有损耗的导电板及空气用趋于无穷长的传输线或负载电导 Y_s、Y_a表示。介质 g 和 f 则用有限长度的传输线等效。k_{ya}、Y_a、k_{yg}、Y_g，k_{yf}、Y_f分别为空气 a、平板介质 g、夹层介质 f 的等效传输线的传播常数和特征导纳。

$$k_{yi}^2=k_0^2\varepsilon_{ri}-k_x^2 \tag{6.4.29}$$

$$Y_i=\begin{cases}k_{yi}/\omega\mu & (\text{TE 模})\\ \omega\varepsilon_{ri}\varepsilon_0/k_{yi} & (\text{TM 模})\end{cases} \tag{6.4.30}$$

i = a，g，f，s，表示空气、平板介质 g、夹层介质 f 和导电板中的量。

取 $y=0$ 为参考面，沿正、负 y 方向看进去的输入导纳 $Y^{\uparrow}$、$Y^{\downarrow}$ 为

$$Y^{\uparrow}=Y_g\frac{Y_a+jY_g\tan k_{yg}t_g}{Y_g+jY_a\tan k_{yg}t_g} \tag{6.4.31}$$

$$Y^{\downarrow}=Y_f\frac{Y_s+jY_f\tan k_{yf}t_f}{Y_f+jY_s\tan k_{yf}t_f} \tag{6.4.32}$$

式中 t_g、t_f分别表示平板介质 g 和夹层 f 的厚度

由横向谐振条件决定的色散方程为

$$Y_g\frac{Y_a+jY_g\tan k_{yg}t_g}{Y_g+jY_a\tan k_{yg}t_g}+Y_f\frac{Y_s+jY_f\tan k_{yf}t_f}{Y_f+jY_s\tan k_{yf}t_f}=0 \tag{6.4.33}$$

将式(6.4.29)代入上式，就得到关于表面波波数 k_x 与 ω 关系的方程。如果定义有效介电常数

$$\varepsilon_{eff}=(k_x/k_0)^2 \tag{6.4.34}$$

由式(6.4.33)求得 k_x，即可求得 ε_{eff}。

图 6－39 (d)就是按式(6.4.33)数值计算得到的色散曲线。横坐标是 t_g/λ，纵坐标是有效介电常数 ε_{eff}的实部，t_f是参变数。由图 6－39 (d)可见，最低模式是 TM_1，此结果并不和对称结构的单层介质波导的色散曲线相矛盾。对称结构的单层介质波导最低模式是对称面上电压为波幅的 TE_0 模，而图 6－39 (a)所示的多层介质波导衬底为导体，对于电压为短路，故最低模式只能是 TM_1 模。

6.4.3　条形介质光波导的近似分析——EDC 法

平板介质光波导中光被限制在整个导模层中传播，而对于图 6－40 (a)所示条形介质光波导，光波主要被限制在条形介质中传播，光能的利用率大大提高。由于 $x=0$，a 侧面的不连续使得对条形介质光波导的严格分析比平板介质光导要困难得多，但目前也已发展了多种近似方法用于对条形介质波导的分析。有效介电系数法(EDC 法)就是比较成功的一种方法，不仅适用于介质光波导，也适用于对毫米波集成波导的分析。

用 EDC 法计算条形介质光波导的纵向波数时，先求条形介质光波导内部区域和外部区域的有效介电常数 ε_{effi}和 ε_{effo}，并用图 6－40 (b)的单层介质光波导去等效。于是该等效单层介质光波导的纵向传播常数即条形介质光波导的传播常数。我们习惯上用有效介电常数 ε_{eff}表示纵向传播常数 k_z，即

$$\varepsilon_{eff}=(k_z/k_0)^2$$

(1) 内部区域有效介电常数 ε_{effi}的计算

计算内部区域的有效介电常数 ε_{effi}，先把图 6－40 (a)所示条形介质光波导等效成图 6－40 (c)所示的多层平板介质波导，即条形介质在 x 方向不受限制，利用 y 方向谐振条件

$$Y^{\uparrow}+Y^{\downarrow}=0 \tag{6.4.35}$$

得到内部区域的有效介电常数 ε_{effi}。式中 $Y^{\uparrow}$、$Y^{\downarrow}$是从任一参考面(如 $y=t_f$)向正、负 y 方向看去的输入导纳。

(2) 外部区域有效介电常数 ε_{effo}的计算

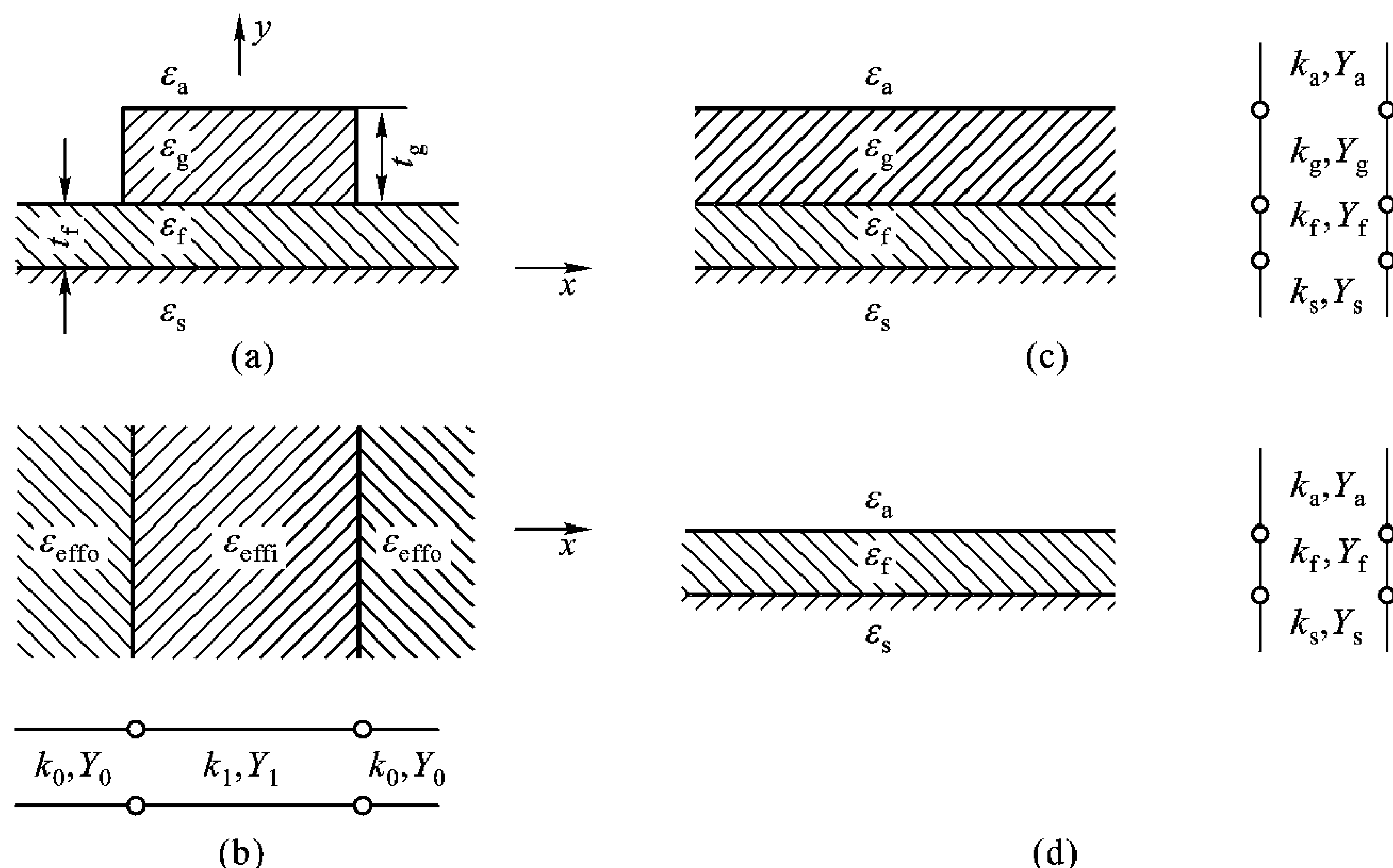


图 6-40 条形介质光波导及其 EDC 法计算过程

(a) 条形介质光波导 (b)、(c)、(d) EDC 法计算过程

将条形介质波导[图 6-40(a)]等效成图 6-40 (d)，即忽略条形介质的存在，利用 y 方向谐振条件

$$Y^{\uparrow} + Y^{\downarrow} = 0 \tag{6.4.36}$$

计算外部区域的有效介电常数 $\varepsilon_{\text{effo}}$。然后根据图 6-40 (b)所示的等效单层介质波导，利用 x 方向的谐振条件

$$\overleftarrow{Y} + \overrightarrow{Y} = 0 \tag{6.4.37}$$

计算纵向波数 k_z，或有效介电常数

$$\varepsilon_{\text{eff}} = (k_z/k_0)^2$$

式中 $\overleftarrow{Y}$、$\overrightarrow{Y}$ 是从任一参考面向正、负 x 方向看去的输入导纳。

从上面 EDC 法计算条形介质光波导色散特性的过程可知，EDC 法的主要近似在于忽略了内、外区域交界面的不连续效应，因而内、外两区域的等效传输线可直接连接。

EDC 法计算实例见图 6-41。这种波导结构更适合于毫米波集成电路，图 6-41 (a)是所计算的条形介质波导的截面图，衬底为非完纯导电板，相对介电常数 $\varepsilon_{\text{rs}} = 1 - \text{j}10^7$，表面波被限制在条形介质 g 中传播。条形介质 g 有一定损耗，$\varepsilon_{\text{rg}} = 12 - \text{j}10^{-3}$，相当于硅材料的介电常数。夹在条形介质和衬底之间的薄层介质是一种低损耗材料，计算中假定无损耗，介电常数 ε_{rf}只有实部，有 $\varepsilon_{\text{rf}} = 2.56$。夹层介质 f 的引入主要是为了减少导电板中的损耗。条形介质的宽度为 w，条形介质和夹层介质的厚度分别为 t_g和 t_f。计算中取 $t_g/\lambda = 0.3$，

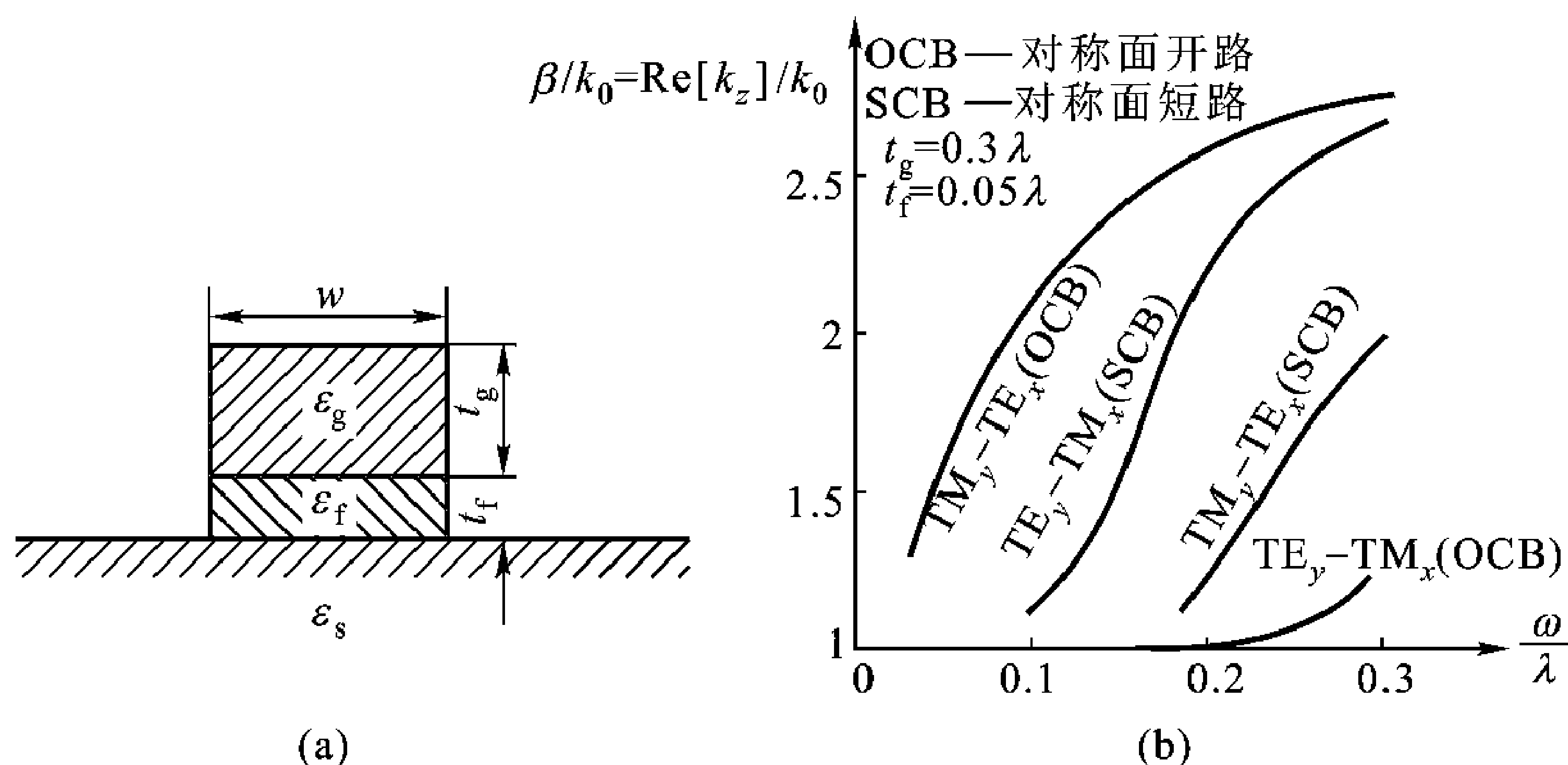


图 6-41 条形介质波导及其色散特性

(a) 条形介质波导 (b) 用 EDC 法计算的色散特性

$t_f/\lambda=0.05$。

计算结果示于图 6-41 (b)。纵坐标为纵向传播常数 k_z 的实部β与自由空间波数k_0 之比 β/k_0，其平方就是 ε_{eff}。横坐标是以波长归一化的条形介质带的宽度 w/λ。图中 TM_y-TE_x等表示用 y 方向谐振条件求ε_{effi}时按 TM 模场计算，用 x 方向谐振条件求$\varepsilon_{eff}=(\beta/k_0)^2$ 时按 TE 模场计算，其余类推。由图 6-41 (b)可知，最低模是对称面开路的 TM_y-TE_x模。

条形介质波导间的耦合

两条形介质波导靠得很近时，相互间会发生耦合，借此可构成定向耦合器、功率分配、合成器等信号处理器件。图 6-42 (a)是两个条形介质波导的耦合结构图。当两个带状波导单独存在时，每个波导中传播着以 E_x为主与 E_y为主的两类模式，下面对以 E_y 为主的模式进行讨论[见图 6-42 (b)]。假定两个波导中传播的电磁场基本上保持着原来的模式结构，则耦合系统的模式将出现两种不同的组合。一种组合对于 $x=0$ 对称面是偶对称的，即两个波导中所传输的电场沿 y 轴方向同为正值，如图 6-42 (c)。另一种组合对于 $x=0$ 对称面是奇对称的，即两个波导中所传输的电场沿 y 轴方向一个为正，另一个为负，如图 6-42 (d)。对于偶对称模式，在 $x=0$ 对称面上，电场切向分量在对称面两边相等，在法线方向导数为零，相当于开路；对于奇对称模式，在对称面上电场切向分量为零，相当于短路。偶对称、奇对称两种情况的色散关系都可应用 EDC 法求得。注意前面用 EDC 法求条形介质波导色散关系时，外部区域是趋于无穷远的，但在耦合波导情况下，外部区域有一个方向并不趋于无穷远，而是限制在条形介质波导侧面与对称面($x=0$)之间。所以奇对称、偶对

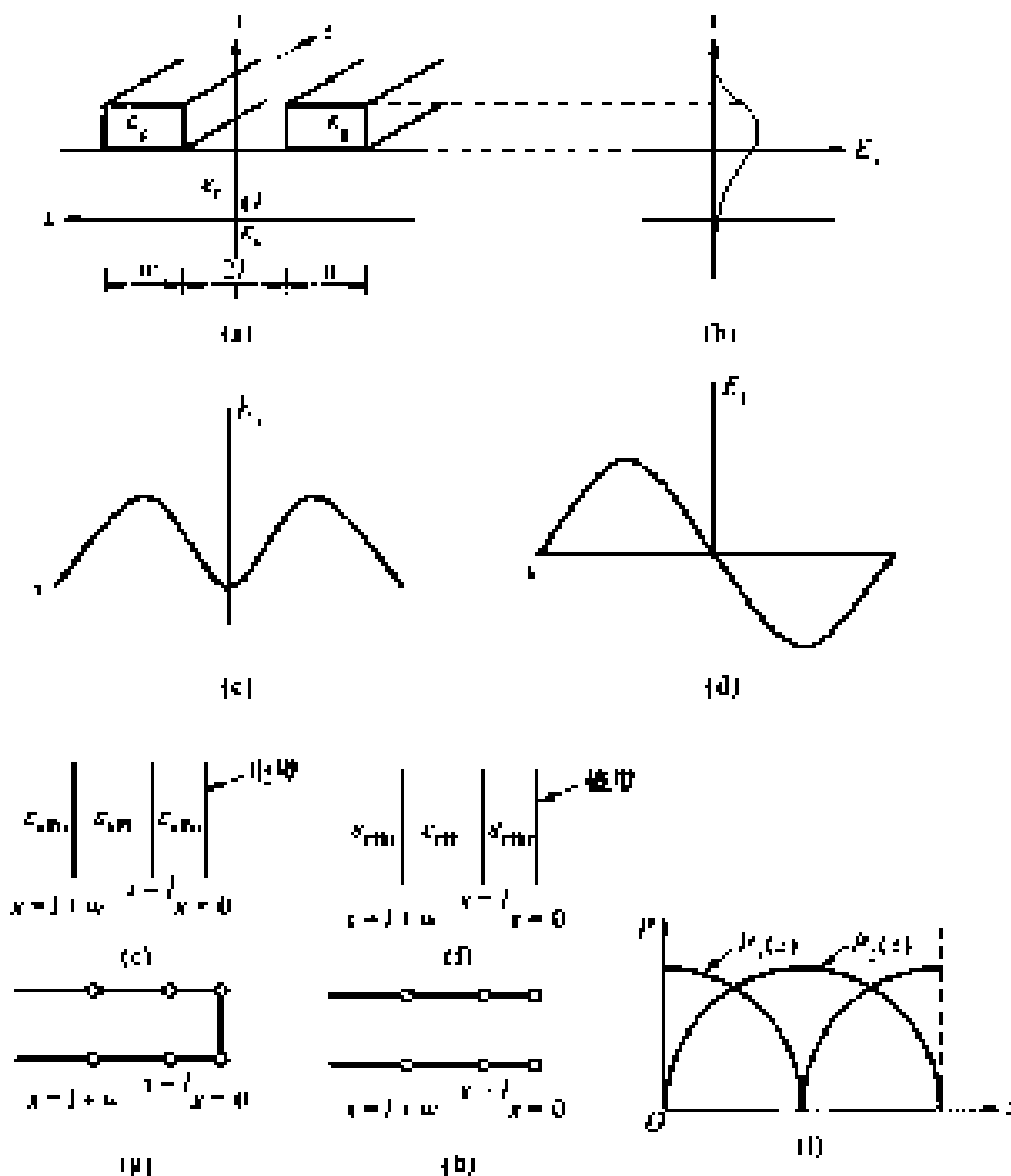


图 6－42　条形介质波导耦合结构及场分布示意图

(a) 耦合介质波导　(b)、(c)、(d) 电场分布

(e)、(f)、(g)、(h) 分析模型及等效电路　(i) 波导间功率耦合

称分别与图 6－42 (e)、(f)的多层介质波导对应，相应的横向等效电路见图 6－42 (g)与(h)。6－42(g)对应于对称面短路的模式，(h)对应于对称面开路的模式。利用横向谐振原理即可得到偶对称、奇对称两种模式情况下的色散关系($k_z \sim \omega$ 或 $\varepsilon_{\mathrm{eff}} \sim \lambda$)。

由于偶对称模式与奇对称模式的传输相速($v_{\mathrm{p}} = \omega / k_z$)不同，这两类模式传输过程中，在 A 波导中可能相加(场强叠加)，在 B 波导中可能相减(场强相消,甚至可能完全抵消)。在经过一段距离后，由于两个模式相速不同，可能反过来，场强在 A 波导相减，而在 B 波导相加。这就是说从 A 波导输入的功率可以耦合到 B 波导，在某一位置，A、B 两波导功率相等，再传一段距离后全

部耦合到B波导，以后又从B波导耦合到A波导，如图6-42（i）。

图6-43就是基于耦合光波导的原理设计的光波导定向耦合器。如果耦合区长度 l 设计得使从输入端口1输入的功率平分到输出端口2、3，即构成3dB定向耦合器。耦合区长度 l 也可设计得使大部分功率从输入端口1直通到输出端口2，只有很小一部分功率耦合到输出端口3。这种耦合器可用来监视主网络工作状况。

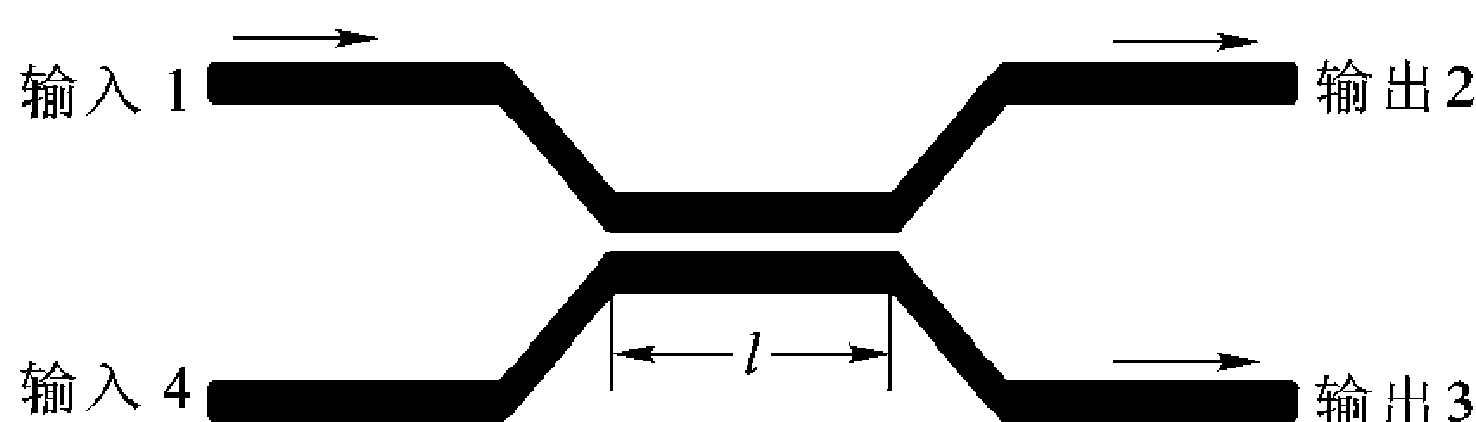


图6-43 光波导定向耦合器

6.5 光纤的射线分析

介质光波导另一大类就是光纤。在光纤通信系统中，光纤是传播光波的介质，其典型结构如图6-1（c），为一多层同轴圆柱体，自内向外为纤芯、包层及涂覆层。通信光纤的纤芯通常是折射率为 n_1 的高纯 SiO_2，并有少量掺杂剂（如 GeO_2），以提高折射率。包层折射率为 n_2（$< n_1$），通常也由高纯 SiO_2 制造，掺杂 B_2O_3 及F等以降低折射率。纤芯和包层构成裸光纤，光纤的光学及传输特性主要由它决定。对于通信用石英光纤，多模光纤的芯径大多为50 μm，单模光纤芯径仅4～10 μm。它们的包层外径一般为125 μm，在包层外面是5～40 μm的涂覆层，材料是环氧树脂或硅橡胶，其作用是增强光纤的机械强度。再外面常有缓冲层（100 μm）及套塑层。由于纤芯很细，即使传输的光能不大，但纤芯光强仍是很大的。

根据横截面上的折射率分布，光纤可分为两大类，即阶跃（SE）型和梯度（GI）型。阶跃光纤中的折射率分布为

$$n(r)=\begin{cases} n_1 & (r\leqslant a) \\ n_2 & (r>a) \end{cases} \qquad (6.5.1)$$

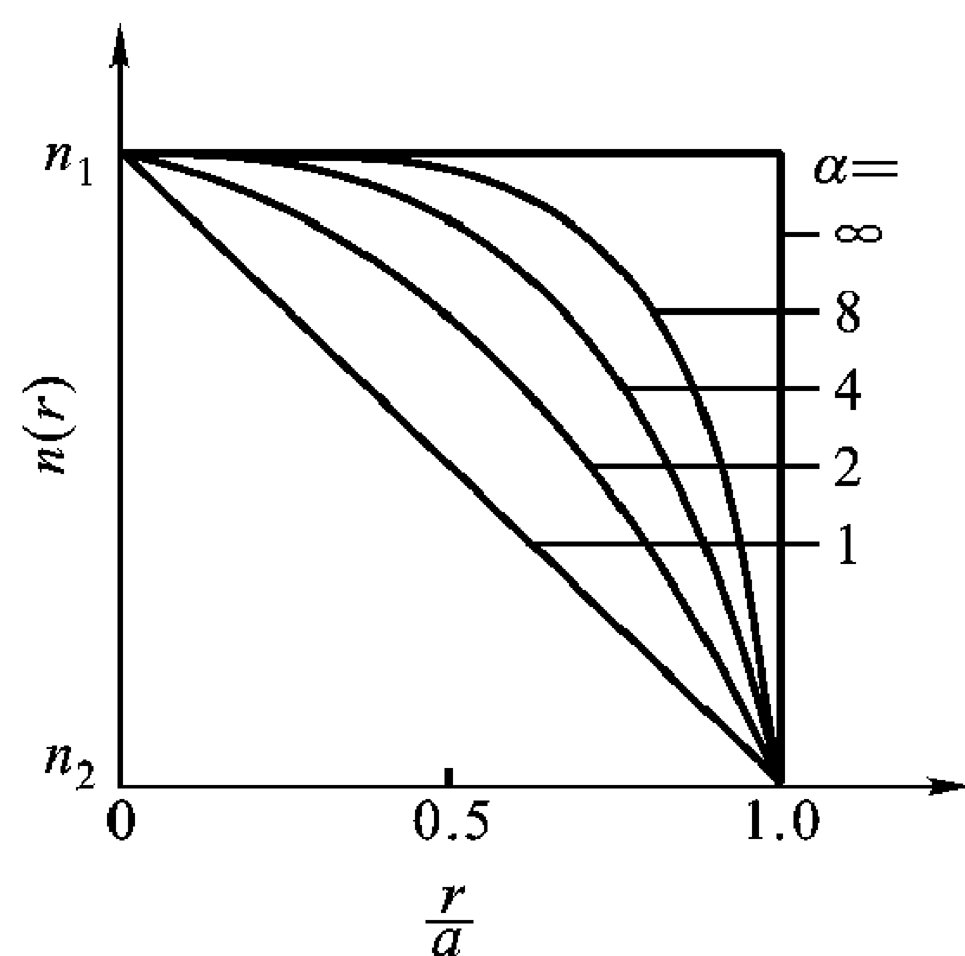


图6-44 梯度光纤纤芯中的折射率分布

梯度型光纤中的折射率分布（见图6-44）为

$$n(r)=\begin{cases} n_1\left[1-2\Delta\left(\dfrac{r}{a}\right)^{\alpha}\right]^{1/2} & (r\leqslant a) \\ n_1(1-2\Delta)^{1/2}=n_2 & (r>a)\end{cases} \tag{6.5.2}$$

式中 a 为纤芯半径，α 取值范围为 1 到∞。当 $\alpha >> 10$ 时，折射率分布为阶跃型，$\alpha=1$ 时为三角形，梯度光纤中通常取 $\alpha\approx 2$，即按平方律分布。

定义

$$\Delta=\frac{n_1^2-n_2^2}{2n_1^2}\approx\frac{n_1-n_2}{n_1} \tag{6.5.3}$$

为相对折射率差。在石英光纤中，$n_1\approx 1.5$，$\Delta\approx 0.01$，即包层折射率仅比纤芯略低一点。

本节着重讨论阶跃光纤。

光纤的分析有射线分析与波动分析之分。射线分析基于光波波长很短，相对而言光纤的几何尺寸比波长大得多的情况，尤其是多模光纤，因此光在光纤中的传播可用几何光学的方法进行分析。光纤的波动分析要从麦克斯韦方程出发求解波动方程，得到光纤中的传播波型(模式)、色散特性、场分布等。光纤的波动分析又有严格的矢量波动分析与标量波动分析之分。标量波动分析基于光纤纤芯与包层折射率之差很小这一事实，它是矢量波动分析的近似。

阶跃光纤中光传播的射线分析

光纤中有两种光线，即子午光线和斜射光线。子午光线是位于子午面(过光纤轴线的面)上的光线，而斜射光线是不经过光纤轴线传输的光线。

如果光纤纤芯的直径比波长大得多，那么对于子午光线在芯包界面的反射、折射与单层平板介质波导中薄层介质与基片、覆盖层交界面发生的光的反射、折射过程是相同的。图 6－45 示出了一个子午面上几条光线的传输情况。分析这几条光线在芯包交界面的反射、折射情况对于我们理解光线在阶跃光纤

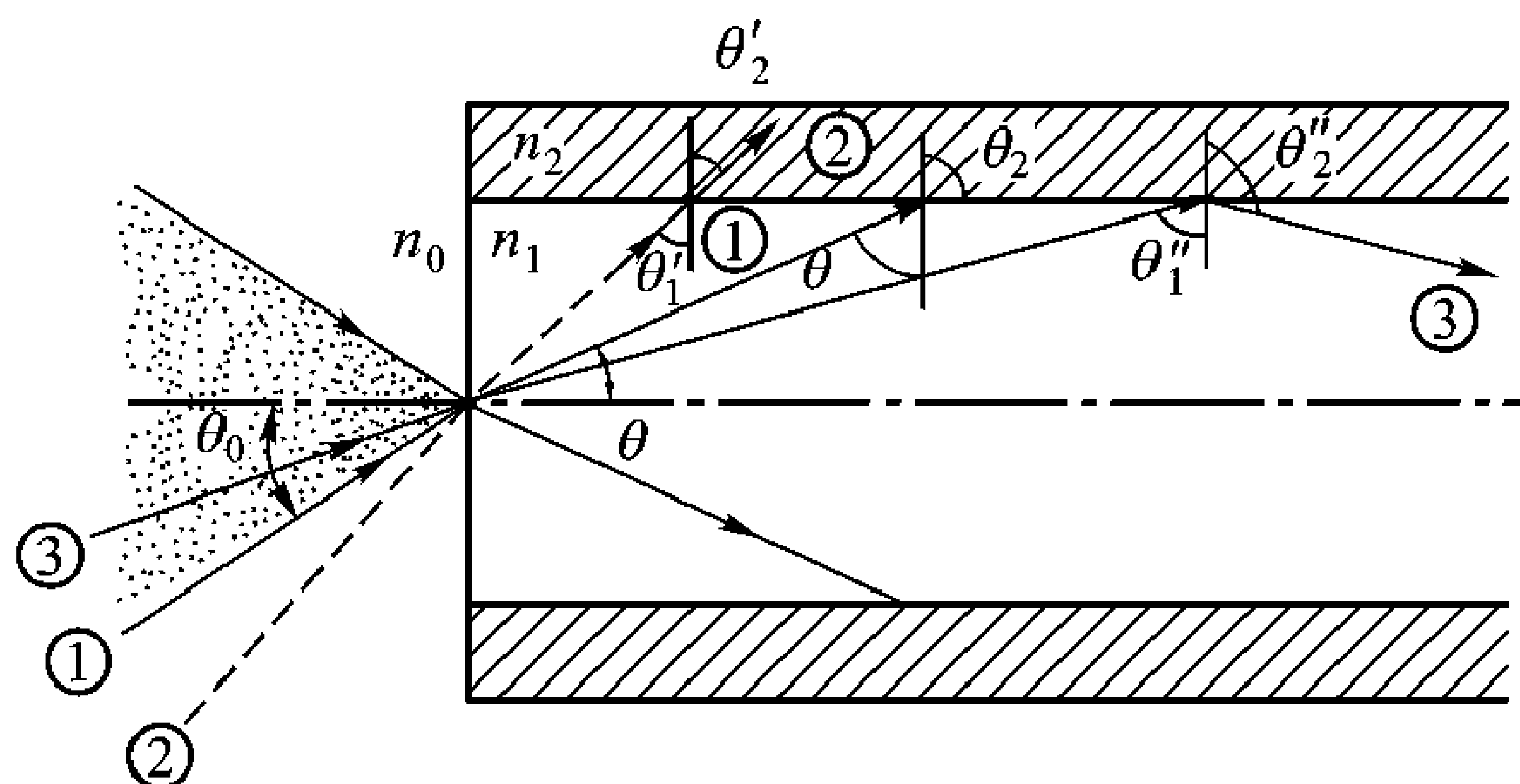


图 6－45 子午光线在阶跃光纤中的传输

中的传播是十分有用的。

设纤芯折射率为 n_1，包层折射率为 n_2。当光纤射入纤芯后，在纤芯与包层界面处满足全反射条件的光线，就能在芯包界面间来回反射向前传输。在图 6－45 中，光线从空气(折射率 $n_0=1$)射入光纤端面，有三种典型情况。设光线(1)以入射角 θ_0 入射到纤芯端面上，因 $n_0<n_1$，光线产生折射，其折射角 θ 可从斯奈尔定律求得

$$n_0\sin\theta_0=n_1\sin\theta \tag{6.5.4}$$

显然，$\theta<\theta_0$。设该光线到达芯包界面时恰好产生掠射，即它在包层内的折射角 $\theta_2=90°$，令此时的入射角 $\theta_1=\theta_c$，则由 $n_1\sin\theta_c=n_2\sin 90°$得，$\sin\theta_c=n_2/n_1$。定义 θ_c为芯包界面的全反射临界角，相应的入射角 θ_0 为入射临界角。

光线(2)以入射角 θ'_0入射到光纤端面，且 $\theta'_0>\theta_0$，它产生的芯包界面入射角 $\theta'_1<\theta_c$，光线在包层中的折射角 $\theta'_2<90°$，该光线将射入包层。

光线(3)以入射角 θ''_0入射纤芯端面，且 $\theta''_0<\theta_0$，则芯包界面处入射角 $\theta''_1>\theta_c$，因此该光线将在芯包界面产生全反射。

由此可见，当光线从空气入射纤芯端面的入射角$\leqslant\theta_0$ 时，进入纤芯的光线将会在芯包界面间产生全反射而向前传播，而入射角 $>\theta_0$ 的光线将进入包层散失掉。因此入射临界角 θ_0 是个很重要的参量，它与光纤折射率的关系为

$$\begin{aligned}\sin\theta_0&=n_1\sin(90°-\theta_c)\\&=\sqrt{n_1^2-n_2^2}\approx n_1\sqrt{2\Delta}\end{aligned} \tag{6.5.5}$$

凡角度在 θ_0 以内的入射光线均可在光纤内传播，定义入射临界角 θ_0 的正弦为数值孔径 NA，即

$$NA=\sin\theta_0\approx n_1\sqrt{2\Delta} \tag{6.5.6}$$

数值孔径是光纤的重要光学特性，它表示入射到光纤端面上的光线，只有与纤芯轴夹角为 θ_0 的圆锥体内的入射光线，才能在纤芯内传输。从式(6.5.6)可见，NA 只决定于芯包折射率差 Δ，与芯包直径无关，Δ 越大，NA 越大，光纤聚光能力愈强。从光纤与光源耦合角度看，NA 越大，可得到愈高的耦合效率，但这与降低损耗、增加带宽有矛盾。纤芯与包层折射率的差异是通过纤芯与包层中不同的掺杂剂实现的。NA 要大，纤芯与包层折射率差也要大，纤芯与包层中掺杂剂的浓度也要增大，这就导致损耗增大。NA 增大，不同轨迹的光线轴向速度的差异也增大，这就导致不同轨迹光线到达输出端的时间差或者说模间色散增大。因而信号脉冲展宽严重，传输带宽变窄。所以从降低损耗、增加带宽考虑，希望 Δ 低一些。通常 $\Delta\approx0.01$，则 NA 的值约为 0.1～0.3。

斜射光线在光纤中的传输情况较复杂，如图 6－46 所示。设有一光线在光纤端面 P 点进入纤芯，沿 PQ 直线传输，并在芯包界面 Q 点产生全反射，再沿

QR 直线传输……，形成一条空间折线。从它在光纤端面的投影图可见，传输轨迹限定在一定的范围内，并与一圆柱面相切，该圆柱面称为焦散面，半径为 a_0。斜射光线就在芯包界面与焦散面间传输。以不同角度入射的斜射光线，有不同的焦散面。当 $a_0 = a$ 时，焦散面与芯包界面重合，折线变为螺旋线；当 $a_0 = 0$ 时，斜射光线变为子午光线。斜射光线的数值孔径与子午光线不同，比子午光线稍大。一般用子午光线来定义光纤的数值孔径。

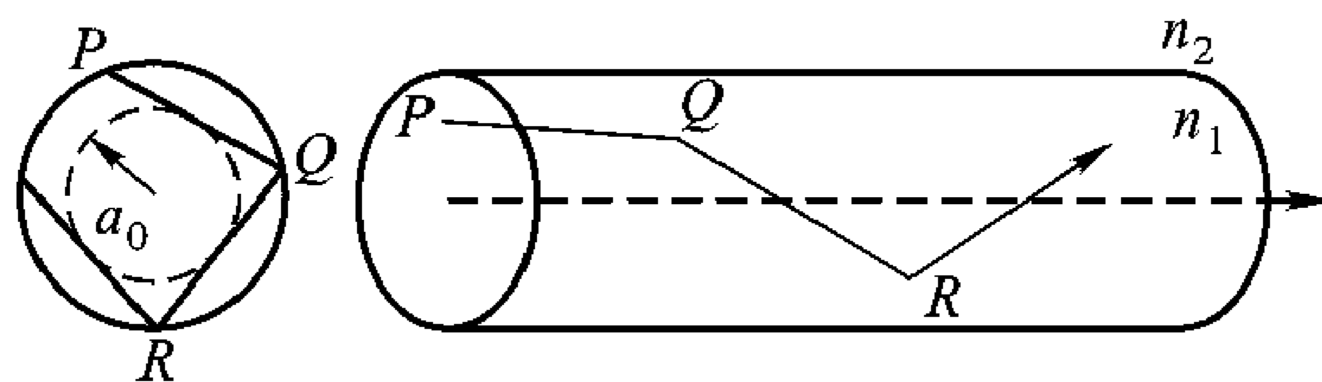


图 6－46 斜射光线在阶跃光纤中的传输

梯度光纤中光的传播

梯度光纤中的折射率分布如式(6.5.2)所示，沿半径方向是连续变化的。光线的传输轨迹不再是直线。梯度光纤中的光线也可分为两类，即子午光线和斜射光线。子午光线的轨迹在子午面内，在光纤端面上的投影为一条直线，并限于 $r = r_m$ 的焦散面内；斜射光线的轨迹为不经过光纤轴线的空间曲线，在光纤端面上的投影限于两个焦散面之间，如图 6－47 所示。

由于斜射光线的情况比较复杂，下面仅对子午光线的传输特点进行分析。前面分析阶跃光纤中光线传播时指出，对于子午光线，光线在阶跃光纤中传播与光在单层平板介质波导中的传播是类似的。如果假定单层平板介质波导中薄层介质折射率按梯度光纤中纤芯折射率的变化规律变化，那么在这样的平板介质波导中光的传播与梯度光纤中子午光线的传播也是类同的。折射率渐变的平板介质可用多层平板介质波导等效，在这等效的多层介质波导中，每层介质的折射率等于渐变折射率介质在该层的平均折射率。多层介质波导中光的传播我们已分析过。所以梯度光纤中子午光线的传播可借用多层平板

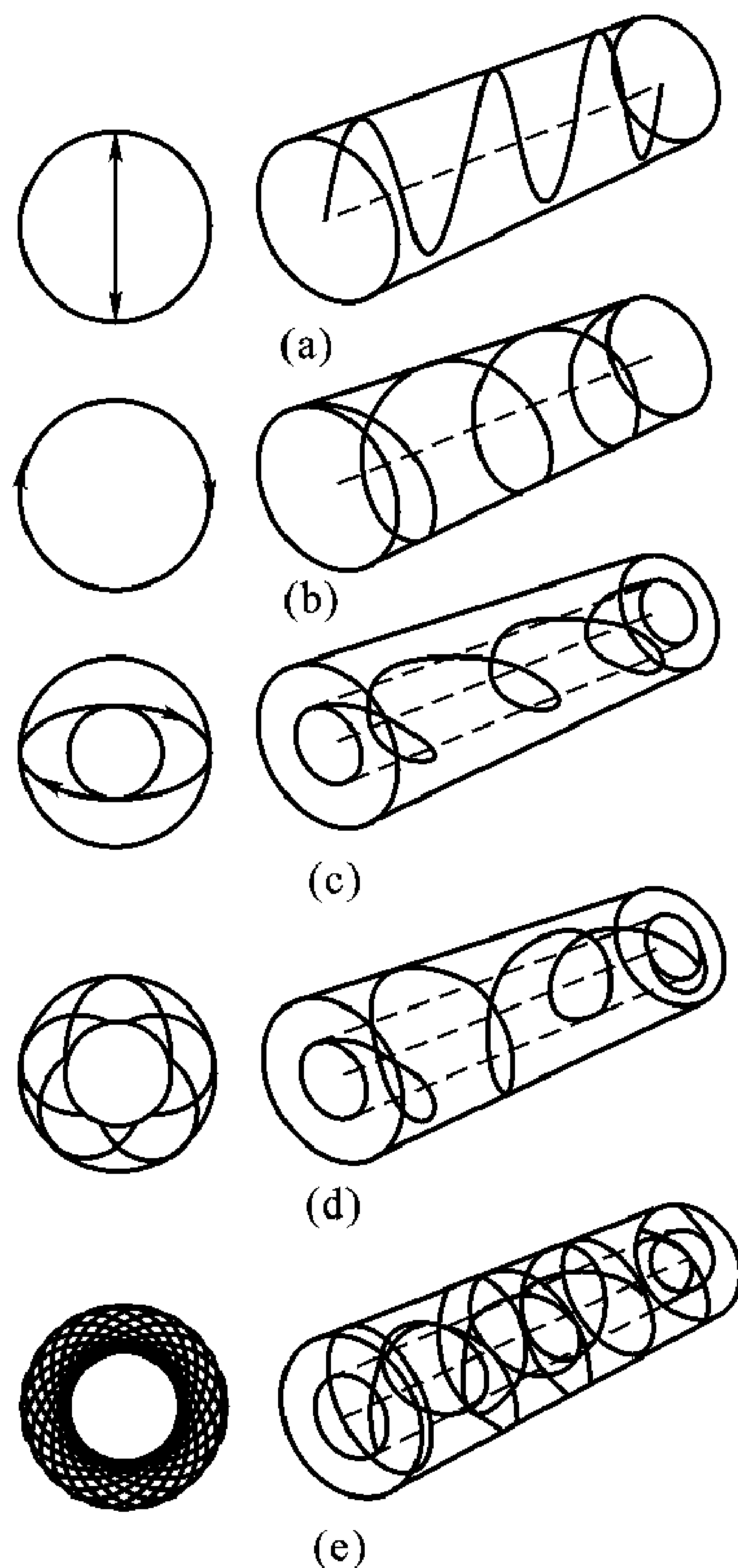


图 6－47 梯度光纤中的光线轨迹实例
(a) 子午光线 (b) 螺旋光线 (c) 斜射光线
(d) 斜射光线 (e) 斜射光线

介质波导的分析方法。

如图6-48(a)所示，设纤芯由多层均匀的同轴层构成，每层的折射率自纤芯轴向外递减。光线由纤芯轴处入射，并向折射率递减的外层传输。由于 $n_1 > n_2$，故折射角 θ_2 大于入射角 θ_1，层与层之间光线以直线传输；在下一层界面上，折射角 θ_3 大于入射角 θ_2。由于折射角愈来愈大，光线愈来愈向芯轴弯曲，在某一点 $r = r_m$ 处发生全反射，光线折回中心。当然，实际情况下折射率是均匀地从中心处的 n_1 渐变到包层折射率 n_2，光线的轨迹将从折线变为连续的曲线，形成图6-48(b)所示的正弦形光线轨迹。如果折射率分布合适，就有可能使不同角度入射的全部光线以同样的轴向速度在光纤中传输，同时到达光纤轴上的某点，即所有光线都有相同的空间周期 L，这种现象称为自聚焦。可以预见，梯度光纤中的模间色散要比阶跃光纤小得多，从而有更高的传输带宽。

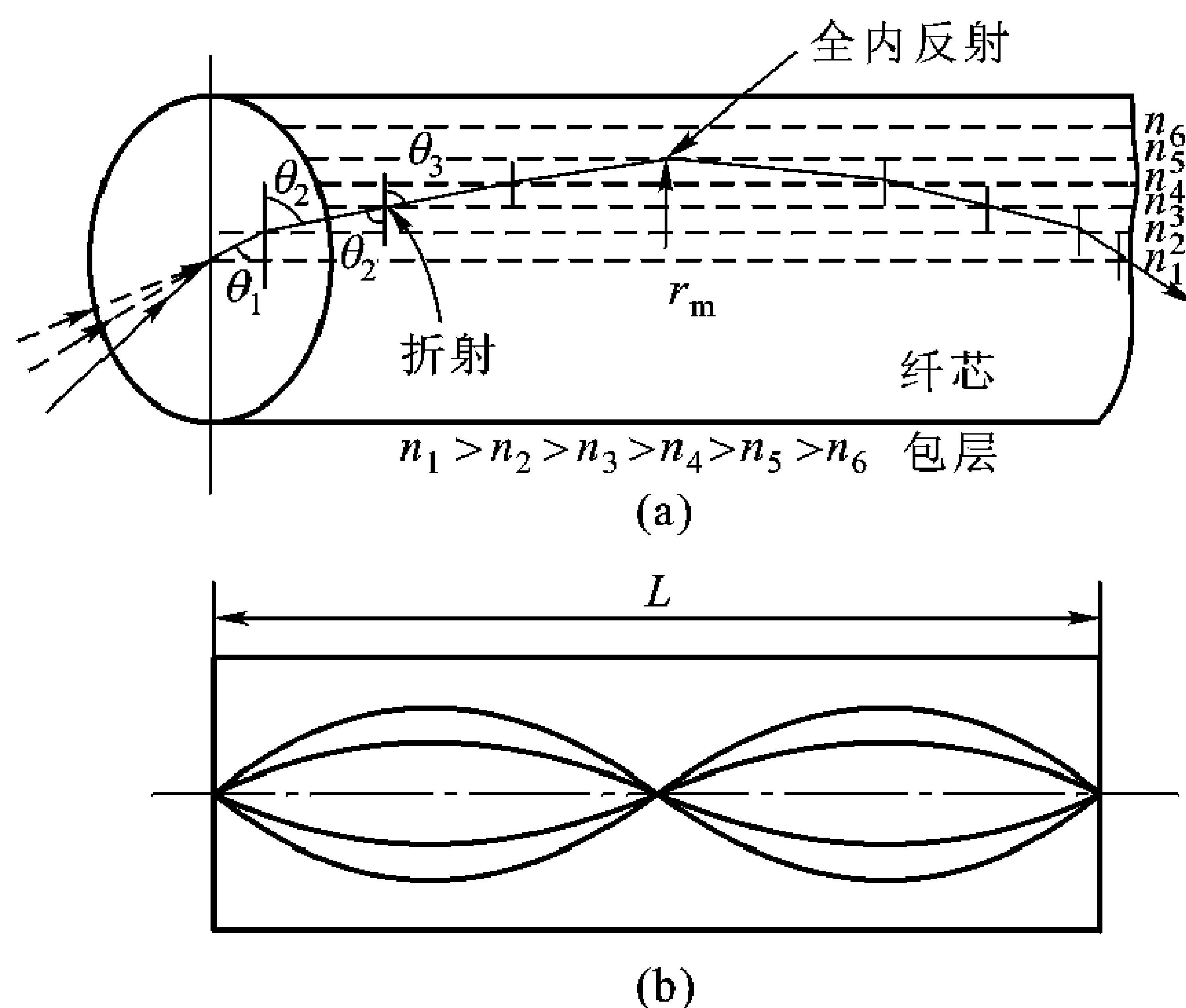


图6-48　梯度光纤

(a) 梯度光纤中的光纤轨迹　(b) 自聚焦

最后，讨论一下梯度光纤的数值孔径。它可采用阶跃光纤的定义来描述，但由于梯度光纤的径向折射率分布 $n(r)$ 是变化的，因此端面各点的 NA 也是不同的。可用局部数值孔径 $NA(r)$ 来描述，它可表示为 $NA(r)=\sqrt{n^2(r)-n^2(a)}=n(r)\sqrt{2\Delta_r}$，其中 $\Delta_r=[n(r)-n(a)]/n(r)$。显然，当 $r=0$ 时，$NA(r)_{max}=n(0)(\sqrt{2\Delta})$ 为最大理论数值孔径。

6.6　光纤的波动分析

严格描述光在光纤中的传播需从麦克斯韦方程出发求解波动方程，得

到光纤中的传播波型（模式）色散特性、截止条件、传输功率等，这种分析方法称为光纤的波动分析。光纤的波动分析又有矢量波动分析与标量波动分析之分。因为光纤纤芯的折射率与包层折射率相差很小，光纤的标量波动分析是矢量波动分析的一种很好的近似，使分析大为简化。本书采用标量波动分析。

6.6.1　分析模型、场分量表达式与特征方程

1. 分析模型

为了简化分析，本节重点分析阶跃光纤。对于阶跃光纤的分析又假定包层在半径方向延伸至无穷远。这是因为实际波导模式的场随 ρ 的增加迅速减小，“看”不到包层的外边界。图 6－49 就是阶跃光纤的简化分析模型，实际上就是一圆形介质波导。介质棒半径为 a，折射率为 n_1，介质棒周围介质的折射率为 n_2，相应的相对介电常数 $\varepsilon_{r1}=n_1^2$，$\varepsilon_{r2}=n_2^2$。

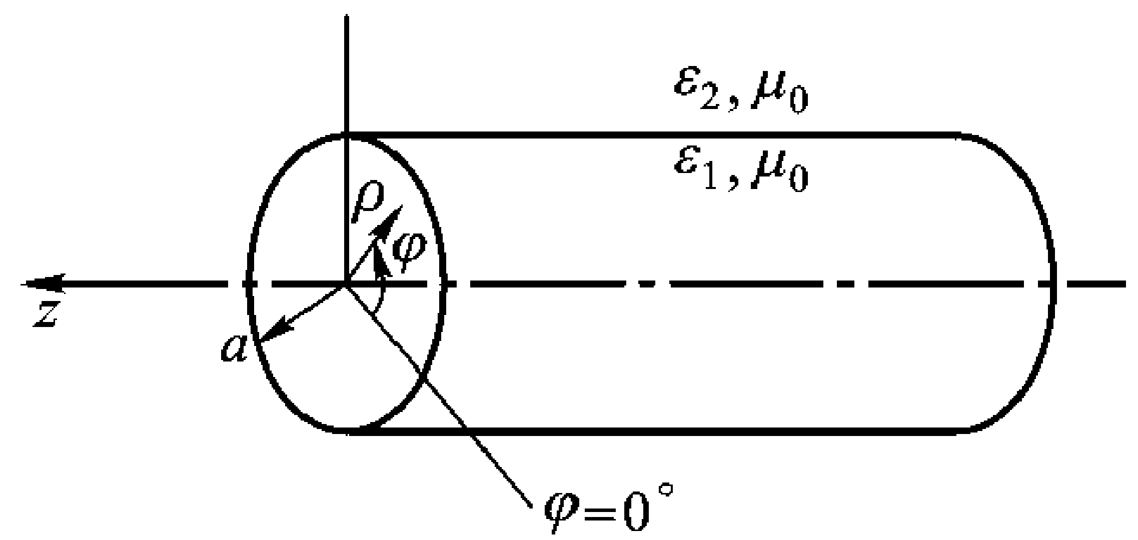


图 6－49　阶跃光纤的简化分析模型——圆形介质波导

2. 场分量表达式与特征方程

从标量波动方程出发对光纤进行分析，其根据是，通信光纤中纤芯与包层的折射率相差很小，即 $\Delta \ll 1$，因而在纤芯与包层分界面上的全反射临界角 $\theta_c=\arcsin\left(\dfrac{n_2}{n_1}\right)\approx 90°$。为了在光纤中形成导波，光线的入射角必须大于临界角 θ_c，即光纤中光线几乎与光纤轴平行。这种波非常接近于 TEM 模，其轴向电磁场分量 E_z 和 H_z 很小，而横向分量 $\boldsymbol{E}_t$ 和 $\boldsymbol{H}_t$ 则很强。可以认为在这种弱导光纤中横向场的偏振方向在传输过程中保持不变，可用一个标量来描述。设横向电场沿 y 方向，则电场 $\boldsymbol{E}_t$ 可用标量 E_y 表示，并满足下面的标量波方程

$$(\nabla^2+k_i^2)E_{yi}=0 \tag{6.6.1}$$

$i=1$，2，分别表示介质棒内（纤芯）和介质棒外（包层）的量。

我们关心的是光纤横截面内光场（光功率）分布，特别是光场沿光纤传输时的情况。求解方程（6.6.1）满足纤芯与包层交界面的边界条件，即可得光纤的标量解。

根据第 1 章式（1.7.53）在圆柱坐标系下 $\nabla^2\Phi=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$，所以圆柱坐标系下标量波方程（6.6.1）成为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial E_y}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}+k_i^2 E_y=0 \tag{6.6.2}$$

应用分离变量法，令

$$E_y=\rho(\rho)\Phi(\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \tag{6.6.3}$$

将式(6.6.3)代入式(6.6.2)得出

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+\left(k_i^2-k_z^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)\rho(\rho)=0 \tag{6.6.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\Phi(\varphi)=0 \tag{6.6.5}$$

式(6.6.5)的解为

$$\Phi(\varphi)=c\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi}\text{或}\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}\qquad(m=0,1,2\cdots) \tag{6.6.6}$$

式(6.6.4)叫做贝塞尔方程，其解叫贝塞尔函数。

式(6.6.4)的解要具体分析。在纤芯即介质棒内部传输模的场应是驻波型解，$k_z^2<k_0^2 n_1^2$，而且波传播的区域包括原点，所以解不能取第二类贝塞尔函数。在介质棒外部，即包层，传输模的场沿 ρ 方向应是衰减的，$k_z^2>k_0^2 n_2^2$。式(6.6.4)变为变态贝塞尔方程，而且外部空间包括无限远处，所以不能取第一类而只能取第二类变态贝塞尔函数。故得到

$$\rho_1(\rho)=D\mathrm{J}_m(k_{t1}\rho)\quad(\rho<a) \tag{6.6.7a}$$

$$\rho_2(\rho)=D\mathrm{K}_m(k_{t2}\rho)\quad(\rho>a) \tag{6.6.7b}$$

式中$\mathrm{J}_m(k_{t1}\rho)$为第一类贝塞尔函数，$\mathrm{K}_m(k_{t2}\rho)$为第二类变态贝塞尔函数，a 为介质棒即纤芯的半径

$$k_{t1}^2=k_0^2 n_1^2-k_z^2 \tag{6.6.8a}$$

$$k_{t2}^2=k_z^2-k_0^2 n_2^2 \tag{6.6.8b}$$

在 $\rho=a$ 处有

$$\begin{aligned}\rho(a)&=D\mathrm{J}_m(k_{t1}a)=D\mathrm{J}_m(u)\\&=D\mathrm{K}_m(k_{t2}a)=D\mathrm{K}_m(w)\end{aligned}$$

所以

$$D=\frac{\rho(a)}{\mathrm{J}_m(u)}=\frac{\rho(a)}{\mathrm{K}_m(w)} \tag{6.6.9}$$

式中

$$u=k_{t1}a=(k_0^2 n_1^2-k_z^2)^{1/2}a \tag{6.6.10a}$$

$$w=k_{t2}a=(k_z^2-k_0^2 n_2^2)^{1/2}a \tag{6.6.10b}$$

u、w 是以纤芯半径归一化的横向传播常数。

将式(6.6.9)代入式(6.6.7)，并记$\tilde{\rho}$为以 a 归一化的 ρ，得到

$$\rho(\rho)=\frac{\rho(a)}{\mathrm{J}_m(u)}\mathrm{J}_m(u\tilde{\rho})\left(\tilde{\rho}=\frac{\rho}{a}<1\right) \tag{6.6.11a}$$

$$\rho(\rho)=\frac{\rho(a)}{\mathrm{K}_m(w)}\mathrm{K}_m(w\tilde{\rho})\left(\tilde{\rho}=\frac{\rho}{a}>1\right) \tag{6.6.11b}$$

故最后得到

$$\begin{cases} E_{y1}=\dfrac{A_m}{\mathrm{J}_m(u)}\mathrm{J}_m(u\tilde{\rho})\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \quad \left(\tilde{\rho}=\dfrac{\rho}{a}<1\right) & (6.6.12a)\\ E_{y2}=\dfrac{A_m}{\mathrm{K}_m(w)}\mathrm{K}_m(w\tilde{\rho})\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \quad \left(\tilde{\rho}=\dfrac{\rho}{a}>1\right) & (6.6.12b)\end{cases}$$

或

$$\begin{cases} E_{y1}=\dfrac{A_m}{\mathrm{J}_m(u)}\mathrm{J}_m(u\tilde{\rho})(\cos m\varphi \text{ 或 } \sin m\varphi)\left(\tilde{\rho}=\dfrac{\rho}{a}<1\right) & (6.6.12c)\\ E_{y2}=\dfrac{A_m}{\mathrm{K}_m(w)}\mathrm{K}_m(w\tilde{\rho})(\cos m\varphi \text{ 或 } \sin m\varphi)\left(\tilde{\rho}=\dfrac{\rho}{a}>1\right) & (6.6.12d)\end{cases}$$

式中 A_m 为任意常数，与激励光纤的光功率大小有关。为简化书写，式(6.6.12)中 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$因子已略去。

标量波近似的出发点是光纤中传播的是准 TEM 模，因而横向磁场只有 H_x 分量，且 H_x 与 E_y 有如下关系

$$H_x \approx -E_y/Z \tag{6.6.13}$$

式中

$$Z=\begin{cases} Z_1=\dfrac{Z_0}{n_1}(\text{纤芯区})\\ Z_2=\dfrac{Z_0}{n_2}(\text{包层区})\end{cases}$$

Z 为芯区或包层区的波阻抗，Z_0 为自由空间波阻抗，一般记为 η_0。将式(6.6.12)代入式(6.6.13)得到

$$H_{x_1}=-\frac{A_m}{\mathrm{J}_m(u)}\frac{n_1}{\eta_0}\mathrm{J}_m(u\tilde{\rho})(\cos m\varphi \text{ 或 } \sin m\varphi) \quad (\tilde{\rho}<1) \tag{6.6.14a}$$

$$H_{x_2}=-\frac{A_m}{\mathrm{K}_m(w)}\frac{n_2}{\eta_0}\mathrm{K}_m(w\tilde{\rho})(\cos m\varphi \text{ 或 } \sin m\varphi) \quad (\tilde{\rho}>1) \tag{6.6.14b}$$

场的纵向分量 E_z、H_z 可从麦克斯韦方程得到：

$$E_z=\frac{-\mathrm{j}}{\omega\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\approx\frac{\mathrm{j}\eta_0}{k_0 n^2}\frac{\mathrm{d}H_x}{\mathrm{d}y} \tag{6.6.15a}$$

$$H_z=\frac{\mathrm{j}}{\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\approx\frac{\mathrm{j}}{k_0\eta_0}\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x} \tag{6.6.15b}$$

将式(6.6.12)、(6.6.14)代入上式，并利用以下公式(见习题1.17)

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}+\left(\frac{\cos\varphi}{\rho}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho}-\left(\frac{\sin\varphi}{\rho}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{J}_l(\theta)=\frac{1}{2}[\mathrm{J}_{l-1}(\theta)-\mathrm{J}_{l+1}(\theta)]$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{K}_l(\theta)=-\frac{1}{2}[\mathrm{K}_{l-1}(\theta)+\mathrm{K}_{l+1}(\theta)]$$

以及递推关系

$$\frac{2n}{\theta}\mathrm{J}_n(\theta)=\mathrm{J}_{n-1}(\theta)+\mathrm{J}_{n+1}(\theta)$$

$$\frac{2n}{\theta}\mathrm{K}_n(\theta)=\mathrm{K}_{n-1}(\theta)-\mathrm{K}_{n+1}(\theta)$$

在纤芯区得到

$$E_{z1}=-\frac{\mathrm{j}A_m}{2k_0n_1}\frac{u}{a}\left[\frac{\mathrm{J}_{m+1}(u\tilde{\rho})}{\mathrm{J}_m(u)}\sin(m+1)\varphi+\frac{\mathrm{J}_{m-1}(u\tilde{\rho})}{\mathrm{J}_m(u)}\sin(m-1)\varphi\right]\tag{6.6.16a}$$

$$H_{z1}=\frac{\mathrm{j}A_mu}{2k_0a\eta_0}\left[\frac{\mathrm{J}_{m+1}(u\tilde{\rho})}{\mathrm{J}_m(u)}\cos(m+1)\varphi-\frac{\mathrm{J}_{m-1}(u\tilde{\rho})}{\mathrm{J}_m(u)}\cos(m-1)\varphi\right]\tag{6.6.16b}$$

在包层区有

$$E_{z2}=-\frac{\mathrm{j}A_mw}{2k_0an_2}\left[\frac{\mathrm{K}_{m+1}(w\tilde{\rho})}{\mathrm{K}_m(w)}\sin(m+1)\varphi-\frac{\mathrm{K}_{m-1}(w\tilde{\rho})}{\mathrm{K}_m(w)}\sin(m-1)\varphi\right]\tag{6.6.17a}$$

$$H_{z2}=\frac{\mathrm{j}A_mw}{2k_0a\eta_0}\left[\frac{\mathrm{K}_{m+1}(w\tilde{\rho})}{\mathrm{K}_m(w)}\cos(m+1)\varphi+\frac{\mathrm{K}_{m-1}(w\tilde{\rho})}{\mathrm{K}_m(w)}\cos(m-1)\varphi\right]\tag{6.6.17b}$$

比较场的轴向分量与横向分量，在轴向分量表示式中多一项 $u/(ak_0)$ 或 $w/(ak_0)$，有

$$\frac{u}{ak_0}=\frac{a\sqrt{k_0^2n_1^2-k_z^2}}{ak_0}<\sqrt{n_1^2-n_2^2}\tag{6.6.18a}$$

$$\frac{w}{ak_0}=\frac{a}{ak_0}\sqrt{k_z^2-k_0^2n_2^2}<\sqrt{n_1^2-n_2^2}\tag{6.6.18b}$$

它们都在 Δ 数量级，即弱导光纤中场的轴向分量至少比横向分量小 Δ 数量级，合成场基本处于光纤横截面内，近似为 TEM 模。

由贝塞尔函数的特性可知，当 $W\to\infty$ 时，$\mathrm{K}_m(w\tilde{\rho})\to\exp(-w\tilde{\rho})$，但从式(6.6.12d)可知，当 $\rho\to\infty$ 时 $\mathrm{K}_m(w\tilde{\rho})$ 必须趋向零，故对导模，w 必须为正。因此 $k_z>k_0n_2$。若 $w=0$，$k_z=k_0n_2$，则不满足 $\mathrm{K}_m(w\tilde{\rho})\Big|_{\rho\to\infty}=0$ 的条件，导模

将不再约束在纤芯中轴向传输，能量向横向扩散，故定义 $w=0$ 为截止条件。再从 $J_m(u\tilde{\rho})$ 的性质看，在纤芯内 u 必须为实数，否则场将衰减，因此有 $k_z \leqslant k_0 n_1$。总之，导模传播常数 k_z 的允许范围为

$$k_0 n_2 \leqslant k_z \leqslant k_0 n_1 \tag{6.6.19}$$

k_z 的具体数值由特征方程确定。为了导出特征方程，利用纤芯与包层交界面的边界条件，在 $\rho=a$ 界面上，电场和磁场的轴向分量是连续的，例如 $E_{z1}=E_{z2}$，可得

$$\begin{aligned}&\frac{u}{n_1}\frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)}\sin(m+1)\varphi+\frac{u}{n_1}\frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)}\sin(m-1)\varphi\\&=\frac{w}{n_2}\frac{K_{m+1}(w)}{K_m(w)}\sin(m+1)\varphi-\frac{w}{n_2}\frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)}\sin(m-1)\varphi\end{aligned} \tag{6.6.20}$$

由上式又可得

$$\frac{u}{n_1}\frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)}=\frac{w}{n_2}\frac{K_{m+1}(w)}{K_m(w)} \tag{6.6.21}$$

$$\frac{u}{n_1}\frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)}=-\frac{w}{n_2}\frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)} \tag{6.6.22}$$

在弱导近似下 $n_1 \approx n_2$，令 $n_1=n_2$，则上两式可简化为

$$u\frac{J_{m+1}(u)}{J_m(u)}=w\frac{K_{m+1}(w)}{K_m(w)} \tag{6.6.23}$$

$$u\frac{J_{m-1}(u)}{J_m(u)}=-w\frac{K_{m-1}(w)}{K_m(w)} \tag{6.6.24}$$

上面两式即为弱导近似下光纤标量解的特征方程。按贝塞尔函数的递推公式可证明这两式属同一方程。它们是超越方程，需用数字方法求解。解的步骤是：

(1) 先确定光纤芯子半径 a（可以测量）、相对折射率差 Δ 以及工作波长 λ 或 $k_0=(2\pi)/\lambda$；

(2) 根据式(6.6.10)得到 u 与 w，并有关系式

$$u^2+w^2=a^2k_0^2(n_1^2-n_2^2) \tag{6.6.25}$$

(3) 联立解式(6.6.24)与式(6.6.25)得到 u 或 w；

(4) 从 $u^2=a^2(k_0^2n_1^2-k_z^2)$ 或 $w^2=a^2(k_z^2-k_0^2n_2^2)$ 求出 k_z。

6.6.2　线偏振模及其截止特性与场分布

1. 线偏振模及其截止特性

下面我们从特征方程(6.6.24)出发研究阶跃光纤中的模式及其截止特性。标量波动分析是在光纤中传播准 TEM 模的前提下进行的，因此下面所讨论的

模式是线偏振的。这是矢量波动分析的一种近似，后面还要对此专门讨论。

光纤中某一模式的电磁波如果不能局限在纤芯中传播而通过包层向外辐射，我们就称该模式电磁波的传播被截止。显然包层中归一化横向传播常数 $w=k_{t2}a=0$ 是波被限制在纤芯还是通过包层向外辐射的临界点，也就是该模式的电磁波是传播还是截止的临界点。由特征方程(6.6.24)可知，如果 $w=0$，则有

$$J_{m-1}(u^c=k_{t1}^c a)=0 \tag{6.6.26}$$

k_{t1}^c是截止时纤芯内部的横向传播常数，上标 c 表示截止。因此对于给定的 m(表示角向变化关系 $\cos m\varphi$ 或 $\sin m\varphi$)，贝塞尔函数 $J_{m-1}(u=k_{t1}a)$的每一个根对应一个线偏振模的横向传播常数。贝塞尔函数 $J_{m-1}(u=k_{t1}a)$第 n 个根对应的线偏振模叫做 LP_{mn}模。下标 m 表示场在角向变化的次数，n 表示场在半径方向零场或暗环出现的次数。因为截止时 $k_{t2}=0$，根据式(6.6.10b)，得 $k_z^c=n_2k_0$。又因不管在纤芯还是包层纵向传播常数 k_z 是相同的。所以根据式(6.6.10a)我们得到截止时纤芯内横向传播常数 k_{t1}^c为

$$k_{t1}^{c^2}=k_0^2n_1^2-k_z^{c^2}=k_0^2n_1^2-k_0^2n_2^2 \tag{6.6.27}$$

如果 $P_{m-1,n}$定义为贝塞尔函数 $J_{m-1}(u=k_{t1}a)$的第 n 个根，那么从式(6.6.26)得出，对于 LP_{mn}模

$$k_{t1}^c=\frac{P_{m-1,n}}{a}$$

因此从式(6.6.27)可得

$$\left(\frac{P_{m-1,n}}{a}\right)^2=k_0^2\ (n_1^2-n_2^2)$$

因为 $k_0=\omega/c=2\pi f/c$，故由上式得到 LP_{mn}模的截止频率为

$$f_{mn}^c=\frac{c}{2\pi a\sqrt{n_1^2-n_2^2}}P_{m-1,n} \tag{6.6.28}$$

式中 c 为光速。贝塞尔函数的根列于表 6－4。

表 6－4 贝塞尔函数的根

贝塞尔函数	根			
J_0	2.405	5.520	8.654	11.791
J_1	0*	3.832	7.016	10.173
J_2	0*	5.136	8.417	11.620
J_3	0*	6.380	9.716	13.105

除了 $m=0$ 的模外，打星号的零根没有意义，因为此时 $J_{m-1}(k_{t1}a)/J_m(k_{t1}a)$成为 0/0 不定型。但是对 LP_{01}模不存在这个问题。因为对 LP_{01}模，截止条件为 $J_{-1}=0$。根据贝塞尔函数的性质

$$J_{-m}=(-1)^m J_m$$

因此 $J_{-1}=-J_1$，贝塞尔函数 J_1 的根也就是 J_{-1}的根。$x=0$ 是 $J_1(x)$的根，这个根是可以接受的，因为 $x=0$ 时 $J_0(x=0)\neq 0$，所以 $J_1(0)/J_0(0)$有定义。J_{-1}的第一个根 $P_{-11}=0$ 是有意义的，因此对于 LP_{01}模，其截止频率为

$$f_{01}^{c}=\frac{c}{2\pi a\sqrt{n_1^2-n_2^2}}P_{-1,1}=0$$

这就是说 LP_{01}模没有低频截止，工作于 LP_{01}模的光纤在任何频率下都能传播。由表 7.5 还可以看到，贝塞尔函数的根除了零以外最低的是 2.405，它是贝塞尔函数 J_0 的第一个根，与 LP_{11}模的截止条件对应。因此从直流（0Hz）直到 f_{11}^{c}这个频率范围内只有 LP_{01}线偏振模工作。

例 6-6　光纤纤芯半径 $a=250\times 10^{-6}$ m，$n_1=2.1$，$n_2=2.0$，求 LP_{11}模的截止频率 f_{11}^{c}。

解：光纤纤芯半径 $a=250\times 10^{-6}$ m，$n_1=2.1$，$n_2=2.0$，根据式（6.6.28），对于 LP_{11}模，截止频率为

$$f_{11}^{c}=\frac{3\times 10^8}{2\pi\times 250\times 10^{-6}}\frac{1}{\sqrt{2.1^2-2.0^2}}P_{01}$$

P_{01}是贝塞尔函数 J_0 的第一个根，从贝塞尔函数表（见附录）查得为 2.405，由此算得

$$f_{11}^{c}=7.2\times 10^{11}\text{Hz}$$

2. 线偏振模的场分布

为了得到线偏振模的场分布，首先要求得对应模的本征值即横向传播常数 k_{t1}或纵向传播常数 k_z，这就要求解特征方程（6.6.23）或（6.6.24），它们是超越方程，要用数值解。为了使用方便，下面给出的是近似解。

除了 LP_{01}模外，特征方程的近似解为

$$k_{t1}=k_{t1}^{c}\exp\left[\frac{\arcsin(S/k_{t1}^{c}a)-\arcsin(S/V)}{S}\right] \tag{6.6.29}$$

式中 V 为归一化频率，以后会进一步讨论，且

$$V=ak_0\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

$$S^2=(k_{t1}^{c}a)^2-m^2-1$$

对于 LP_{01}模

$$k_{t1}=\frac{(1+\sqrt{2})\,k_0\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{1+(4+V^4)^{1/4}} \tag{6.6.30}$$

通过 k_{t1}可求出 k_z，用 k_z 又可求出 k_{t2}。

用式(6.6.29)、(6.6.30)给出的 k_{t1}近似值，代入弱导光纤近似下的场量表达式，就可据此描出电磁场在光纤中的分布。将近似计算的 k_{t1}代入式(6.6.12c)、(6.6.12d)就得到光纤中电场分布表达式

$$E_{y1}=A_m\frac{J_m(k_{t1}\rho)}{J_m(k_{t1}a)}(\cos m\varphi\ 或\ \sin m\varphi)$$

$$E_{y2}=A_m\frac{K_m(k_{t2}\rho)}{K_m(k_{t2}a)}(\cos m\varphi\ 或\ \sin m\varphi)$$

电场的其他分量比 y 分量要小得多。

例6-7 光纤纤芯半径 a，芯纤与包层折射率 n_1、n_2 同例6-6，工作频率为 10^{12} Hz(高于 LP_{11}模截目频率 $f_{11}^c=7.2\times10^{11}$ Hz)，求 LP_{11}模场分布。

解：为作图方便，取 $A_m=1$。因为 $k_{t1}a=P_{01}=2.405$，所以

$$S^2=2.405^2-1^2-1=1.95$$

$$V=250\times10^{-6}\frac{2\pi\times10^{12}}{3\times10^8}\sqrt{2.1^2-2.0^2}=3.35$$

按式(6.6.29)得到

$$k_{t1}=1.135\times10^4/\text{m}$$

k_{t2}可按下式求出

$$k_{t2}^2=(n_1^2-n_2^2)\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k_{t1}^2 \tag{6.6.31}$$

代入已算得的 k_{t1}，得到

$$k_{t2}=0.71\times10^4/\text{m}$$

根据以上 k_{t1}、k_{t2}值，LP_{11}模电场 E_y 的表达式为

$$\begin{cases}E_{y1}=\dfrac{J_1(1.135\times10^4\rho)}{J_1(1.135\times10^4\times250\times10^{-6})}(\cos\varphi\ 或\ \sin\varphi) & (\rho<a)\\[2ex] E_{y2}=\dfrac{K_1(0.71\times10^4\rho)}{K_1(0.71\times10^4\times250\times10^{-6})}(\cos\varphi\ 或\ \sin\varphi) & (\rho>a)\end{cases}$$

图6-50表示光纤横截面内 LP_{11}模电场沿径向与圆周方向的变化。从圆周方向看，$\theta=0°$、180°时场为零，$\theta=90°$、270°时场最强，但方向相反(即有180°相位差)，$\theta=45°$、225°、135°、315°时场减小到最大值的0.707，这是场在圆周方向正弦(或余弦)分布的特点。在半径场按第一类第一阶贝塞尔函数规律变化。在纤芯与包层界面，场并非为零，而是在包层内较快地衰减到零。LP_{11}模电场在横截面内具体分布示于图6-51。电场只有 y 分量，坐标 θ 等于0°、

180°方向电场为零，90°、180°方向场最强，但两者方向相反。

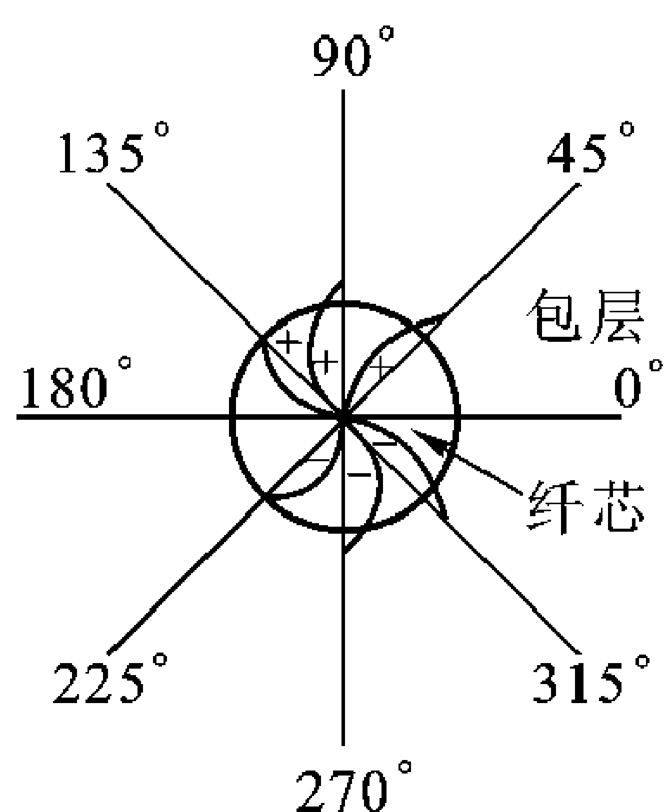


图 6-50　LP_{11}模电场径向与角向的变化

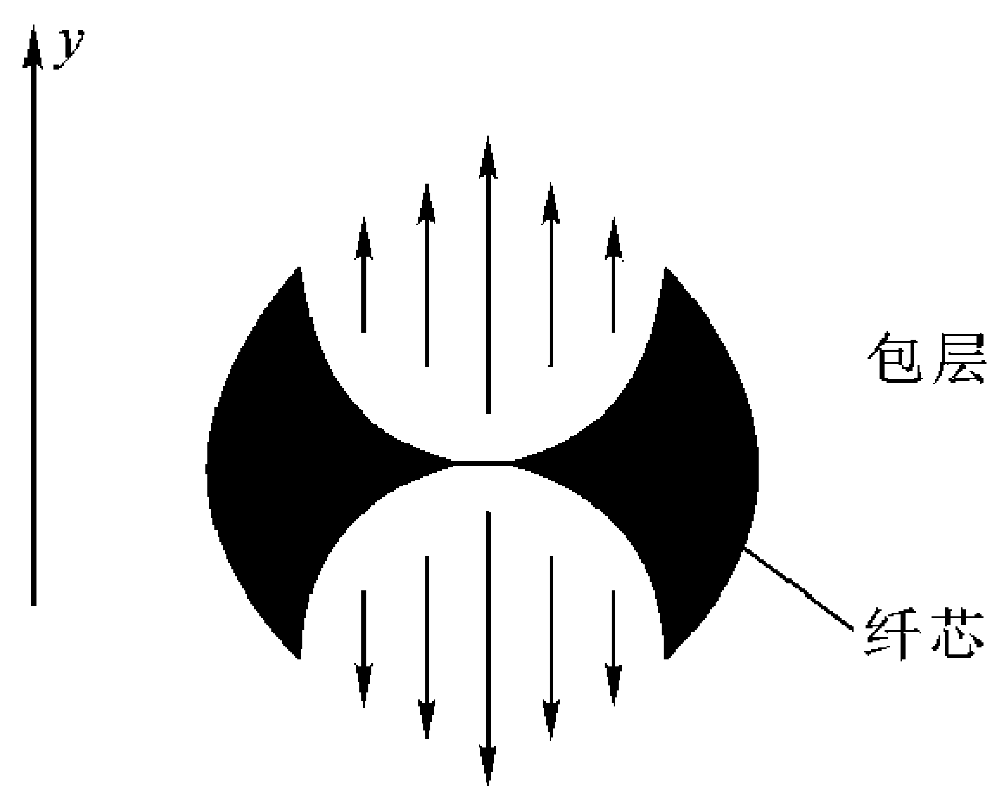


图 6-51　LP_{11}模的电场分布

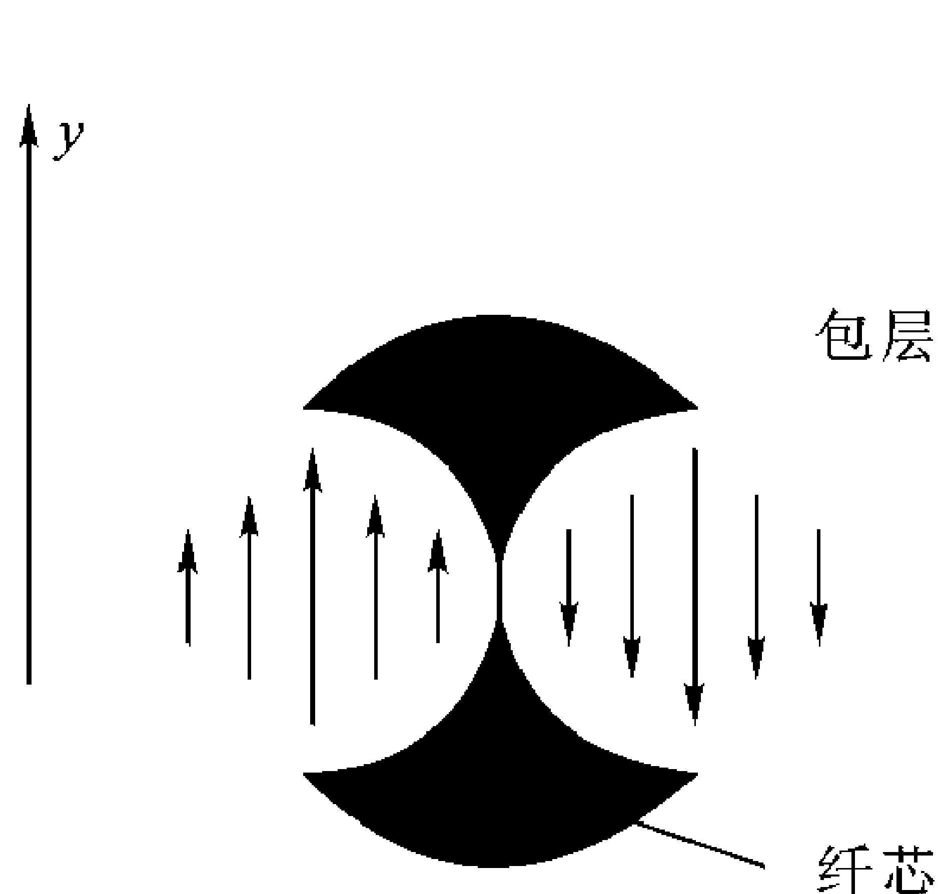


图 6-52　LP_{11}模电场分布，角向按 $\sin\varphi$ 变化

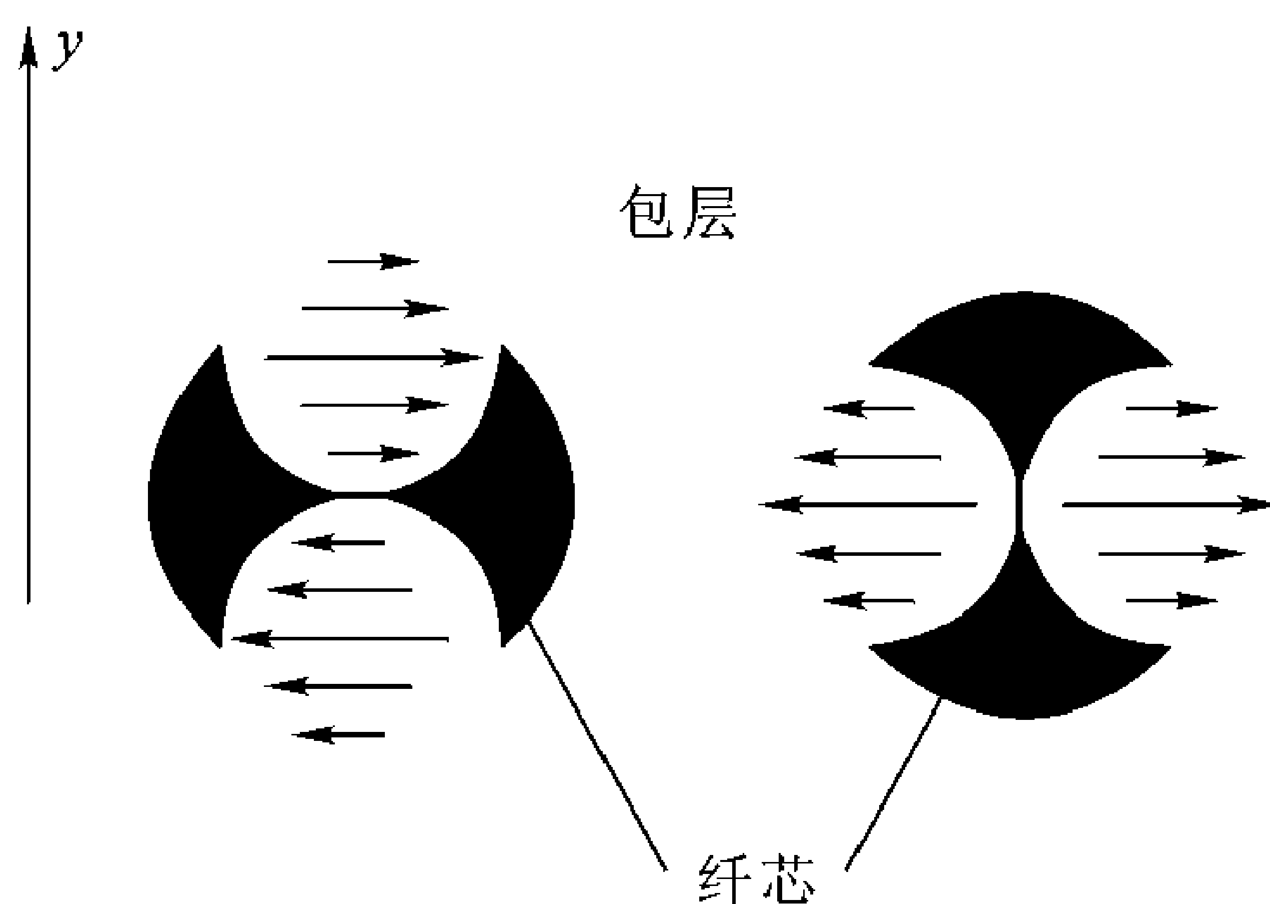


图 6-53　电场指向转过 90°的 LP_{11}模电场分布

这里有必要说明，电场在角向变化也可按 $\cos\varphi$ 变化，此时电场分布图示于图 6-52。此外电场方向也可有两种取向。图 6-53 中表示的 LP_{11}模电场分布图与图 6-51、图 6-52 相比电场指向转过 90°。因此 LP_{11}模是四重简并的。所谓简并是指不同模式的场尽管场结构不同，但具有相同的截止频率。

电场的其他分量比 E_y 小得多。LP_{01}模横截面的电场分布示于图 6-54。因为 $m=0$，所以电场在角向没有变化，场是轴对称的。电场指向同样可取两个方向，一个垂直指向，如图 6-54，另一个水平指向。所以 LP_{01}模是二重简并的。有必要指出，当频率 $f\to\infty$，归一化横向传播常数 $u\to\infty$，$w\to\infty$，此时 $r=a$处横向电场、横向磁场均为零，即场集中在芯区。

3. LP 模与精确解关系

弱导光纤中任何导模都可用 LP 模的线性组合表示，所以 LP 模构成完全系。尽管如此 LP 模还只是波方程的近似解。严格地说，光纤中导模场与坐标 z 相关只出现在因子 $e^{j(\omega t-k_z z)}$。波导横截面场形和分布与 z 无关。对于 LP 模，只有当 $n_1=n_2$ 的极限情况下，其横截面场形与分布才不随波的传播而变化。但从矢量波方程得出的精确解（HE 模或 EH 模），不管 $n_1=n_2$ 还是 $n_1\neq n_2$，导模在波导横截面内场的形状与分布与纵向坐标 z 无关，即不随波的传播而变化。实际上 LP 模是由矢量波方程得出的精确解的组合。比如四重简并的 LP_{11} 模场形状与分布就可看成由 HE_{21}、EH_{01} 和 HE_{01} 3 个精确模场组合而成，而 LP_{01} 模与 HE_{11} 模相当，见图 6-55。

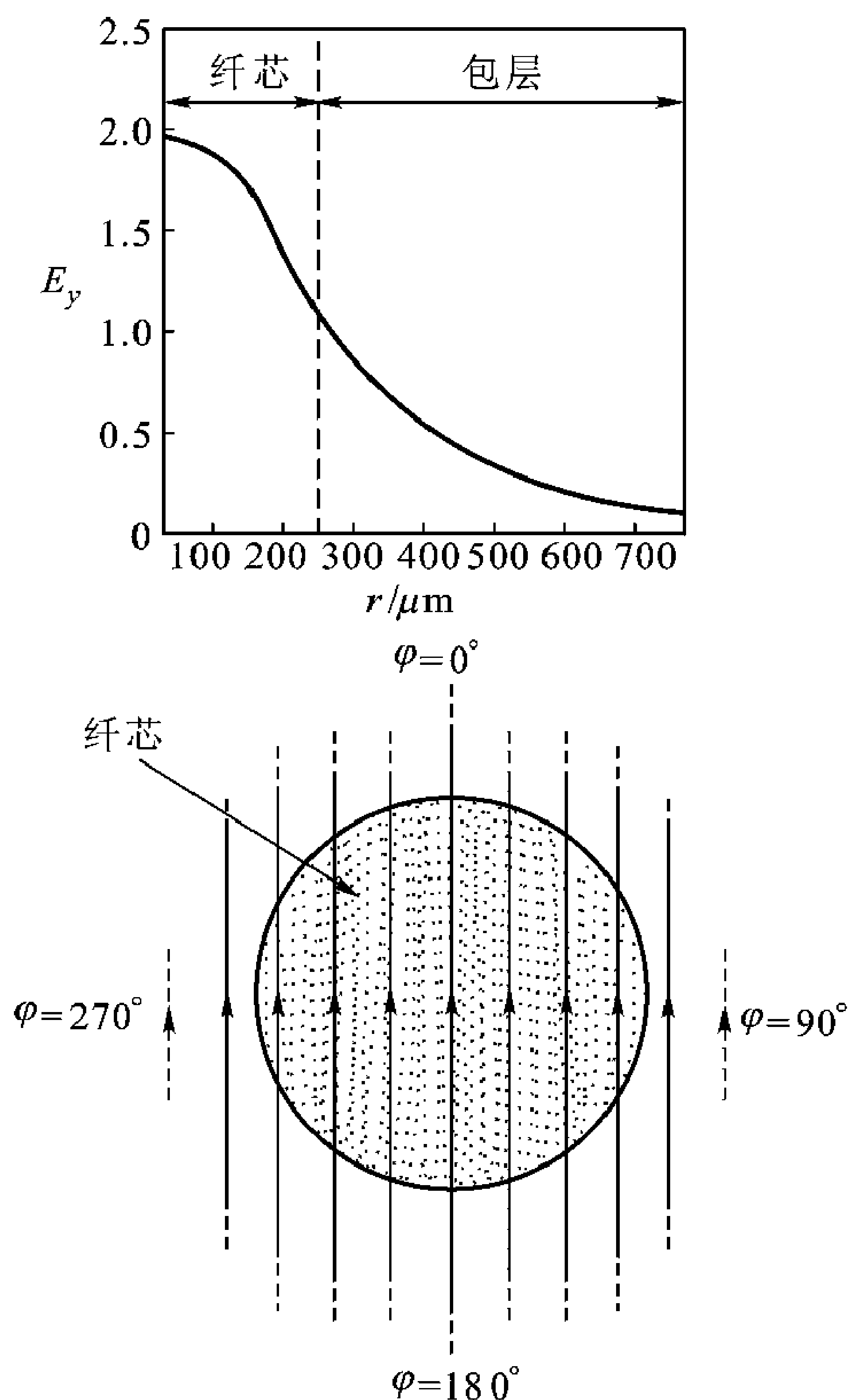


图 6-54 电场 E_y 垂直指向时 LP_{01} 模电场分布

LP 模沿光纤传播过程中，只有当构成 LP 模的几个精确模相位始终保持一致时横截面中场的形状与分布才维持不变，这只有当 $n_1=n_2$ 时才能实现，因为此时所有精确解模

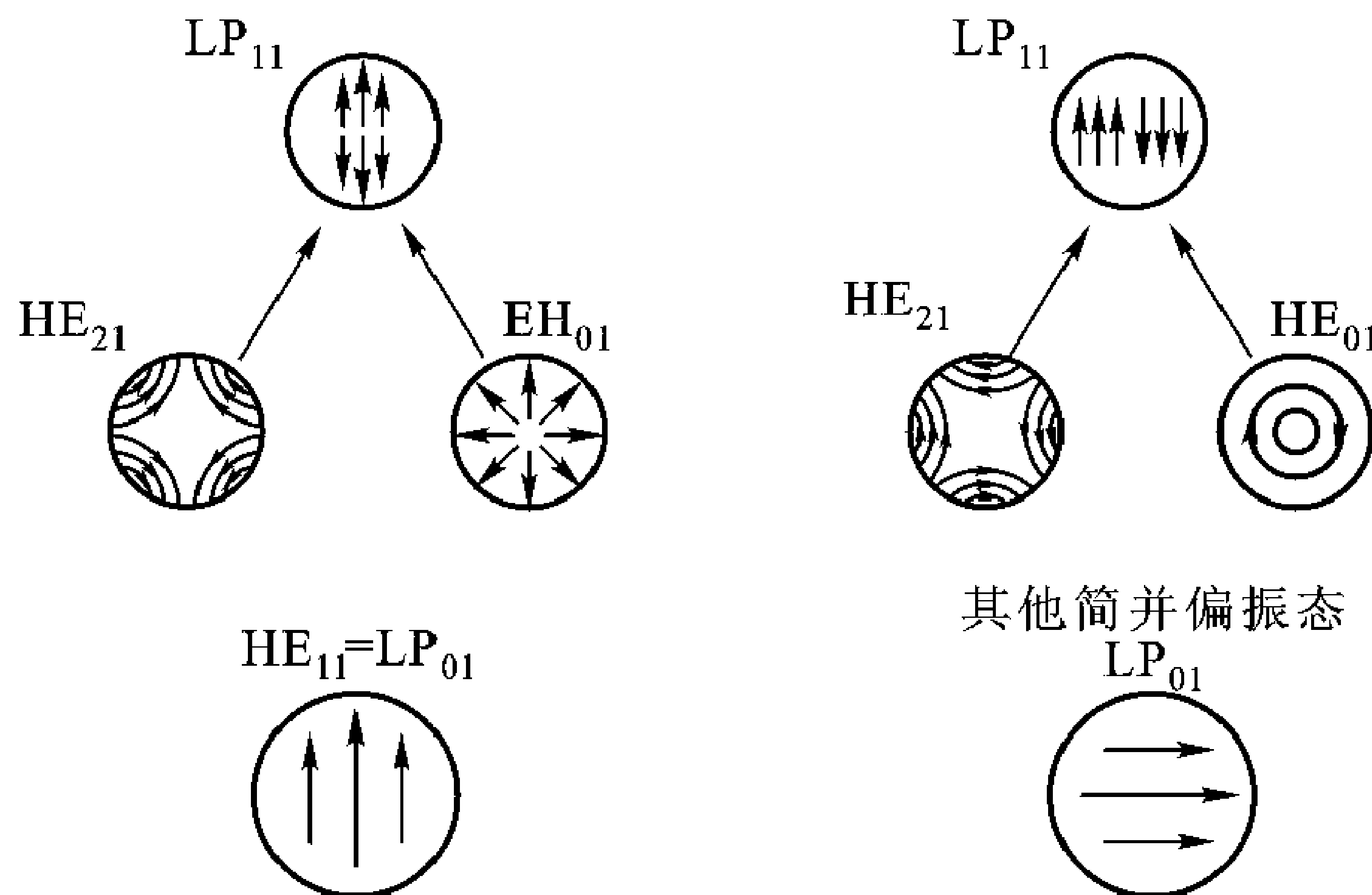


图 6-55 LP 模分解为精确模的组合

式 k_z 是相同的。如果 $n_1 \neq n_2$，但两者之差又比较小，构成 LP 模的各精确解模具有略为不同的纵向波数，随着波沿光纤的传输，相位不一致的程度逐渐变大，几个精确模合成的场在横截面的形状与分布也就随波的传播而有所变化。如果 n_1 与 n_2 的差别很小，波还可传很远的距离而光纤横截面场分布不会有显著变化。所以当 $n_1 \neq n_2$ 时，弱导光纤中 LP 模不是严格意义上的模式，有人称为伪模式。

4. 弱导光纤中的能量分布

为求弱导光纤中能量分布，需要计算坡印廷功率流的 z 分量。在弱导光纤中，比起 E_y、H_x，其他场量小得多，可忽略不计。在这一近似下，坡印廷功率流的 z 分量为

$$S_z = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[E_y H_x^*\right]$$

利用式(6.6.12)、(6.6.14)得到

$$S_{z1} = \frac{A_m^2}{2}\frac{n_1}{\eta_0}\frac{\mathrm{J}_m^2(u\tilde{\rho})}{\mathrm{J}_m^2(u)}\cos^2 m\varphi \quad (\tilde{\rho} < 1, \text{纤芯区}) \tag{6.6.32}$$

$$S_{z2} = \frac{A_m^2}{2}\frac{n_2}{\eta_0}\frac{\mathrm{K}_m^2(w\tilde{\rho})}{\mathrm{K}_m^2(w)}\cos^2 m\varphi \quad (\tilde{\rho} > 1, \text{包层区}) \tag{6.6.33}$$

纤芯和包层中总功率流为

$$P_1 = \frac{1}{2}\frac{n_1}{\eta_0}\frac{A_m^2}{\mathrm{J}_m^2(u)}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \tilde{\rho}\mathrm{J}_m^2(u\tilde{\rho})\cos^2(m\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\tilde{\rho} \quad (\text{纤芯区})$$

$$P_2 = \frac{1}{2}\frac{n_2}{\eta_0}\frac{A_m^2}{\mathrm{K}_m^2(w)}\int_0^{2\pi}\int_1^\infty \tilde{\rho}\mathrm{K}_m^2(w\tilde{\rho})\cos^2(m\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\tilde{\rho} \quad (\text{包层区})$$

为计算以上积分用下面关系

$$\int_0^1 \tilde{\rho}\mathrm{J}_m^2(u\tilde{\rho})\,\mathrm{d}\tilde{\rho} = \frac{1}{2}\left[\mathrm{J}_m^2(u) - \mathrm{J}_{m-1}(u)\mathrm{J}_{m+1}(u)\right]$$

$$\int_1^\infty \tilde{\rho}\mathrm{K}_m^2(w\tilde{\rho})\,\mathrm{d}\tilde{\rho} = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{K}_m^2(w) - \mathrm{K}_{m-1}(w)\mathrm{K}_{m+1}(w)\right]$$

如果我们只要计算纤芯中功率与光纤传输总功率之比，则许多因子可消去，最后得到

$$F_1 = \frac{P_1}{P_1 + P_2} = \frac{\mathrm{K}_m^2(w)\left[\mathrm{J}_m^2(u) - \mathrm{J}_{m-1}(u)\mathrm{J}_{m+1}(u)\right]}{\mathrm{J}_m^2(u)\mathrm{K}_{m-1}(w)\mathrm{K}_{m+1}(w) - \mathrm{K}_m^2(w)\mathrm{J}_{m-1}(u)\mathrm{J}_{m+1}(u)} \tag{6.6.34}$$

$$F_2 = \frac{P_2}{P_1 + P_2} = \frac{\mathrm{J}_m^2(u)\left[\mathrm{K}_m^2(w) - \mathrm{K}_{m-1}(w)\mathrm{K}_{m+1}(w)\right]}{\mathrm{K}_m^2(w)\mathrm{J}_{m-1}(u)\mathrm{J}_{m+1}(u) - \mathrm{J}_m^2(u)\mathrm{K}_{m-1}(w)\mathrm{K}_{m+1}(w)} \tag{6.6.35}$$

得出上面两式我们应用了近似条件 $n_1 \approx n_2$，图 6-56 为 F_1、F_2 与归一化频率 V 的关系曲线。

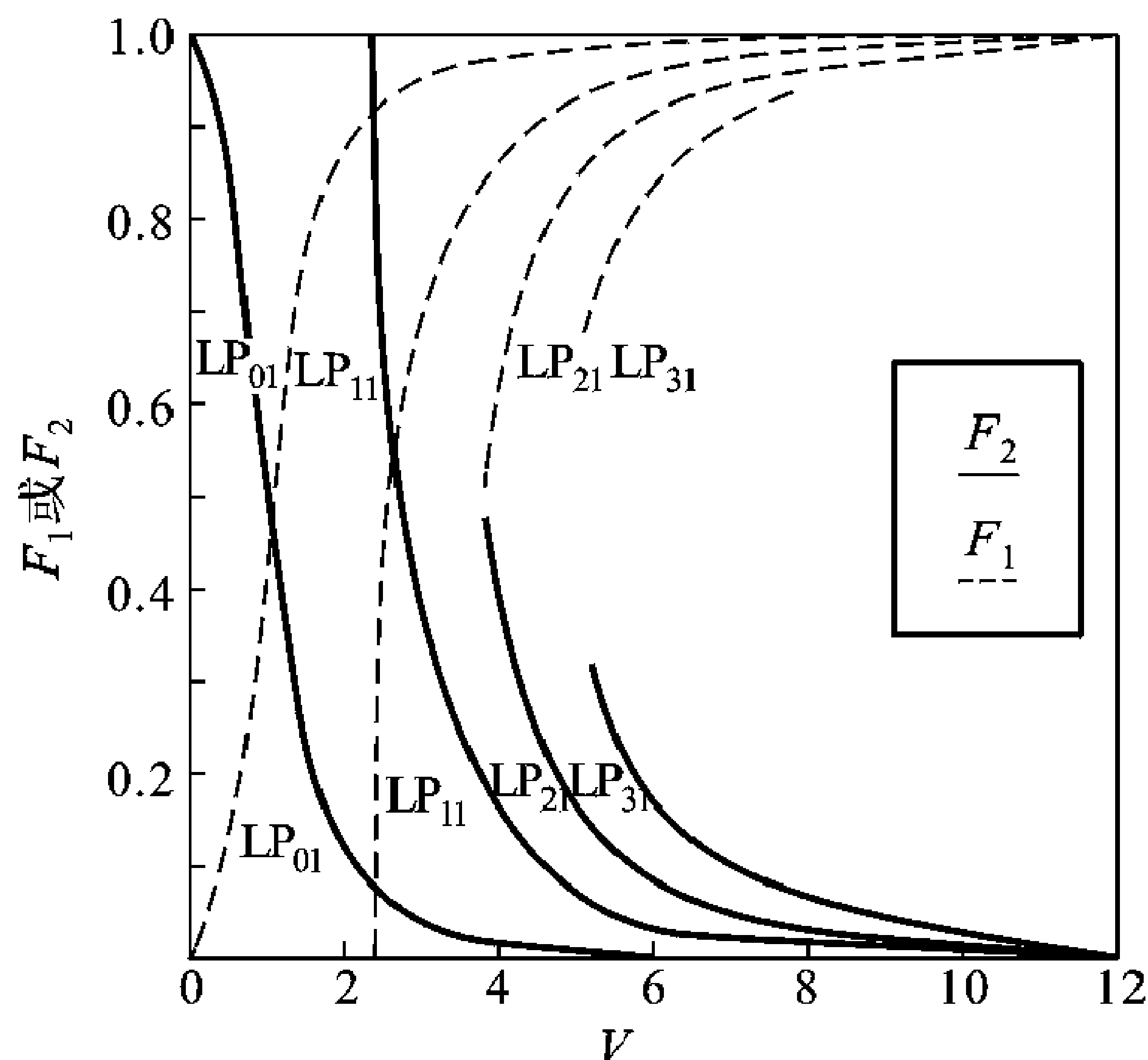


图 6-56 纤芯与包层中传送功率与总功率之比 F_1、F_2 与归一化频率 V 关系

如果仍用前面计算过的光纤做例子，$V = 3.35$，对于 LP_{11} 模，由曲线查得 78% 功率在纤芯中传播，包层中传播的功率占总传输功率的 22%。

6.6.3 归一化参量与色散

1. 归一化波导参量

前面我们针对特定的光纤结构求解特征方程决定本征值以及相应传播模式的特性。下面通过定义归一化波导参量使得特征方程的解适用于所有阶跃光纤。这些特征参量是

$$u = k_{t1} a = a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - k_z^2}$$

$$w = k_{t2} a = a\sqrt{k_z^2 - k_0^2 n_2^2}$$

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

这三个参量已在式(6.6.10a)、(6.6.10b)、(6.5.3)给出。由前两个参量又可导出第四个参量

$$V = \sqrt{u^2 + w^2} = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{6.6.36}$$

叫做归一化频率。用以上参量又可定义归一化传播常数 b，有

$$b = 1 - \frac{u^2}{V^2} \tag{6.6.37}$$

b 是量纲为一的量，与波导大小、波长都无关。将式(6.6.10)、(6.6.36)代入式(6.6.37)得到 b 的又一表示式

$$b = \frac{(k_z^2/k_0^2) - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \tag{6.6.38}$$

在弱导光纤近似下，$n_1 \approx n_2$，上式近似为

$$b \approx \frac{k_z/k_0 - n_2}{n_1 - n_2} \tag{6.6.39}$$

并可改写成

$$k_z \approx n_2 k_0 \ (b\Delta + 1) \approx n_1 k_0 \ (b\Delta + 1) \tag{6.6.40}$$

因此在弱导光纤近似下，k_z 与 b 构成线性关系。

应用特征方程的近似解，对于任一给定 V 值可求出 u 从而确定 b，于是可作 b 与 V 的关系曲线。图 6－57 给出了 LP_{01}、LP_{11}、LP_{21}、LP_{31}几个模的归一化 $b \sim V$ 关系曲线。

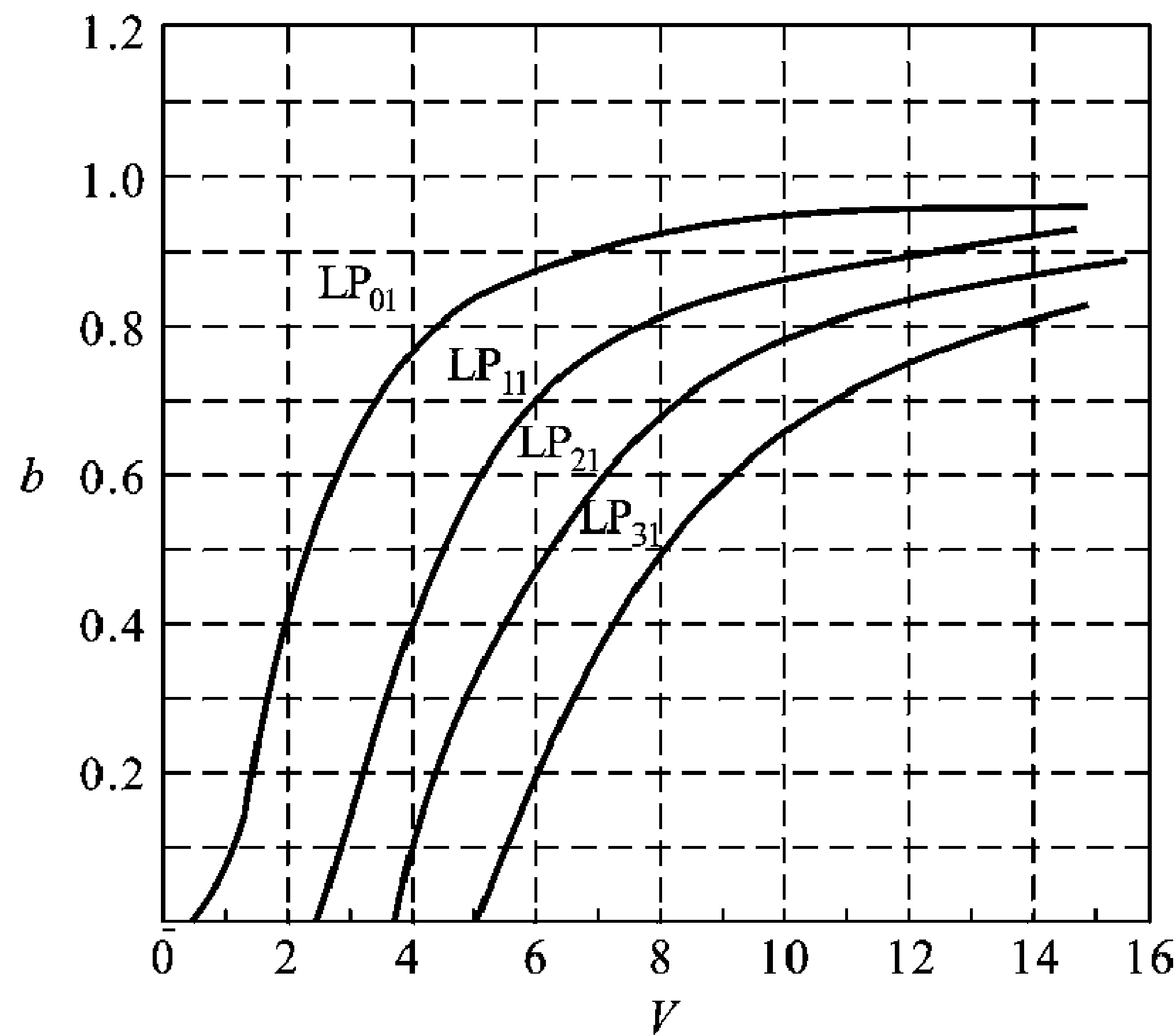


图 6－57 归一化传播常数与归一化频率关系曲线

重新排列式(6.6.36)、(6.6.37)可得

$$u = V\sqrt{1 - b} \tag{6.6.41}$$

$$w = V\sqrt{b} \tag{6.6.42}$$

对于我们前面已计算过的 $a = 250 \times 10^{-6}$ m，$n_1 = 2.1$，$n_2 = 2.0$ 的光纤，工作频率 $f = 10^{12}$ Hz 时从图 6－57 曲线，对于 LP_{11}模 $V = 3.35$ 时，$b = 0.3$。代入上面方程给出 $u = 2.8$，$w = 1.8$，因为 $u = k_{t1} a$，$w = k_{t2} a$，所以 $k_{t1} = \frac{u}{a} = 1.12 \times 10^4$/m，$k_{t2} = \frac{w}{a} = 0.72 \times 10^4$/m。这些结果与直接求解特征方程得到的结

果一样，但其精度受到查曲线的限制，而优点是速度快。

2. 群速和色散

光纤色散主要有材料色散、波导色散和模间色散3种色散效应。所谓材料色散就是由于制作光纤的材料的折射率随工作频率 ω 而变化，从而引起色散。波导色散是由于波导结构引起的色散，主要体现在相移常数 k_z 是频率 ω 的函数，在传输过程中具有一定频谱的调制信号，因其各个分量经受不同的延迟，必然使信号发生畸变。模间色散是由于光纤中不同模式有不同群速从而在光纤中传输时间不一样，同一波长的输入光脉冲，不同的模色将先后到达输出端，在输出端叠加形成展宽了的脉冲波形。显然只有多模光纤才会存在模间色散。模间色散比波导色散严重得多，这就是多模光纤传输信号的能力比单模光纤小得多的原因。对于单模光纤一般还存在一个波导色散与材料色散相抵消的零色散频段，大大增加了传输距离。下面对光纤的波导色散进行较为深入的分析。

群速定义为 $v_g = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k_z$，利用归一化传播常数表达式(6.6.40)得到

$$v_g^{-1} = \frac{\mathrm{d}k_z}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n_1 k_0) \times (b\Delta + 1) + n_1 k_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(b\Delta + 1) \tag{6.6.43}$$

利用弱导光纤近似，上式右边可简化，首先式(6.6.36)可简化为

$$V = ak_0\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx ak_0 n_1 \Delta = a\frac{\omega}{c}n_1\Delta \tag{6.6.44}$$

上式对 ω 微分，得到

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\omega} = \frac{a}{c}n_1\Delta + a\frac{\omega}{c}\Delta\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\omega} = \frac{V}{ck_0} + \frac{V}{n_1}\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\omega}$$

这里我们假定纤芯和包层区色散是相同的，所以 Δ 与频率无关。利用上面结果，式(6.6.43)可展开为

$$\frac{\mathrm{d}k_z}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n_1 k_0) + b\Delta k_0\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\omega} + \frac{n_1 b\Delta}{c} + n_1 k_0\Delta\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}V}\left(\frac{V}{ck_0} + \frac{V}{n_1}\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\omega}\right) \tag{6.6.45}$$

上式右边有两项相对于其他项很小可略去。对于典型的光纤，$\omega\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega} \ll n$ 总是成立的，这就意味着

$$b\Delta k_0\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\omega} \ll \frac{n_1 b\Delta}{c}$$

以及

$$\frac{V}{n_1}\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\omega} \ll \frac{V}{ck_0}$$

因此式(6.6.43)可简化为

$$\frac{\mathrm{d}k_z}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n_1 k_0) + \frac{n_1\Delta}{c}\left(b + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}V}V\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(n_1 k_0) + \frac{n_1}{c}\Delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(Vb)$$

$$= \frac{1}{c}\left(n_1 + \omega\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\omega}\right) + \frac{n_1\Delta}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(Vb) \tag{6.6.46}$$

这里我们应用了关系 $k_0 = \omega/c$。式(6.6.46)中第一项是纤芯材料的群折射率。在弱导光纤近似下，可以认为纤芯和包层的群折射率相等，并定义

$$m = n_1 + \omega\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\omega} = n_2 + \omega\frac{\mathrm{d}n_2}{\mathrm{d}\omega}$$

为整个光纤材料的群折射率，于是式(6.6.46)成为

$$\frac{\mathrm{d}k_z}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{c}\left(m + n\Delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(Vb)\right) \tag{6.6.47}$$

此处 $n = n_1 \approx n_2$ 作为光纤整体的折射率。

光纤中传播波的群速最终可表示为

$$v_g = \frac{1}{\mathrm{d}k_z/\mathrm{d}\omega} = \frac{c}{m + n\Delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(Vb)} \tag{6.6.48}$$

光通过群折射率为 m 的无限大均匀媒质，群速为 $v_g = c/m$。与式(6.6.48)相比，可以定义光纤有效群折射率 N，其物理意义是光纤中波的群速等于光通过群折射率为 N 的无限大均匀媒质中的群速，即 $v_g = c/N$。显然 N 包括两项

$$N = m + n\Delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(Vb) \tag{6.6.49}$$

第一项表示构成光纤的材料色散。第二项与特征方程决定的 b、V 参数有关，属于波导色散。

为了求出 v_g，要计算$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(Vb)$，由下式给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(Vb) = b\left[1 - \frac{2\mathrm{J}_m^2(u)}{\mathrm{J}_{m-1}(u)\mathrm{J}_{m+1}(u)}\right] \tag{6.6.50}$$

对于给定的归一化频率 V，通过求解特征方程得到 u 和 w。这里 m 取正整数，对应于线极化模 LP_{mn}的下标 m。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(Vb)$叫做波导的归一化群时延。图6-58表示 LP_{01}、LP_{11}、LP_{21}、LP_{31}模波导归一化群时延与归一化频率的关系。

根据以上结果，可以得到特定光纤的群速。图 6-59 给出群速与光速之比跟归一化频率 V 的关系。相应光纤的参数是 $n_1 = 1.5$，$\Delta = 0.005$ 和 $m = 1.518$。

例 6-8 已知长10 km阶跃光纤纤芯折射率 $n_1 = 1.5$，纤芯半径 $a = 25\ \mu\mathrm{m}$，相对折射率差 $\Delta = 0.005$，工作波长 $\lambda = 1.5\ \mu\mathrm{m}$，由于多模色散，传输的最大比特率为多少？(提示最大比特率 R_b 可由下式求出 $R_b < 1/(4\Delta\tau)$，$\Delta\tau$ 为色散引起的最大渡越时间差。)

解： 归一化频率

$$V \approx ak_0 n_1 \sqrt{2\Delta} = 25 \times 10^{-6} \times \frac{2\pi}{1.5 \times 10^{-6}} \times 1.5 \sqrt{2 \times 0.005} = 15.7$$

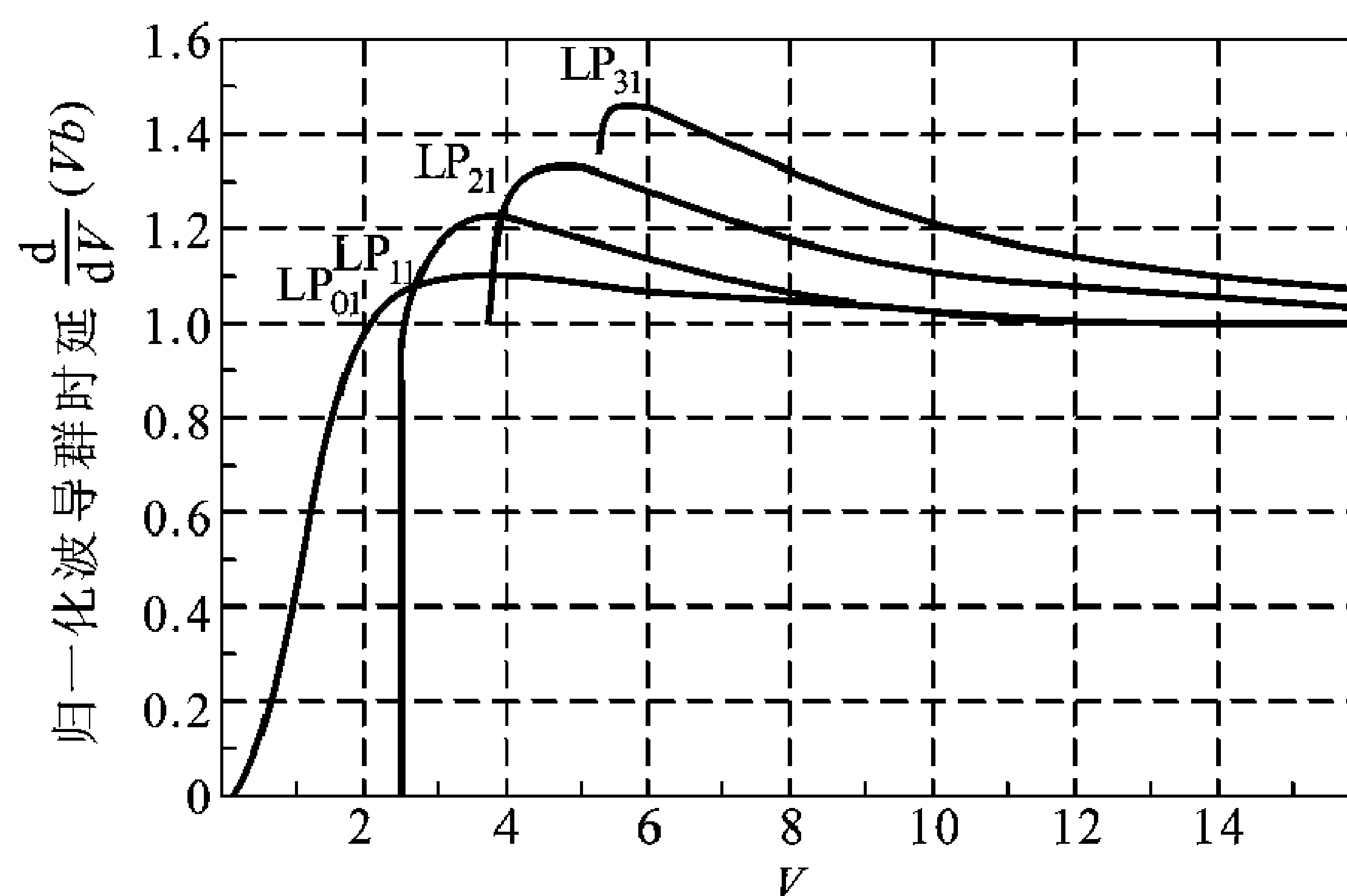


图 6－58　归一化波导群时延与归一化频率关系

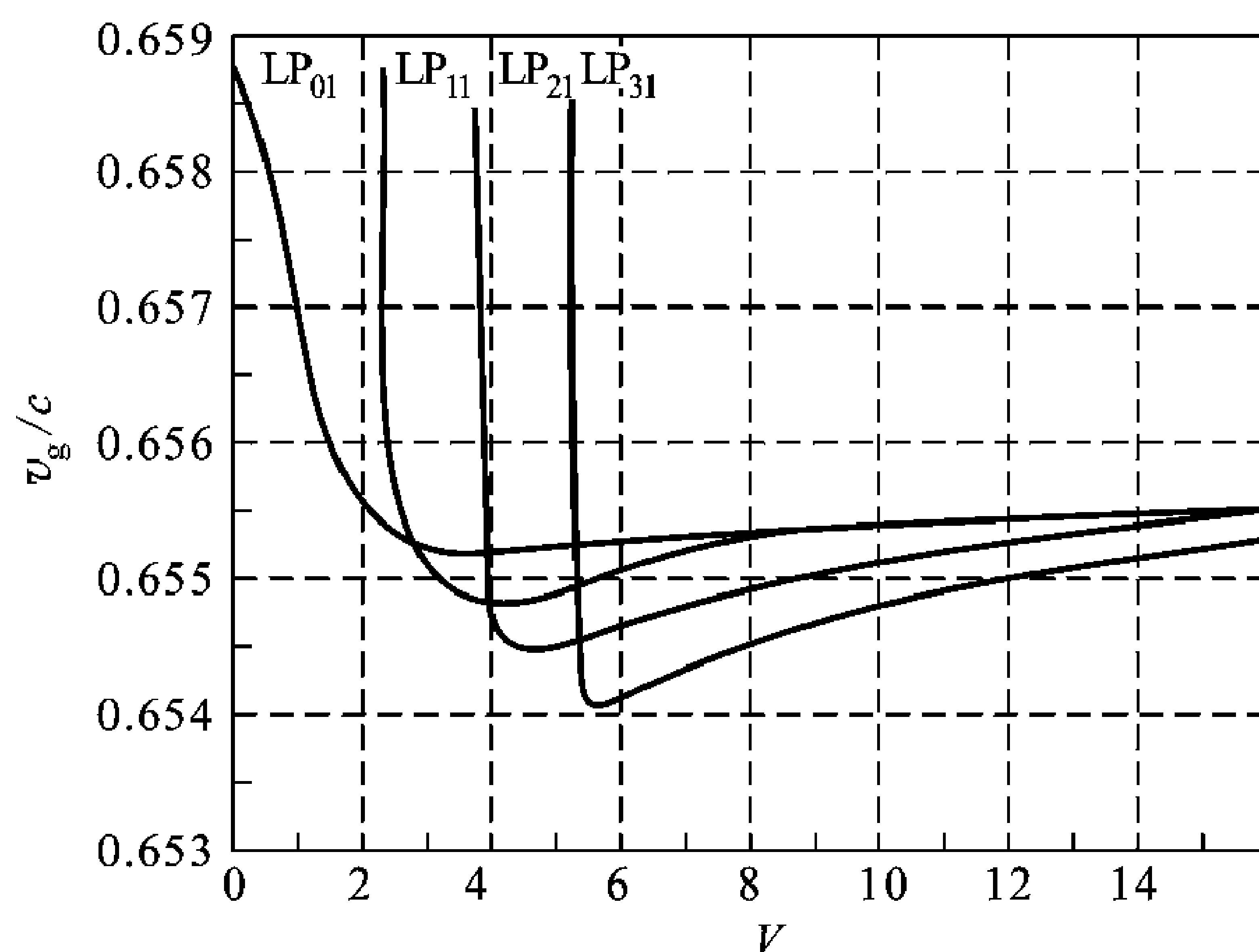


图 6－59　群速和光速之比与归一化频率关系

假设光通过 10 km 长光纤，LP_{31}与 LP_{01}模渡越时间差就近似为模式色散引起的最大渡越时间差，则由图 6－59 查得，当 $V=15.7$ 时，$\left.\frac{v_g}{c}\right|_{LP_{01}}=0.655\ 5$，$\left.\frac{v_g}{c}\right|_{LP_{31}}=0.655\ 23$，所以最大渡越时间差 $\Delta\tau_{max}$近似为

$$\Delta\tau_{max} = \left| \frac{10 \times 10^3}{0.655\ 5 \times 3 \times 10^8} - \frac{10 \times 10^3}{0.655\ 23 \times 3 \times 10^8} \right|$$

$$= \frac{10^4}{3 \times 10^8} \frac{2.7 \times 10^{-4}}{0.655\ 5 \times 0.655\ 23} \approx 2.1 \times 10^{-8}$$

最大比特率

$$R_b = 1/(4\Delta\tau_{max}) = \frac{1}{4 \times 2.1 \times 10^{-8}} = 1.19 \times 10^7 \text{bit/s}$$

6.6.4　无源光器件

光纤的连接与光纤连接器

光纤与光纤的连接有两种，一种是永久性连接，另一种是活动连接。

光纤与光纤的永久性连接通常采用高频电弧放电熔接的方法，熔接在专用的光纤熔接机上进行。光纤端面切割好后，光纤间的对准、调整及熔接、损耗测量等步骤都在微处理机的控制下自动完成，熔接质量很好，同种光纤间的接头附加损耗可达 0.1 dB 以下。

光纤连接器的作用是实现系统中设备之间、设备与仪表之间、设备与光纤之间及光纤与光纤之间的活动连接，以便于系统的接续、测试和维护。

对光纤连接器的主要要求是插入损耗小、体积小、装拆重复性好、可靠性好及价格便宜。

光纤连接器的结构种类很多，但大多用精密套筒来准直纤芯，以降低损耗，见图 6－60。

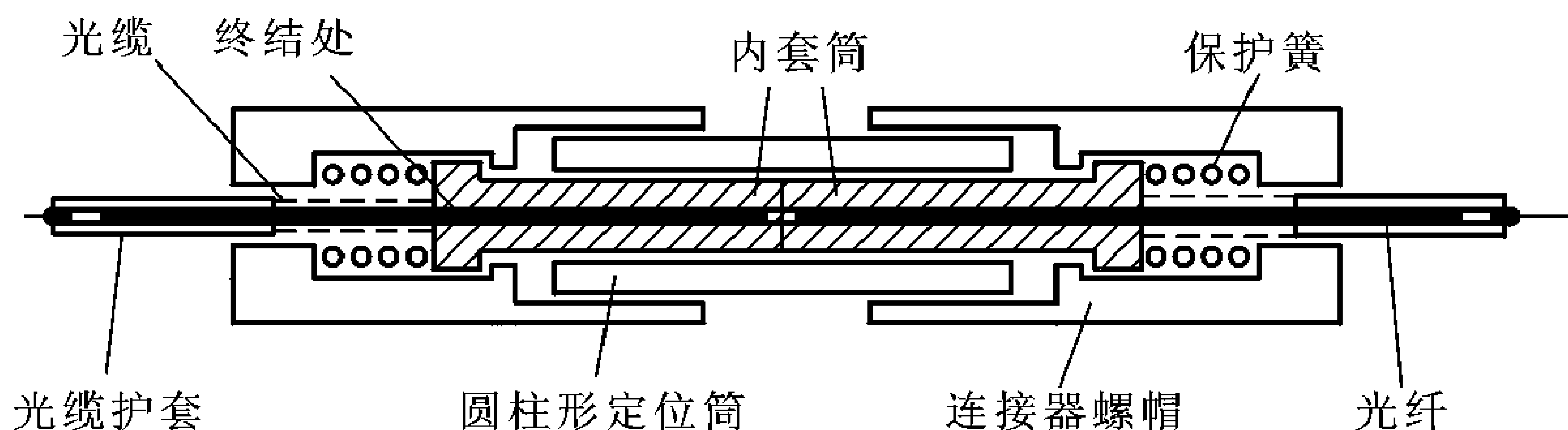


图 6－60　圆柱套筒型光纤活动连接器

光纤分路器及耦合器

矩形波导中金属波导壁将电磁能量限制在金属波导壁围成的空间内，因而欲将波导中能量耦合出去，需在波导壁上开槽或开孔。对于光纤，包层中也有部分能量贮存，两光纤之间能量的耦合，可在包层内进行，这就是设计光纤分路器及耦合器的依据。

光纤分路器及耦合器的种类很多，如 Y 型分路器、X 型 2×2 定向耦合器、$1 \times N$ 及 $N \times N$ 星形耦合器等（图 6－61）。它们在光纤传输系统中完成光信号的分配或合成、光信号的提取与监测等多种功能，应用十分广泛。

Y型分路器是把两个输出光纤的斜端面拼在一起后与输入光纤熔接而成。送入每个输出臂中的光功率大小取决于它们分别“看到”的输入光纤纤芯面积的大小。

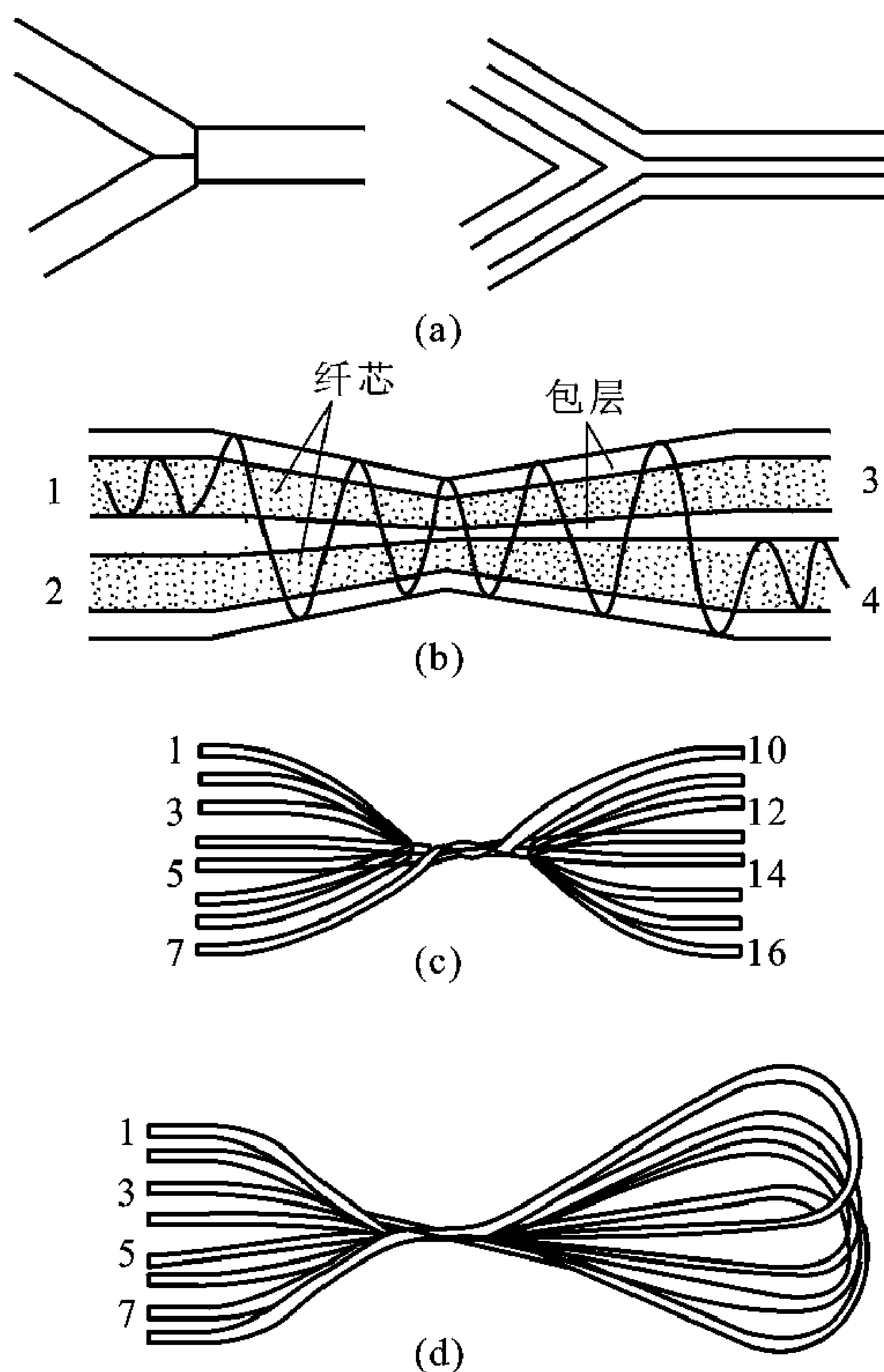


图 6－61 光纤分路器及耦合器

(a) Y型分路器 (b) X型 2×2 定向耦合器

(c) 8路传输型星形耦合器 (d) 8路反射型星形耦合器

2×2 定向耦合器及 1×*N*、*N*×*N* 星形耦合器大多采用熔融渐变双锥的制造方法，即将多根裸光纤绞合在一起，火焰加热到软化温度后适当拉伸，在熔融区形成渐变双锥结构。这类耦合器的工作原理，对多模光纤与单模光纤是不同的。对多模光纤耦合器，从输入端到输出端，光纤的芯径先是逐渐变细，这时可传输的模式愈来愈少，达到截止状态的模式功率辐射入包层中，直到所有的导模都变成包层模。而后随着芯径的逐渐变大，光功率又重新耦合入芯层中，并相当均匀地把能量分配到每根输出光纤中。任意一根输入光纤的光功率都较均匀地分配到每根输出光纤中去。单模光纤耦合器的工作机理基于消失场耦合。消失场的功率与 *V* 值密切相关，*V* 值低消失场强。以 2×2 单模光纤定向耦合区为例，在耦合区，光纤芯径变小且两个芯区非常靠近，不但 *V* 值显著减小，且两者消失场强烈重叠耦合，光功率可从一根光纤耦合到另一根光纤，且随后又可耦合回来。由相应的耦合区的长度及纤芯间包层的厚度，可在两根输出光纤中获得预期光功率比例。

另外，可用多个Y形分路器，2×2 定向耦合器来构成 1×*N*、2×*N* 星形耦合器。如图 6－62。

还可用多个 2×2 定向耦合器来构成 *N*×*N* 的星形耦合器。例如，可用 32 个 2×2 单模光纤定向耦合器构成 16×16 的星形耦合器。现在 32×32 的耦合器商品也已经出现了。

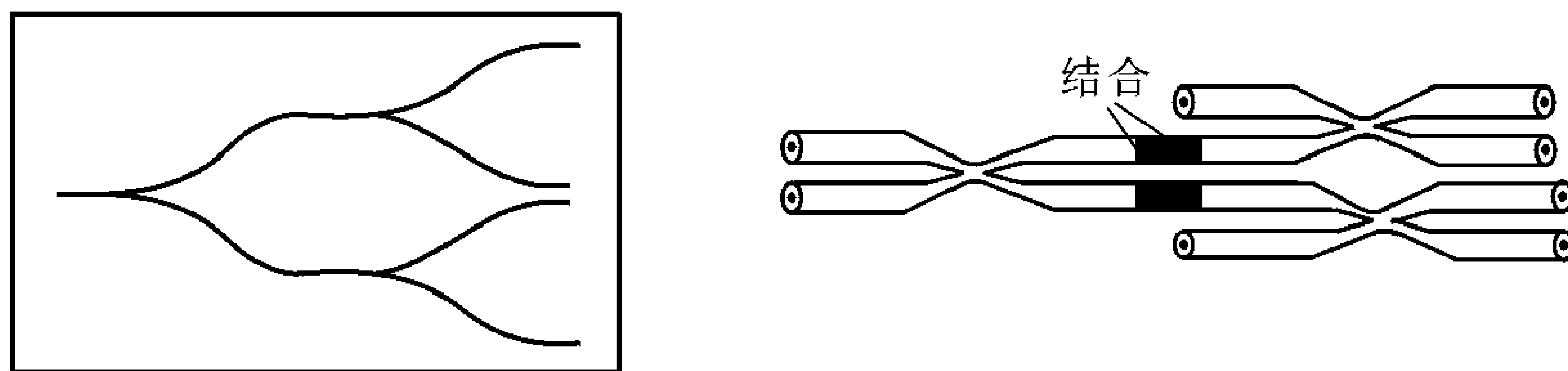


图 6－62　用 Y 形分路器、2×2 定向耦合器构成星形耦合器

光纤光栅与波分复用器

波分复用器

光波分复用(WDM)是在单根光纤上同时传输几个不同波长的光信号,以增加光纤传输系统的信息容量的一种技术。波分复用器把不同波长的光信号复合注入到一根光纤中,或者相反地把复合的多波长信号解复用,把不同波长的信号分离出来。

波分复用器的种类很多,图 6－63 示出衍射光栅型、棱镜色散型及干涉滤光型几种波分复用器的分光元件,它们由光纤、分光元件和准聚焦系统组成。这几种波分复用器结构都比较复杂。图 6－64 给出 1.3 μm 四波分单模光纤波分复用器的谱特性,其插入损耗为 5 dB,信道间串话小于 40 dB。

熔融光纤耦合器也可制成光纤型波分复用器。主要区别是,作耦合器用时,两光纤之间耦合系数要尽量设计得与频率或波长无关,但作波分复用器时,耦合系数在给定频率范围内要随工作波长的不同而变化。例如对于 2×2 式光纤定向耦合器作为二波长分波器使用时,两光纤之间耦合系数设计得当 $(\lambda_1+\lambda_2)$光信号从端口①输入时,λ_1 的光耦合到端口②,而 λ_2 的光耦合到端口④,从而将 λ_1、λ_2 的光分开。用这种结构做成的二波长分波器,如波为 1 300/1 500 nm、980/1 500 nm、1 480/1 550 nm,其插入损耗低(约 0.2 dB),信道间串话小于 15～20 dB。熔融式光纤波分复用器以目前的技术已做到 16 路波分复用。利用光纤光栅可实现密集波分复用。

光纤光栅

第 5 章例 5－10 指出,当厚度为 d 的高、低折射率介质组成周期结构时,对于以 $\lambda_z=4d$ 为中心的狭窄波长范围内,入射光几乎全反射,而在此波长范围以外,反射很小。这是一个反射式滤波器。如果沿光纤轴线方向,使光纤纤芯折射率呈周期性变化[如图 6－65 (a)],设其周期为 $d=d_1+d_2$,则在 $\lambda_z=2d$ 的狭窄波长范围内,光也将被全部反射回来,可构成一滤波器。纤芯折射率呈周期性变化的光纤叫光纤光栅。

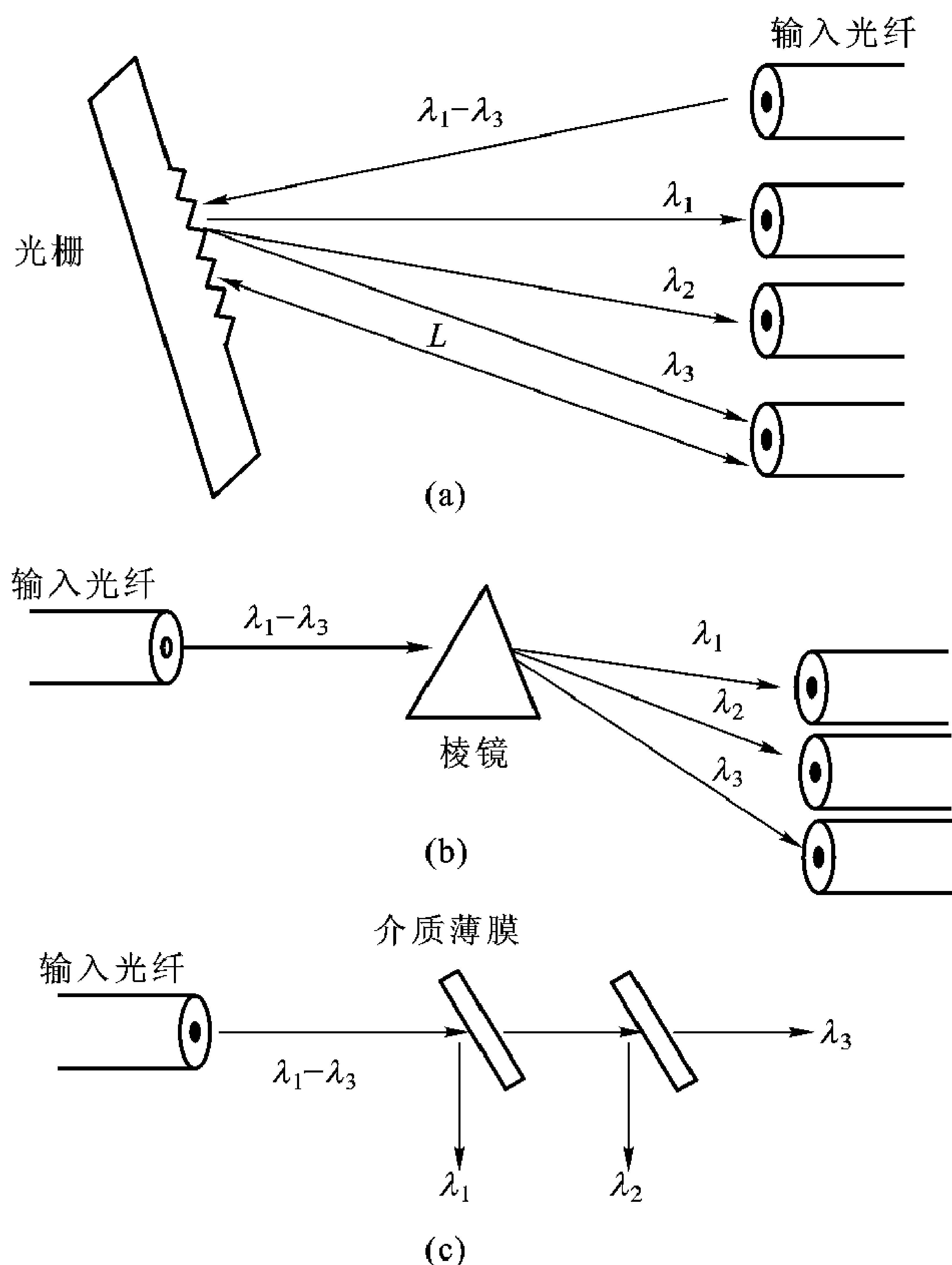


图6－63　波分复用器中几种分光机构

(a) 衍射光栅型　(b) 棱镜色散型　(c) 干涉滤光型

光纤光栅1978年就制作出来，其纤芯的折射率沿轴向周期变化。光纤光栅的制作基于光纤在强紫外光的照射下其折射率会发生永久性变化的特性。折射率变化(Δn)与照射光的强度、波长、光纤掺杂等因素有关。光纤光栅制作的原理装置示于图6－65(b)。最核心的是一块相位掩模板(phase mask)，它是一块平板玻璃，对紫外光是透明的，在玻璃的一个表面用光刻技术制作相位光栅，它的占孔系数为50%，即有50%的光可透过相位光栅。光纤放在光栅一侧，紫外光从玻璃另一面垂直射入。穿过相位光栅的主要有0级、+1级、－1级衍射光。相位光栅的设计使得0级衍射光占整个衍射光的比例低于5%，而+1级、－1级衍射光各

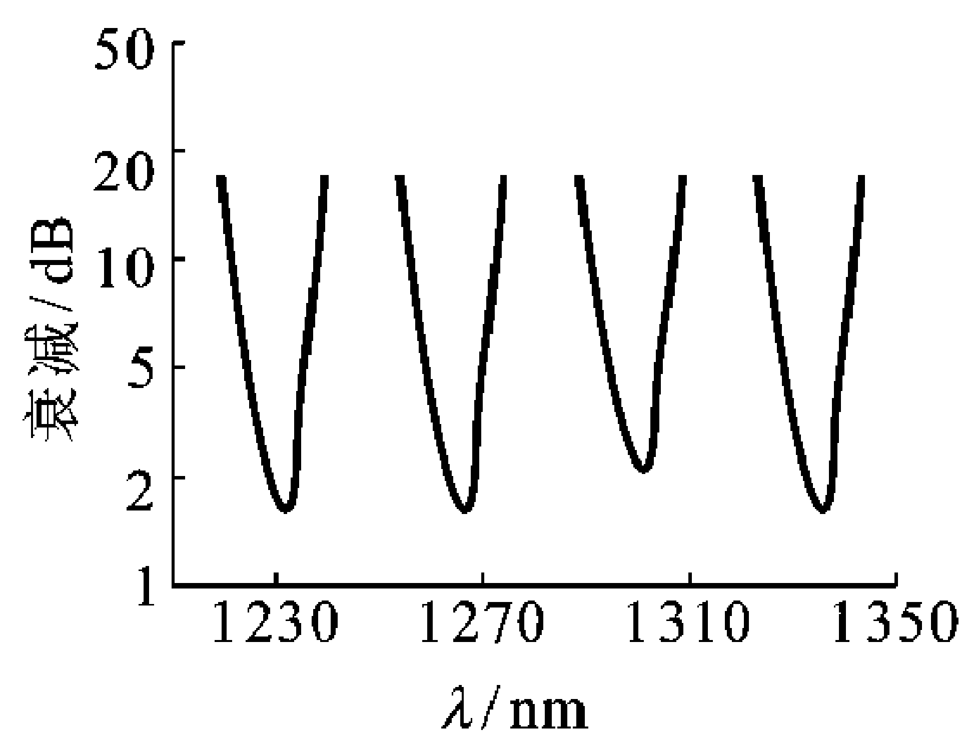


图6－64　四波分单模光纤波分复用器的谱特性

占整个衍射光的 40%，+1 级、-1 级衍射光的干涉使光纤所在位置光强产生周期性调制。在这种强度周期性调制的光照射下，光纤的折射率产生永久性的周期变化。

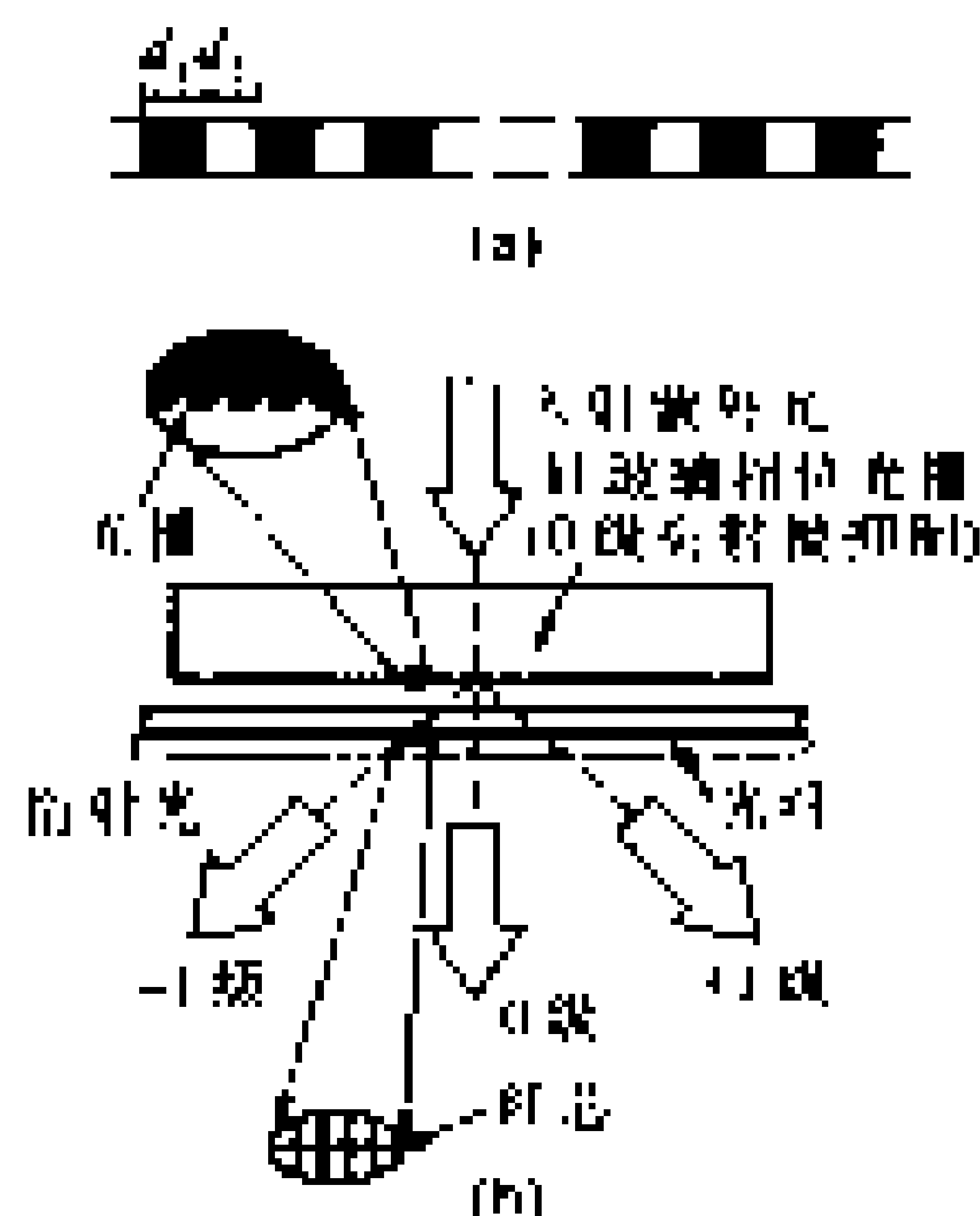


图 6-65 光纤光栅制作装置

(a) 掩模板 (b) 光纤光栅制作装置

光纤光栅在光纤结构的信号处理器件中有着极其重要而广泛的应用，下面是光纤光栅实现密集波分复用解复用的一个解决方案（见图 6-66）。当 λ_1、λ_2、…、λ_n 路光信号由环形器 C_1 端口 2 输入，就从端口 3 输出。如果光纤光栅（FG）反射谱中心波长设计为 λ_i，则输入的多路光信号中，中心波长为 λ_i 的光信号被反射并通过端口 1 下载。如欲将 λ_i 光信号复用到光纤上，可将 λ_i 的光信号从环形器 C_2 的端口 1 输入，此信号就从端口 2 输出，并由于光纤光栅的反射从端口 3 输出加入到 λ_1、λ_2、…、λ_n 的多路光信号中沿光纤传输。这种复用解复用方案的缺点是，每一路复用或解复用都要有一个光纤环形器与之配套，而光纤环形器是很贵的。

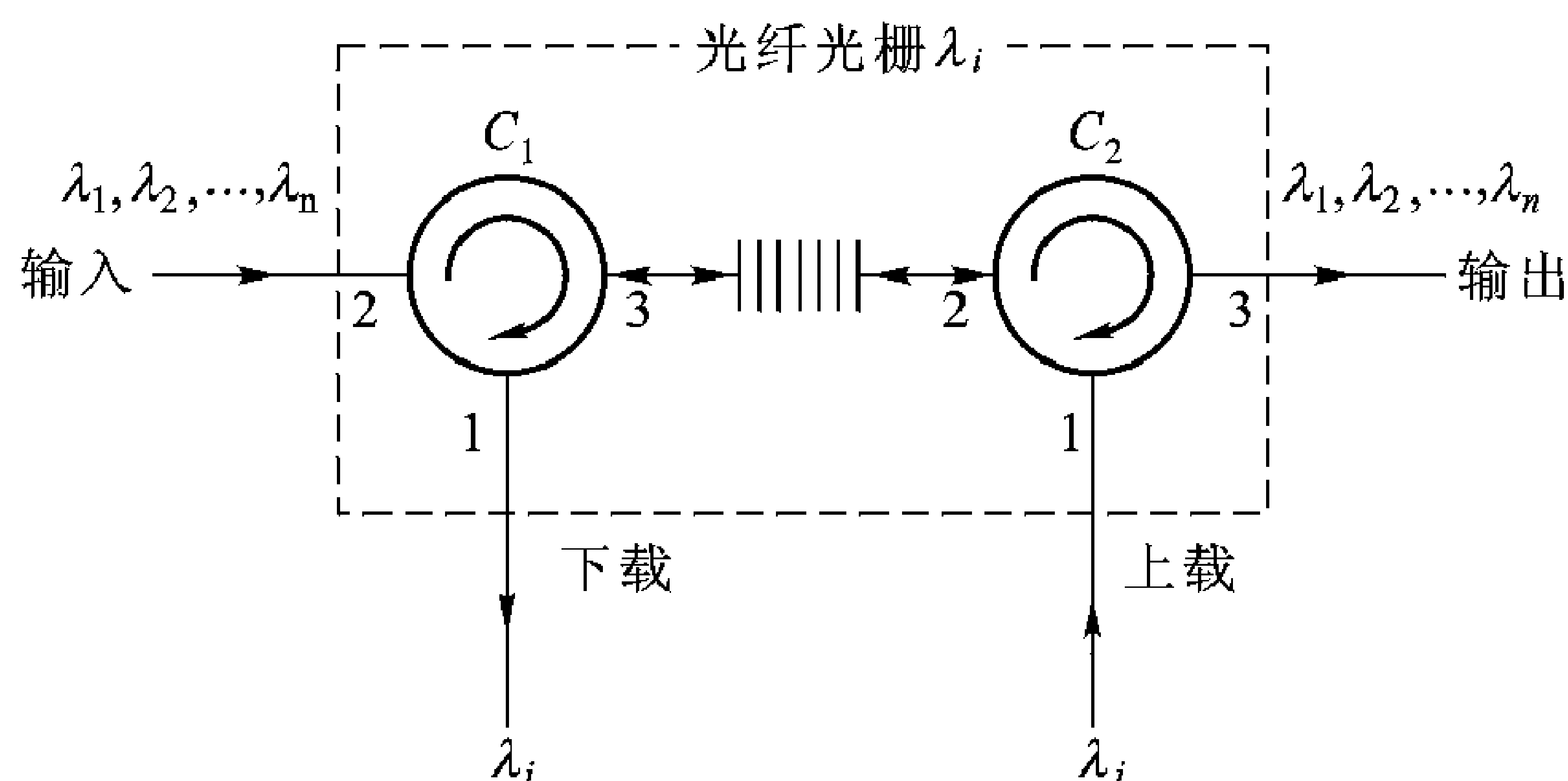


图 6-66 光纤光栅密集波分复用器解决方案之一

本章要点

- 波导用来定向传播电磁波。尽管各类波导的几何尺寸相差几个数量级，但其横截面尺寸与波长相比都在同一量级，其构成材料从金属到介质，结构从封闭到敞开，但其横截面总可分成内部区域与外部区域，波沿波导传播的过程是内部区域传播的电磁波在内外区域交界面发生全内反射，从而使波沿纵向

曲折前进。

- 沿波导纵向无衰减传播的波横向必是驻波场，即发生谐振，这就是波导的横向谐振原理，横向谐振原理对求解波导的色散关系十分有效。
- 描述波导的特征参数主要是模式与场分布、色散特性、特征阻抗以及损耗。模式是满足波导横向边界条件的一种特定场分布，场分布模式的大类有 TE、TM 之分，TE 模纵向电场分量 $E_z=0$，TM 模纵向磁场分量 $H_z=0$。波导横截面具体场结构的区别用下标 mn 表示，如 TE_{mn}，TM_{mn}。不同结构波导中下标 mn 代表的物理意义要搞清楚。色散特性 $k_z(\omega)$是限制波导传输信号速率的重要因素。不同波导连接时特征阻抗是衡量波反射的重要因素。
- 矩形波导边界条件规则简单，可以得到解析解。描述波导的特征参数，如模式与场分布、色散关系、特征阻抗都可由矩形波导的分析得到清晰的说明。要通过矩形波导来理解波导的各种概念。
- 圆波导与矩形波导十分相似，可对照起来学。
- 横向谐振原理对分析平面结构波导十分有用。对于介质光波导，横向谐振条件表示为$\sum Y=0$，即从任一参考面向参考面两边看进去的输入导纳(或输入阻抗)之和为零。
- 光纤的射线分析帮助我们形象直观地理解光在光纤中传播，如数值孔径、光线自聚焦等。光纤的波动分析包括了光纤的射线分析。由于光纤纤芯折射率比包层折射率稍大一些，光线在纤芯中几乎与轴平行，场的纵向分量很小，因而可用标量波动分析进行近似。光纤与柱形金属波导(矩形波导与圆波导)不同，没有低频截止。光纤损耗很小，几乎达到它的理论极限，损耗已不是限制光纤远距离传输的主要因素，限制光纤更远距离传输信号的主要因素是色散，色散有材料色散和波导色散，对于多模光纤还有模间色散。

习题

6.1 试说明为什么规则金属波导内不能传播 TEM 模。

6.2 什么叫模式简并？矩形波导和圆波导中模式简并有何异同？

6.3 矩形波导 BJ-100 的宽边尺寸为 $a=22.86$ mm，窄边尺寸为 $b=10.16$ mm，传输频率为 10 GHz 的信号。求截止波长 λ_c，导波波长 λ_g，相速 v_p 和特征阻抗 Z_c。当频率 f 稍微上升时，上述各参量如何变化？当宽边 a 稍微增大时，上述各参量如何变化？当窄边 b 稍微增大时，它们又怎么变化？

6.4 上题中信号频率由 10 GHz 逐步增大到 30 GHz，写出在波导中依次可能出现的高次模式。

6.5 在一均匀矩形波导($b=a/2$)中输入 $f=10$ GHz 的信号，测得波导中单模工作的导波波长 $\lambda_g=4$ cm。求出各模式下的 f_c，v_p，v_g 和特征阻抗。

若波导尺寸不变，但在波导中充填聚乙烯($\varepsilon_r=2.55$，$\mu_r=1$)，则可能存在哪几种模式？

求出各模式下的 f_c，v_p，v_g 和特征阻抗。

6.6　证明在矩形波导中传播 TE_{10} 模时，在

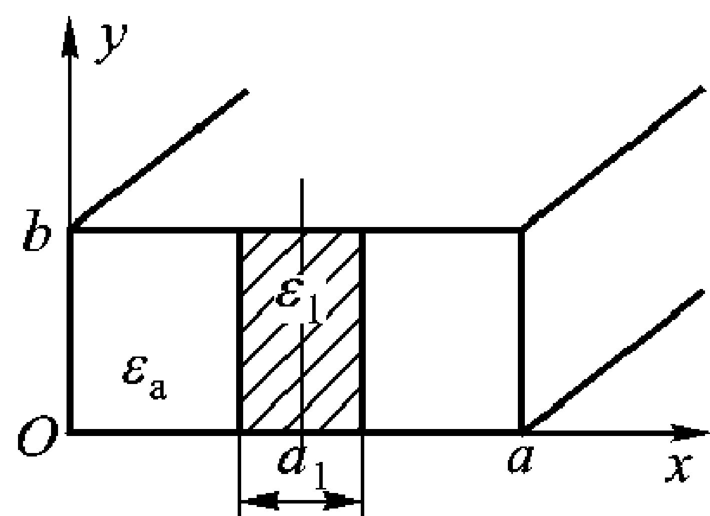
$$x=\frac{a}{\pi}\operatorname{arccot}\sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2-1}\quad 或\quad x=a-\frac{a}{\pi}\operatorname{arccot}\sqrt{\left(\frac{2a}{\lambda}\right)^2-1}$$

处，磁场强度是圆极化的。

6.7　试证明矩形波导在 z 方向 $\lambda_g/2$ 范围内，TE_{10} 波导壁电流与位移电流连续。

6.8　如果要把 BB－32 波导（$a=72.14$ mm，$b=8.6$ mm）和 BJ－32 波导（$a=72.14$ mm，$b=34.04$ mm）连接起来，并使之反射最小，中间应当加入一段什么样的过渡波导？（用波导的传输线模型来解。）

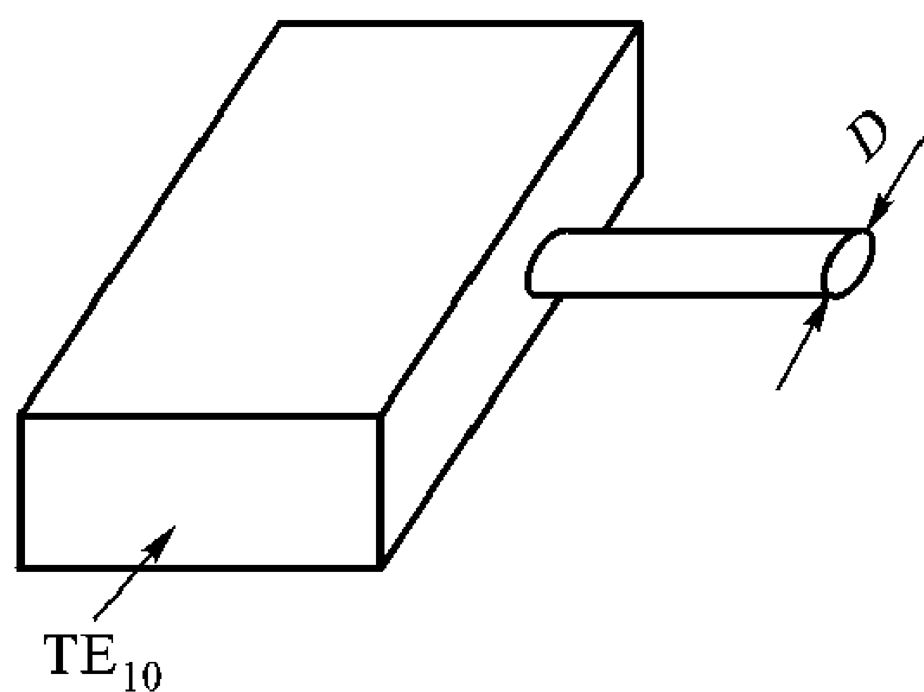
6.9　见题图 6.9，矩形波导（截面为 $a\times b$）宽边中间被厚度为 a_1 的介质填充（介电常数为 ε_1），求该部分介质填充矩形波导的色散关系。



题图 6.9

6.10　将漆包线绕成的螺旋线（其外径等于圆波导内径），放到工作于 TE_{01} 模的圆波导中，可以抑制其他模式，试对这种模式抑制器进行说明。

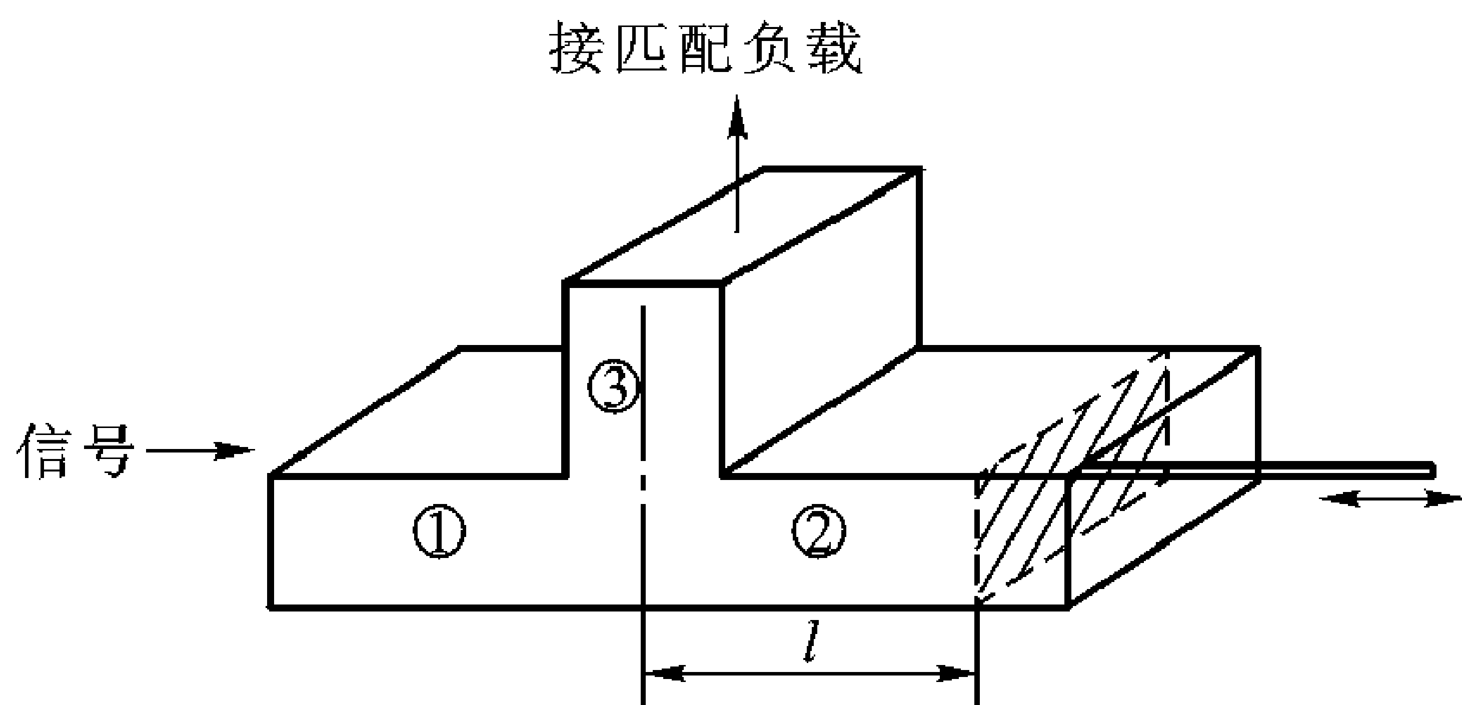
6.11　如题图 6.11 所示，矩形波导（47.55×22.15 mm）侧壁打一个直径为 D 的圆孔，并接上一段直径为 D 的金属圆管，为了防止微波能量通过金属圆管向外辐射，求直径 D 应小于何值。



题图 6.11

6.12　如题图 6.12 所示 E－T 分支，其臂 2 接短路活塞，问短路活塞与对称中心面的距离 l 为多少时，臂 3 的负载得到最大功率或得不到功率？

6.13　有一双螺钉匹配器，终端接有归一化阻抗为 0.35－j0.5 的负载，螺钉间距为 $\lambda_g/8$，求当第一个螺钉至负载的距离为 $0.1\lambda_g$ 时：(1) 此双螺钉匹配器能否实现匹配？(2) 匹配时每个螺钉的容纳为多少？(3) 匹配时螺钉匹配器各处的驻波比为多少？

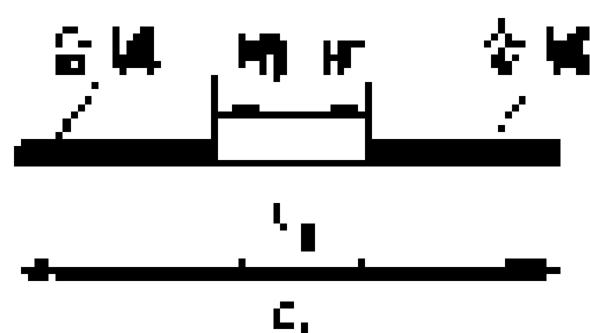


题图 6.12

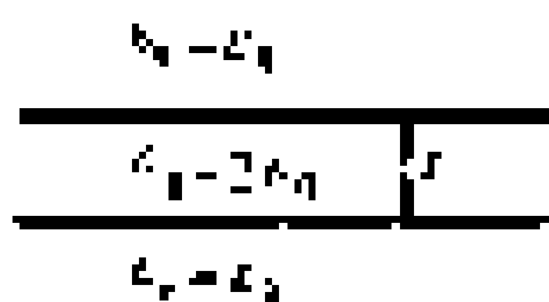
6.14 试说明光波为什么能限制在题图 6.14 所示槽的区域内传播。

6.15 计算对称单层平板介质波导的色散关系，见题图 6.15。

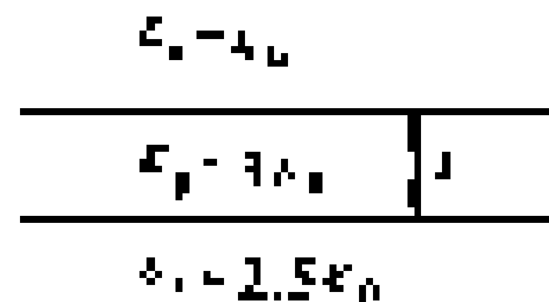
6.16 计算题图 6.16 所示非对称单层平板介质波导的色散关系。



题图 6.14



题图 6.15



题图 6.16

6.17 脉冲光信号沿多模和单模光纤传输时所引起的色散效应有何异同？以什么因素为主？

6.18 介质圆波导芯半径 $a = 500\ \mu\text{m}$，折射率 $n_1 = 2.8$，包层折射率 $n_2 = 2.7$，计算 LP_{01}、LP_{11}、LP_{21}模的截止波长。

6.19 介质圆波导尺寸及 n_1、n_2 同习题 6.18，工作波长 $\lambda = 200\ \mu\text{m}$，联立解式(6.6.24)、(6.6.25)计算 LP_{01}、LP_{11}模 $u = k_{t1} a$ 及传播常数 k_z。

6.20 介质圆波导尺寸及 n_1、n_2 同习题 6.18，用图 6－57 所示归一化传播常数与归一化频率关系曲线计算 LP_{01}模、LP_{11}模 $u = k_{t1} a$，并与习题 6.19 比较。

6.21 介质光波导芯径 300 μm，纤芯折射率 $n_1 = 3$，包层折射率 $n_2 = 2.9$，工作频率 $f = 8 \times 10^{11}$ Hz，求 LP_{01}、LP_{11}模纤芯部分传输功率占整根光纤传输功率的百分比。

6.22 一根阶跃多模光纤，其归一化频率 V 为 7，纤芯 $n_1 = 1.453$，包层 $n_2 = 1.483$，试求信号传输 1 km 时引起的群时延之差。

6.23 以半径为 a 内充空气的金属圆波导和芯半径为 a、芯区与包层折射率为 n_1、n_2 的介质圆波导为例，比较金属波导和介质波导的导波特性。

第7章 谐 振 器

谐振器是一种具有储能和频率选择特性的元件，在微波电路和光路中起着与 LC 振荡回路在低频电路中相同的作用。它与波导的差别在于，电磁场不仅在横向而且在纵向都受到限制，场沿3个坐标轴方向都呈驻波分布。本章7.1、7.2节讨论谐振器的结构特点及其特征参数，7.3～7.6节分别讨论空腔谐振器、微带谐振器、介质谐振器、开放式谐振器，最后7.7节讨论谐振器与外电路的耦合、谐振器参数的测量及谐振器的若干应用。

7.1 结构特点及其等效电路

7.1.1 集总式谐振器与分布式谐振器

低频电路中大家熟知的 LC 振荡回路就是由集总式的电感、电容组成的谐振器[见图7－1(a)]，其尺寸与波长相比要小得多，这是集总式谐振器的特点之一。工作时，在半个周期内电容器放电，电容器中电场能转变为电感线圈中磁场能，再过半个周期，电感线圈中磁场能向电容器释放，电容器充电，磁场能又转变为电场能。只要电容、电感无损耗，LC 回路中电磁振荡将无衰减地继续下去，所以 LC 回路是一个储能元件。常规材料组成的电感、电容都有损耗，如果没有外界能量补充，LC 回路中的电磁振荡将随时间而衰减。

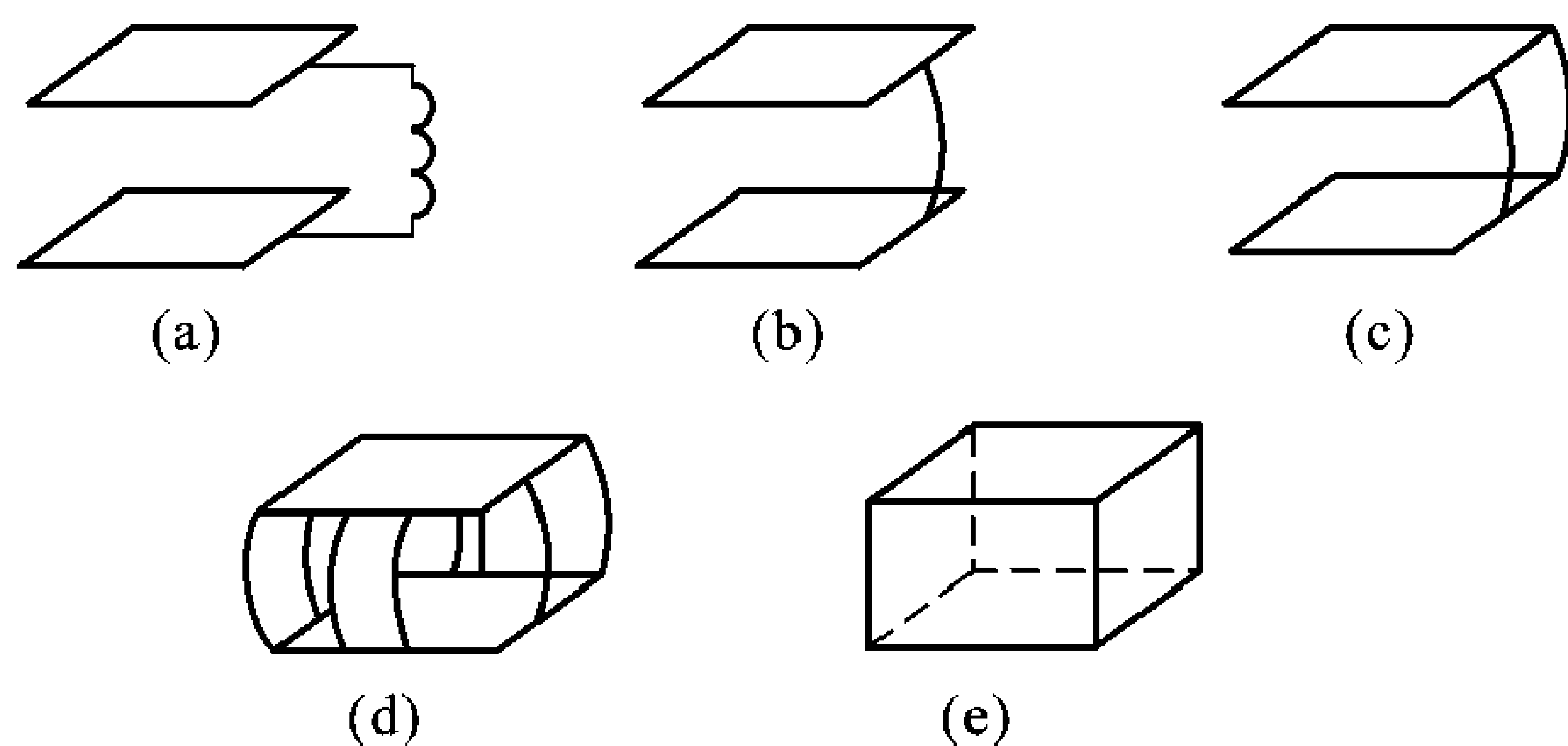


图7－1 微波谐振器的形成

集总式 LC 回路应用于高频时遇到的困难，主要是频率较高时，LC 回路的欧姆损耗、介质损耗、辐射损耗都增大，而回路的电感量和电容量则要求很小，难以实现。所以 LC 回路一般用到分米波段。为了适用于更高的频率，就

需要减小 L 和 C。要减小 C，可增大两极板间距离；要减小 L，就要减小线圈的匝数，减少到只有一根导线，然后并联导线以进一步减小 L，并联的直导线无限增多的极限情况下就变成矩形谐振器，其过程如图 7－1 (b)、(c)、(d)、(e)。这种封闭的谐振器很难找到一个区域主要储藏电场能，另一个区域主要储藏磁场能，对于这种封闭谐振器，电感、电容已失去明确的定义。

图 7－1 (e)所示的矩形空腔谐振器也可看成两端短路的一段矩形波导，波导的宽边为 a、窄边为 b，其横向波数 $k_x=\dfrac{m\pi}{a}$，$k_y=\dfrac{n\pi}{b}$。设某一模式电磁波沿 $+z$ 方向传播，波导在 $z=l$ 平面为完纯导电板短路，$+z$ 方向传播的电磁波被全反射并沿 $-z$ 方向传播。如果波导又在 $z=0$ 处为导电板短路，那么 $-z$ 方向传播的波再次被 $z=0$ 处导电板反射。如果短路波导长度 $l=\dfrac{p\pi}{k_z}$，其中 $p=0$、1、2、…等正整数，k_z 为波导纵向波数，那么波在纵向两短路面间来回反射一次相移 $2k_zl$ 刚好为 $2p\pi$，这就是说，经两短路面多次反射的波同相。这样入射波和反射波的叠加就形成稳定的驻波，即 z 方向也发生谐振。所以两端短路的一段矩形波导构成的谐振器(通常叫做矩形空腔谐振器)与低频 LC 回路一样也起储藏电磁能量的作用。谐振器是一个储能元件，这是谐振器的特点之一。

与传输电磁能量的矩形波导相比，矩形空腔谐振器的场不仅在 x、y 两个方向发生谐振，而且在 z 方向也发生谐振。$k_x=\dfrac{m\pi}{a}$，$k_y=\dfrac{n\pi}{b}$，$k_z=\dfrac{p\pi}{l}$就是 x、y、z 3 个方向发生谐振的条件，式中 a、b、l 分别为矩形空腔谐振器在 x、y、z 方向的长度。我们也称谐振条件为相位匹配条件，因为只有在满足相位匹配条件时，谐振器壁表面多次反射的波才同相叠加，而不互相抵消。

与低频 LC 回路相比，矩形空腔谐振器 x、y、z3 个方向的长度 a、b、l 都与波长相比拟，同时也很难区分电场能与磁场能集中的区域，电能和磁能分布于整个矩形空腔内。为与集总式谐振器相区别，我们把矩形空腔谐振器这类谐振器称为分布式谐振器。

7.1.2 分布式谐振器的等效电路

低频 LC 谐振回路只在谐振频率 $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$附近有较强的电磁振荡，我们把它称为 LC 谐振回路的谐振特性。对于分布式谐振器如矩形空腔谐振器，根据谐振器内介质满足的普遍的色散关系

$$\omega^2\mu\varepsilon=k_x^2+k_y^2+k_z^2 \tag{7.1.1}$$

将 $k_x=\dfrac{m\pi}{a}$、$k_y=\dfrac{n\pi}{b}$、$k_z=\dfrac{p\pi}{l}$代入得到

$$\omega^2\mu\varepsilon=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \tag{7.1.2}$$

式中 m 表示矩形波导 x 方向场分布的半波数，n 表示 y 方向场分布的半波数，这已在第 6 章讨论过。根据前面的分析，矩形波导 z 方向两端短路构成矩形空腔谐振器时，x、y 方向场分布不变，z 方向场分布由行波变成驻波，p 表示 z 方向场变化的半波数。所以，不同的一组数（m、n、p）表示一种场分布。矩形波导场分布有 TE_{mn}、TM_{mn}模之分，考虑 z 方向场分布特点，矩形空腔谐振器中场分布也就有 TE_{mnp}、TM_{mnp}模之分。由式（7.1.2）可见，当模式序号（m、n、p）一定时，谐振器只能在满足式（7.1.2）的频率 ω_{mnp}附近才有较强的电磁振荡。因为当 $\omega=\omega_{mnp}$时，相位匹配条件得到满足，任何方向波来回反射一次相移都为 2π 的整倍数，这样谐振器壁多次反射的波相位同相，彼此不抵消，谐振器能维持最强的电磁振荡。如果 ω 偏离 ω_{mnp}，谐振器壁多次反射的波不满足相位匹配条件而彼此抵消一部分，使谐振器内电磁振荡减弱。所以，矩形空腔谐振器与低频 LC 回路相比，其工作频率具有分立性，对于不同的模式（mnp）具有不同的谐振频率 ω_{mnp}，谐振器可在一系列分立的频率点上存在较强的电磁振荡。但在每一个模式谐振频率附近，矩形谐振器的特性又与 LC 回路一样，在谐振频率点电磁振荡最强，偏离谐振频率，振荡减弱，偏离越远振荡越小。图 7－2（a）和（b）分别给出低频 LC 回路和矩形空腔谐振器的谐振曲线。横坐标是频率，纵坐标为电压或电流。对于低频 LC 回路，V 表示电容器上的电压，I 表示电感上的电流；对于矩形谐振器，电压表示某一选定路径电场的线积分，电流表示沿谐振器选定表面、选定方向面电流的积分。所以就某一模式电

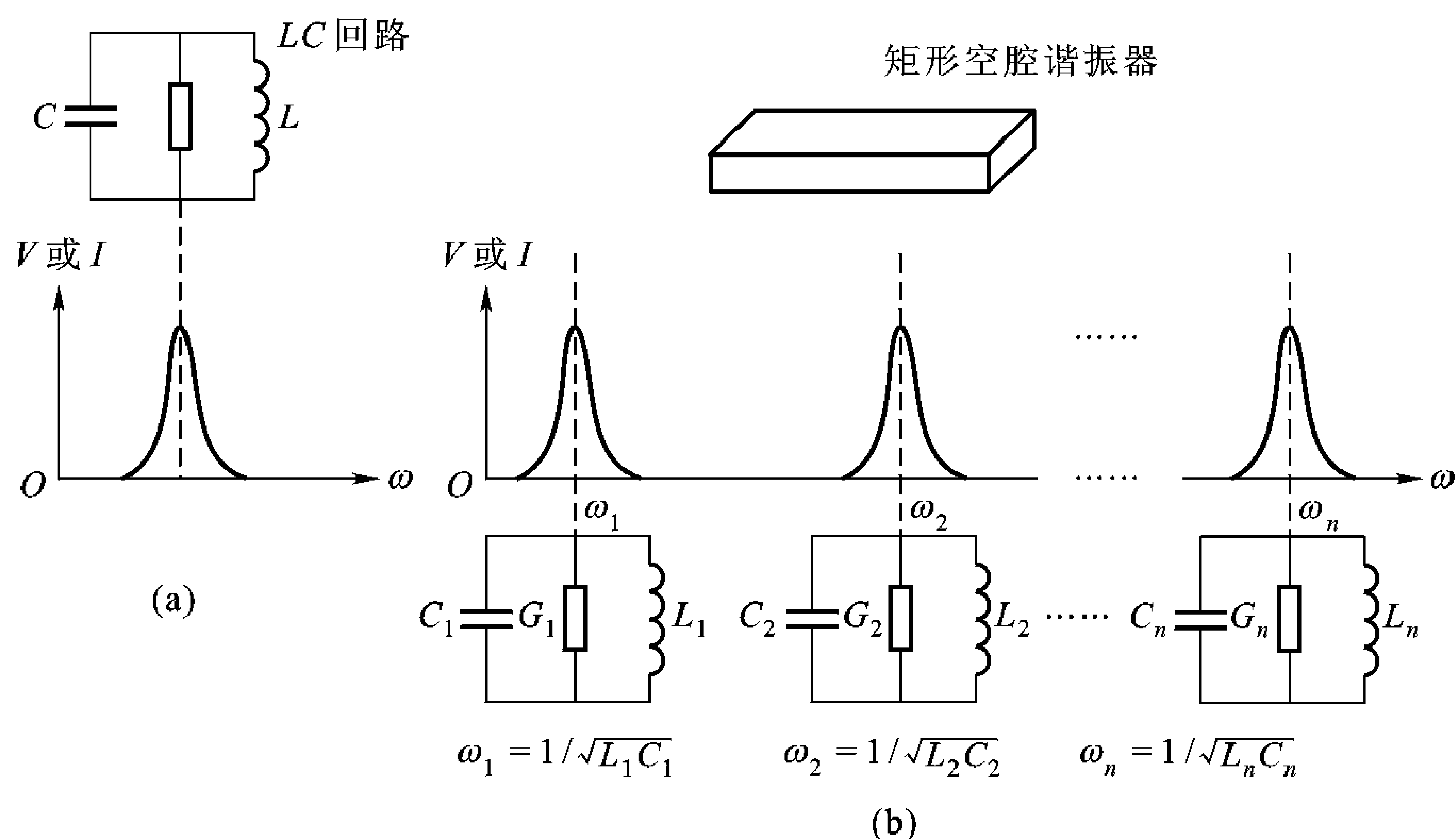


图 7－2　谐振器、谐振曲线及其等效电路

（a）低频 LC 回路及其谐振曲线　（b）分布式谐振器及其谐振曲线与等效电路

磁振荡而言，在谐振频率附近的特性可用 LC 回路等效。谐振器不同模式谐振频率附近的电磁振荡就要用不同参数的 LC 回路等效。理论上矩形空腔谐振器可以有无限多个模式，所以谐振器要用无限多个 LC 回路等效。等效的物理意义是，LC 回路的谐振频率与所等效谐振器某一模式的谐振频率相等，在谐振频率附近具有相同的谐振曲线。显然，对应于不同振荡模式的谐振曲线具有不同的形状。图 7－2 (b)强调谐振器工作频率的分立性，没有反映不同模式具有不同谐振曲线这一特点，请读者留意。

7.1.3 谐振器结构类型

谐振器的结构有多种形式，有多种分类方法。可以按工作波段分，如微波谐振器、光学谐振器；也可按构成谐振器的材料分，如金属材料围成的空腔谐振器、介质谐振器。谐振器壁对电磁波是反射器，因而也可按反射器工作原理的不同对谐振器进行分类。在微波与毫米波波段金属导体是很好的反射面。图 7－3 (b)与(c)表示的由柱形金属波导两端短路构成的矩形谐振器、圆柱形谐

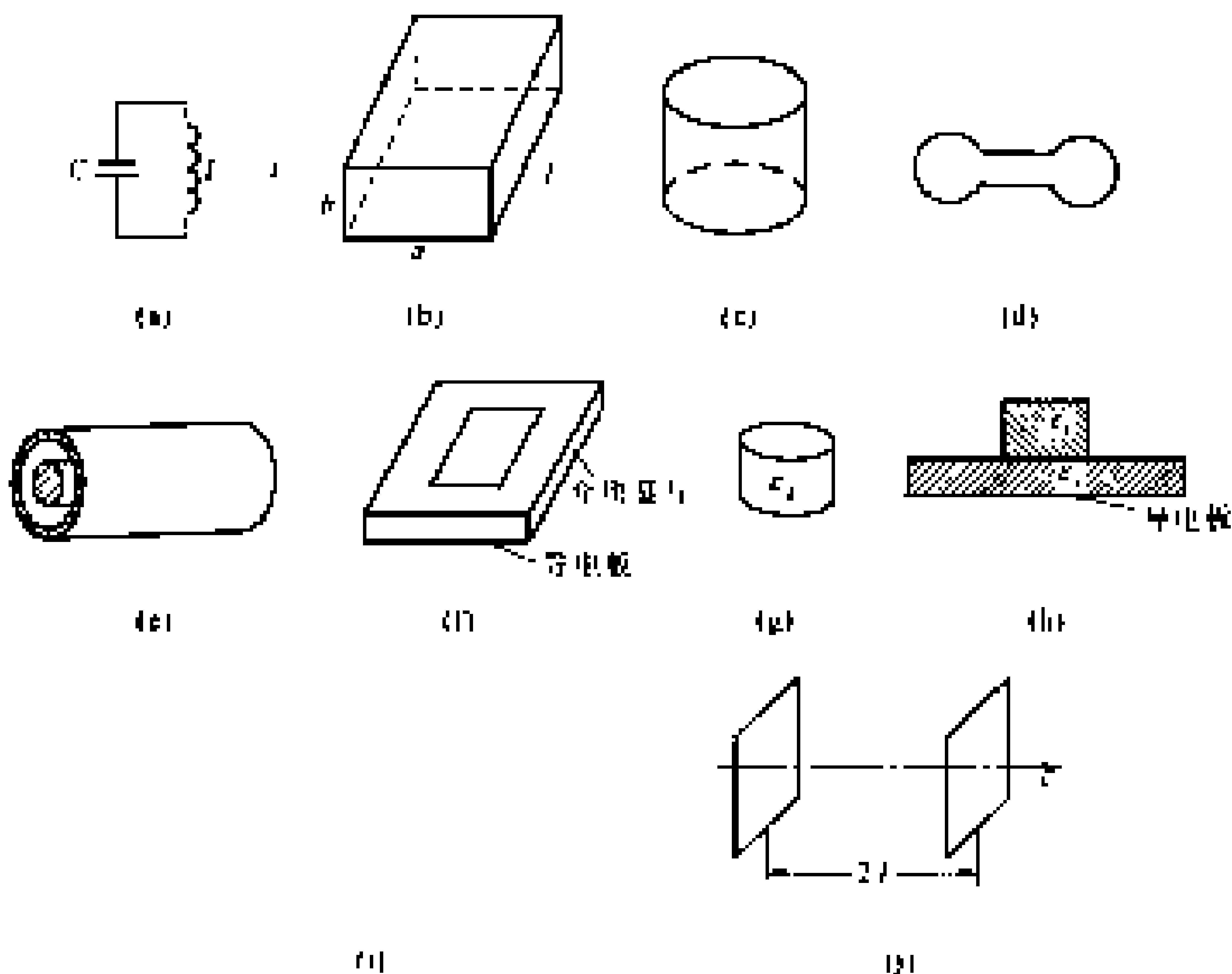


图 7－3 各种谐振器

(a) LC 谐振回路 (b) 矩形空腔谐振器 (c) 圆柱空腔谐振器 (d) 环形谐振器

(e) 同轴线谐振器 (f) 微带谐振器 (g) 圆柱介质谐振器

(h) 屏蔽介质谐振器 (i) 光纤谐振器 (j) 法布里－珀罗谐振器

振器以及图 7-3 (d)所示的环形谐振器都是由金属导体封闭而构成的谐振器。平行双导体传输线一端开路对所导引的电磁波也产生全反射。图 7-3 (e)所示的同轴线谐振器是将同轴线的一端短路一端开路构成的。适合微波波段工作的微带谐振器[图 7-3(f)]左右前后 4 个端面均利用平行双导体开路的边界条件，使电磁能量限制在导电薄片与金属基板之间。当入射角大于临界角时介质交界面也发生全反射，图 7-3 (g)圆柱介质谐振器界面就属于这种情况。实际使用时，该介质谐振器安放在有金属接地板的介质基片上，圆柱介质的介电常数远大于基片的介电常数。从结构上考虑，圆柱介质棒上方还可放置一个金属板，这样就得到图 7-3 (h)所示的屏蔽介质谐振器。如果用光纤光栅作反射器就得到光纤结构的谐振器[图 7-3(i)]。

图 7-3 (j)的开放式谐振器，又称法布里-珀罗(Fabry-Perot)谐振器。反射面是一个平面镜，实际上是一个多层膜系统，每层膜的厚度及介电系数的设计使得该多层膜系统对于光波是全反射或接近全反射。开放谐振器的特点是镜间距 $2l$ 远大于波长。开放边界的存在使得开放谐振器存在衍射损耗。如果把开放谐振器看成平行板波导系统，那些非常接近截止频率的模式的波对于平面镜几乎是正入射。平面镜间多次反射的结果是只有极少能量辐射到谐振器外，衍射损耗很小，从而能稳定地建立起电磁振荡。而对于那些远离截止频率的模式，波对于平面镜是斜入射的，衍射损耗大，不易建立振荡而退出模式竞争。所以开放谐振器较好地解决了多模工作时封闭谐振器中的模式竞争问题。

7.2 谐振器的特征参数

上一节已说明，谐振器任一模式的电磁振荡特性可用低频 LC 回路等效，本节关于谐振器特征参数的分析更多地以大家熟知的 LC 回路为例来说明。

考虑到电容器中介质漏电损耗，构成电感线圈的导体有限电导率引起的欧姆损耗，并联或串联的 LC 回路还包括一并联电导 G 或串联电阻 R。所以低频 LC 回路有 3 个独立参数。频率低时 L、C、R (或 G)都有确切的物理意义也便于测量，故常用 L、C、R (或 G)作为 LC 谐振回路的特征参数。其他如谐振频率 ω_0、品质因数 Q_0 等常作为导出参数。到了微波、光波，L、C、R (或 G)已失去确切的物理意义，也不便于测量，所以一般用便于测量又更能反映谐振器特性的谐振频率 ω_0、品质因数 Q_0 及谐振器的损耗 3 个量表示谐振器特性。谐振器作储能或选频元件等使用时，总与外面的系统(简称外电路)耦合，损耗常以外电路损耗归一化，所以谐振器损耗一般用对于外电路损耗的相对值表示。

对于低频 LC 回路，损耗可用并联电导 G 或串联电阻 R 表示。对于并联谐

振回路，损耗功率 $P_{损}=\frac{1}{2}GV^2$；对于串联谐振回路，损耗功率 $P_{损}=\frac{1}{2}RI^2$。因为低频 LC 回路 V 与 I 有确切定义，G、R 的大小就表示损耗的大小，而对于微波和光波段分布式谐振器，电压与电流跟选择的积分路径有关。所以尽管谐振器损耗是惟一的，但并联等效电导 $G=\frac{2P_{损}}{V^2}$，因 V 与积分路径有关，G 就不是惟一的，同样串联等效电阻 R 也不是惟一的。但谐振器损耗与外电路损耗相对值与所选积分路径无关，本章最后一节将进一步讨论这个问题。

7.2.1 谐振频率

谐振频率表示谐振器中电磁振荡存在的分立性，它是谐振器不同于波导的最根本的特性。除工作于 TEM 模的波导外，所有工作于非 TEM 模波导都存在一个截止频率，高于该截止频率，电磁波都能传播。但谐振器只能在一系列分立的谐振频率点附近才有较强的电磁振荡。在谐振频率附近如果谐振器某一模式电磁振荡特性用 LC 回路等效，则谐振频率

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{7.2.1}$$

不同的振荡模式，因等效回路的 L、C 数值不同，谐振频率就不一样。

7.2.2 品质因数

图 7-2(b)所示的每一模式所对应的谐振曲线尖锐度是谐振器的又一特征。它表示谐振器频率选择的能力，常用品质因数 Q_0 表示。Q_0 的定义是：

$$Q_0=2\pi\frac{\text{谐振器储能}}{\text{一周期损耗的功率}} \tag{7.2.2}$$

显然，Q_0 越大，谐振器中电磁场一经激励，由于损耗最终使场衰减到零的时间越长。谐振器中某一模式电磁振荡用 LC 回路表示时，电感 L 表示磁场能集总元件，电容表示电场能集总元件，电阻 R 或电导 G 则表示损耗。

根据式(7.2.2)关于品质因数 Q_0 的定义，对并联谐振电路[图 7-4(a)]有

$$Q_0=2\pi\frac{(1/2)CV^2}{(1/2)GV^2T}=\frac{\omega_0 C}{G} \tag{7.2.3}$$

对于串联谐振电路[图 7-4(b)]有

$$Q_0=2\pi\frac{(1/2)LI^2}{(1/2)RI^2T}=\frac{\omega_0 L}{R} \tag{7.2.4}$$

串联谐振电路的阻抗为

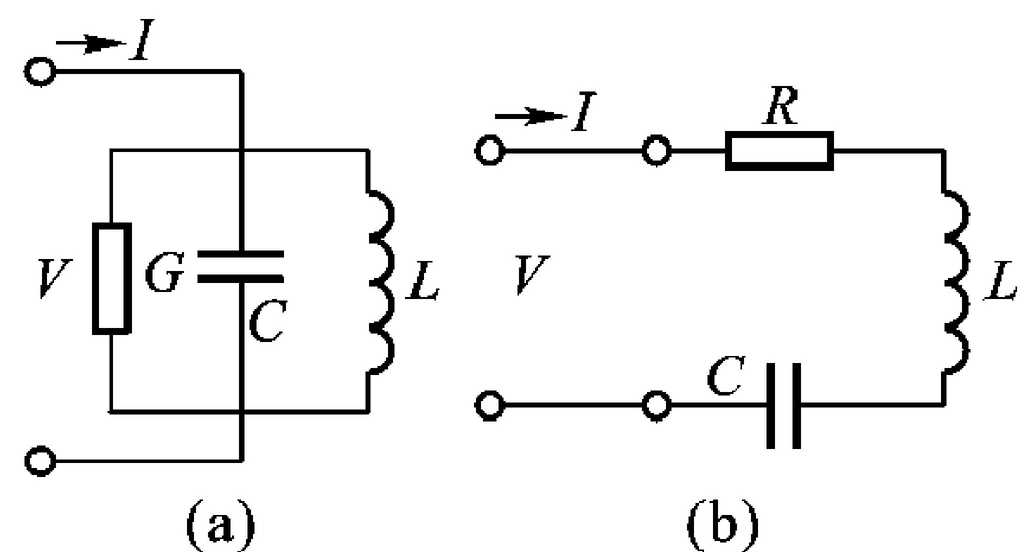


图 7-4 集总参数振荡电路
(a) 并联谐振电路 (b) 串联谐振电路

$$Z(\omega)=R+\mathrm{j}\omega L+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}=R\left[1+\mathrm{j}Q_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \tag{7.2.5}$$

并联谐振电路的导纳为

$$Y(\omega)=G+\mathrm{j}\omega C+\frac{1}{\mathrm{j}\omega L}=G\left[1+\mathrm{j}Q_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \tag{7.2.6}$$

当 Q_0 较高，ω 偏离 ω_0 不大时，$Z(\omega)$、$Y(\omega)$可近似为

$$Z(\omega)\approx R\left(1+\mathrm{j}2Q_0\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right) \tag{7.2.7}$$

$$Y(\omega)\approx G\left(1+\mathrm{j}2Q_0\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right) \tag{7.2.8}$$

式中 $\delta\omega=\omega-\omega_0$。所以，当 $\omega=\omega_0$ 时，$Z(\omega)=R$（对于串联谐振）。$Y(\omega)=G$（对于并联谐振），当 ω 偏离 ω_0 时，$Z(\omega)$或 $Y(\omega)$虚部将增加，Q_0 愈大，增加得愈快。当一恒压源作用于串联谐振电路时，如果 $\omega=\omega_0$，流经谐振电路的电流最大；当 ω 偏离 ω_0，Q_0 愈大电流下降得愈快。而当一恒流源作用于并联谐振电路时，$\omega=\omega_0$，电路两端电压最高；偏离谐振频率时，Q_0 愈大电压跌落愈快，这样就得到图 7－2 所示的谐振曲线。

如果定义 $\omega_{1/2}$为 ω 偏离谐振频率 ω_0 使 $Z(\omega)$或 $Y(\omega)$虚部与实部相等的频率，则 $\omega=\omega_{1/2}$时，根据式(7.2.7)或式(7.2.8)有

$$2Q_0\frac{|\omega_{1/2}-\omega_0|}{\omega_0}=1$$

所以

$$Q_0=\frac{\omega_0}{2\delta\omega_{1/2}} \tag{7.2.9}$$

式中 $\delta\omega_{1/2}=|\omega_{1/2}-\omega_0|$。在谐振曲线上 $\omega_{1/2}$就是使曲线降到峰值 0.707 时频率值。因为功率或能量正比于场幅值的平方，所以如果谐振曲线纵坐标以功率或能量作标度，则 $\omega_{1/2}$是功率或能量降到峰值功率或能量一半时的频率值。所以谐振器品质因数 Q_0 等于谐振频率 ω_0 除以功率谐振曲线半宽度($2\delta\omega_{1/2}$)。品质因数越高，谐振曲线越尖锐。

导出式(7.2.9)时假定谐振器特征阻抗实部 R（或 G)在 ω_0 附近基本不变。对谐振器特征阻抗的测量结果表明，只要 Q_0 足够高，这个假定是可以接受的。测量结果还表明谐振器阻抗虚部在 ω_0 附近随 $\delta\omega$ 近似线性变化。所以 $Z(\omega)$或 $Y(\omega)$用级数展开时可近似为

$$\begin{aligned}Z(\omega)&=R(\omega_0)+\mathrm{j}\left[X(\omega_0)+\delta\omega\frac{\partial X(\omega_0)}{\partial\omega}+\cdots\right]\\&\approx R(\omega_0)\left[1+\mathrm{j}\frac{\delta\omega}{R(\omega_0)}\frac{\partial X(\omega_0)}{\partial\omega}\right]\end{aligned} \tag{7.2.10}$$

$$Y(\omega) \approx G(\omega_0)\left[1 + \mathrm{j}\frac{\delta\omega}{G(\omega_0)}\frac{\partial B(\omega_0)}{\partial \omega}\right] \tag{7.2.11}$$

与式(7.2.7)(7.2.8)比较，得到

$$Q_0 = \frac{1}{2}\omega_0 \frac{\partial B(\omega_0)}{\partial \omega}\bigg/ G(\omega_0) \tag{7.2.12}$$

$$Q_0 = \frac{1}{2}\omega_0 \frac{\partial X(\omega_0)}{\partial \omega}\bigg/ R(\omega_0) \tag{7.2.13}$$

在高频时，ω_0 以及比值$\frac{\partial B(\omega_0)}{\partial \omega}\bigg/G(\omega_0)$或$\frac{\partial X(\omega_0)}{\partial \omega}\bigg/R(\omega_0)$便于测量，故高频时，$Q_0$ 也可用式(7.2.12)、(7.2.13)表示。

分析 LCR 串联谐振电路的固有振荡时，由于电阻 R 上的损耗，振荡不断衰减，电容器两端电压或流经电感的电流按如下规律衰减

$$u = u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t} = u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

式中 $\omega = \omega_0 - \mathrm{j}\frac{R}{2L}$为复数，称为复频率，其实部、虚部之比为

$$\frac{\mathrm{Re}(\omega)}{\mathrm{Im}(\omega)} = \frac{2\omega_0 L}{R} = 2Q_0$$

所以 Q_0 也可按下式定义：

$$Q_0 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Re}(\omega)}{\mathrm{Im}(\omega)} \tag{7.2.14}$$

记住式中 ω 是复频率。

关于谐振器损耗的问题将在分析谐振器与外电路耦合时一并讨论。

当谐振器作为一个元件在电路中使用时，ω_0、Q_0 是两个最重要的参数，当然对谐振器全面深入的了解，还得掌握谐振器内部的场分布。所以谐振器的 ω_0、Q_0 及场分布是我们分析研究谐振器的重点。Q_0 的计算涉及损耗，比较难，本章以后侧重对谐振器 ω_0 与场分布的分析。

7.3 空腔谐振器

由金属导体围成的封闭空腔组成的谐振器叫做空腔谐振器，一般用于微波、毫米波段。将柱形金属波导(矩形波导、圆波导、同轴线)一段的两端用导体封闭就构成矩形空腔谐振器、圆柱空腔谐振器与同轴线谐振器，见图 7-5 (a)、(b)、(c)。我们把它们叫做传输线型空腔谐振器。根据波导的传输线模型，其等效电路可用长度为 l 的两端短路的一段传输线表示[见图 7-5 (d)]。本节主要分析传输线型空腔谐振器的色散关系、品质因数与场分布。

7.3.1 传输线型空腔谐振器的色散关系

根据7.1节的分析，图7－5(a)、(b)、(c)所示的传输线型空腔谐振器，其电磁场不仅在横向，而且在纵向都谐振。取 $z=0$ 为参考面，定义 $\overleftarrow{Z}$、$\vec{Z}$ 为从 $z=0$ 参考面向 $-z$、$+z$ 方向看进去的输入阻抗。因为 $z=0$ 为导电板短路，所以 $\overleftarrow{Z}=0$。$\vec{Z}$ 是长度为 l 的短路传输线的输入阻抗，有

$$\vec{Z}=\mathrm{j}Z_z\tan k_z l$$

式中

$$Z_z=\begin{cases}\omega\mu/k_z & (\text{TE 模})\\ k_z/\omega\varepsilon & (\text{TM 模})\end{cases}$$

$$k_z^2=k^2-k_{\mathrm{t}}^2 \tag{7.3.1}$$

其中 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon$，$k_{\mathrm{t}}$ 为波导的横向传播常数。纵方向场谐振要求

$$\overleftarrow{Z}+\vec{Z}=0 \tag{7.3.2}$$

将 $\overleftarrow{Z}$、$\vec{Z}$ 代入得到

$$\mathrm{j}Z_z\tan k_z l=0$$

因为 $Z_z\neq0$，要求 $\tan k_z l=0$，得到

$$k_z=\frac{p\pi}{l}\quad(p=0,1,2,\cdots) \tag{7.3.3}$$

这个结果与我们前面定性分析矩形空腔谐振器得出的 z 方向谐振条件(或 z 方向相位匹配条件)是一致的。

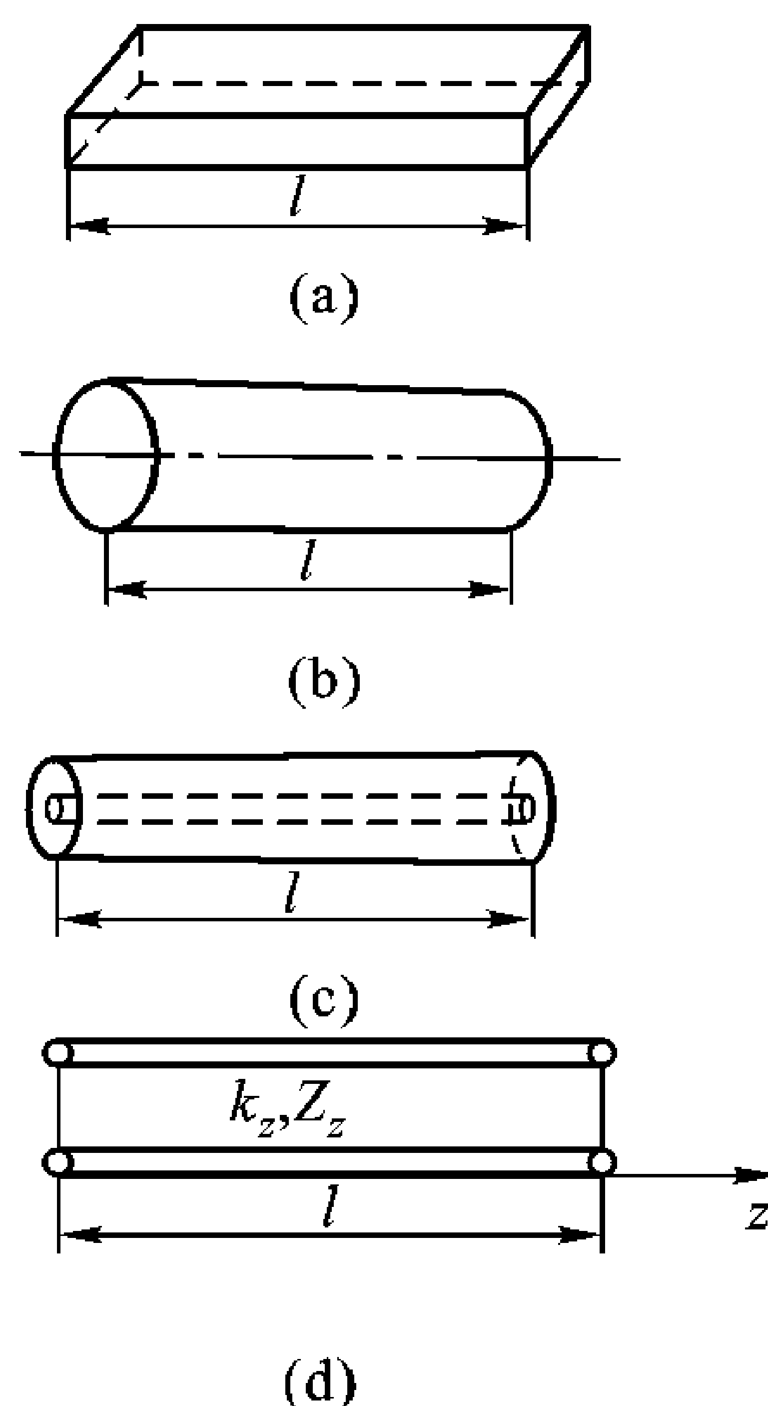


图7－5 传输线型空腔谐振器及其等效电路
(a) 矩形空腔谐振器
(b) 圆柱形空腔谐振器
(c) 同轴线空腔谐振器
(d) 等效电路

将式(7.3.3)代入 $k^2=k_{\mathrm{t}}^2+k_z^2$ 就得到传输线型空腔谐振器的色散关系

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon=k_{\mathrm{t}}^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \tag{7.3.4}$$

式(7.3.4)决定了特定的第(mnp)模的谐振频率。在微波与光波段的具体应用中，常用谐振波长而不是谐振频率表示谐振器工作频率的分立性。为此将波数 k 用 $2\pi/\lambda$ 表示，即

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

代入式(7.3.4)得到

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2=k_{\mathrm{t}}^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2 \tag{7.3.5}$$

式(7.3.5)决定了特定的第(mnp)模的谐振波长。

对于工作于TEM模的同轴线，$k_{\mathrm{t}}=0$，代入式(7.3.5)就得到工作于TEM模同轴线空腔谐振器的谐振波长

$$\lambda_0 = \frac{2l}{p} \tag{7.3.6}$$

对于矩形波导，$k_t^2 = k_x^2 + k_y^2$，$k_x = \frac{m\pi}{a}$，$k_y = \frac{n\pi}{b}$，代入式(7.3.5)得到矩形空腔谐振器的谐振波长

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}} \tag{7.3.7}$$

对于 TE 模，m、n 中有一个可以为零；对 TM 模，m、n 都不能为零。

对于圆波导，$k_t = \frac{u'_{mn}}{a}$(对于 TE 模)或 $k_t = \frac{u_{mn}}{a}$(对于 TM 模)，u'_{mn}、u_{mn}分别为第 m 阶贝塞尔函数的导数或第 m 阶贝塞尔函数的第 n 个根。

由式(7.3.7)可见，对于矩形空腔谐振器，当 $b < a < l$ 时，TE_{101}模式的谐振波长最长，为

$$\lambda_0 = \frac{2al}{\sqrt{a^2 + l^2}} \tag{7.3.8}$$

为矩形空腔谐振器的主模，通常矩形空腔谐振器工作于 TE_{101}模。

例 7-1 矩形空腔谐振器 $a = 2.3$ cm，$b = 1.0$ cm，$l = 2.2$ cm，主模是 TE_{101}模，即 $m = 1$，$n = 0$，$p = 1$，求矩形谐振器的谐振波长 λ_0。

解：将 a、b、l 代入式(7.3.7)得到谐振波长

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{2.3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.2}\right)^2}} = 3.18 \text{ cm}$$

7.3.2 矩形空腔谐振器的场分布

矩形空腔谐振器在横截面 $x-y$ 内的场分布与矩形波导一样，由模式函数 $\boldsymbol{e}(x,y)$、$\boldsymbol{h}(x,y)$表示，对于 TE 模见式(6.2.16)~(6.2.19)。场在纵向(z 方向)的分布由模函数的幅值 $V(z)$、$I(z)$决定，它们满足传输线方程

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Z_z I(z)$$

$$\frac{\mathrm{d}I(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_z Y_z V(z)$$

k_z、Z_z(或 Y_z)的意义已在本节前面交代过，上两式消去 $I(z)$得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + k_z^2\right)V(z) = 0 \tag{7.3.9}$$

在边界 $z = 0$、l，切向电场为零，故得 $V(z = 0, l) = 0$，在此边界条件下，其解为

$$V(z) \sim \sin k_z z \tag{7.3.10}$$

将式(7.3.10)代入传输线方程得到

$$I(z) \sim \mathrm{j} Y_z \cos k_z z \tag{7.3.11}$$

式中　$k_z = \frac{p\pi}{l}$。

将式(7.3.10)、(7.3.11)表示的模式函数幅值 $V(z)$、$I(z)$与式(6.2.16) ~ (6.2.19)(对 TE 模)表示的模式函数相乘就得矩形空腔谐振器 TE 模横向场量，再由横向场量求出纵向场量就得到矩形空腔谐振器 TE 模场分量表达式

$$E_x = \sum_{m,n,p} A_{mnp} \frac{n\pi}{b} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{p\pi z}{l} \tag{7.3.12a}$$

$$E_y = -\sum_{m,n,p} A_{mnp} \frac{m\pi}{a} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{p\pi z}{l} \tag{7.3.12b}$$

$$E_z = 0 \tag{7.3.12c}$$

$$H_x = \sum_{m,n,p} \mathrm{j} A_{mnp} \frac{1}{\omega\mu} \frac{m\pi}{a} \frac{p\pi}{l} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \cos\frac{p\pi z}{l} \tag{7.3.12d}$$

$$H_y = \sum_{m,n,p} \mathrm{j} A_{mnl} \frac{1}{\omega\mu} \frac{n\pi}{b} \frac{p\pi}{l} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \cos\frac{p\pi z}{l} \tag{7.3.12e}$$

$$H_z = \sum_{m,n,p} -\mathrm{j} A_{mnp} \frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{\omega\mu} \cos\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{p\pi z}{l} \tag{7.3.12f}$$

同样可得 TM 模场分量表达式为

$$H_x = \sum_{m,n,p} \mathrm{j} B_{mnp} \frac{n\pi}{b} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \cos\frac{p\pi z}{l} \tag{7.3.13a}$$

$$H_y = -\sum_{m,n,p} \mathrm{j} B_{mnp} \frac{m\pi}{a} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \cos\frac{p\pi z}{l} \tag{7.3.13b}$$

$$H_z = 0 \tag{7.3.13c}$$

$$E_x = -\sum_{m,n,p} B_{mnp} \frac{mp\pi^2}{\omega\varepsilon la} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{p\pi z}{l} \tag{7.3.13d}$$

$$E_y = -\sum_{m,n,p} B_{mnp} \frac{np\pi^2}{\omega\varepsilon lb} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \sin\frac{p\pi z}{l} \tag{7.3.13e}$$

$$E_z = \sum_{m,n,p} B_{mnp} \frac{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{\omega\varepsilon} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \cos\frac{p\pi z}{l} \tag{7.3.13f}$$

矩形空腔谐振器最低模为 TE_{101}，将 $m=1$、$n=0$、$p=1$ 代入式(7.3.12)，只有 3 个场分量

$$E_y = -A_{101} \frac{\pi}{a} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi}{l} z \tag{7.3.14a}$$

$$H_x = \mathrm{j} A_{101} \frac{\pi^2}{al} \frac{1}{\omega\mu} \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi z}{l} \tag{7.3.14b}$$

$$H_z = -jA_{101}\frac{\pi^2}{\omega\mu a^2}\cos\frac{\pi}{a}x\ \sin\frac{\pi}{l}z \tag{7.3.14c}$$

其场结构如图7-6，电场只有 E_y 分量，在腔体中央最强；磁场只有 H_x、H_z 两个分量，在腔壁附近最强，腔体中央为零。

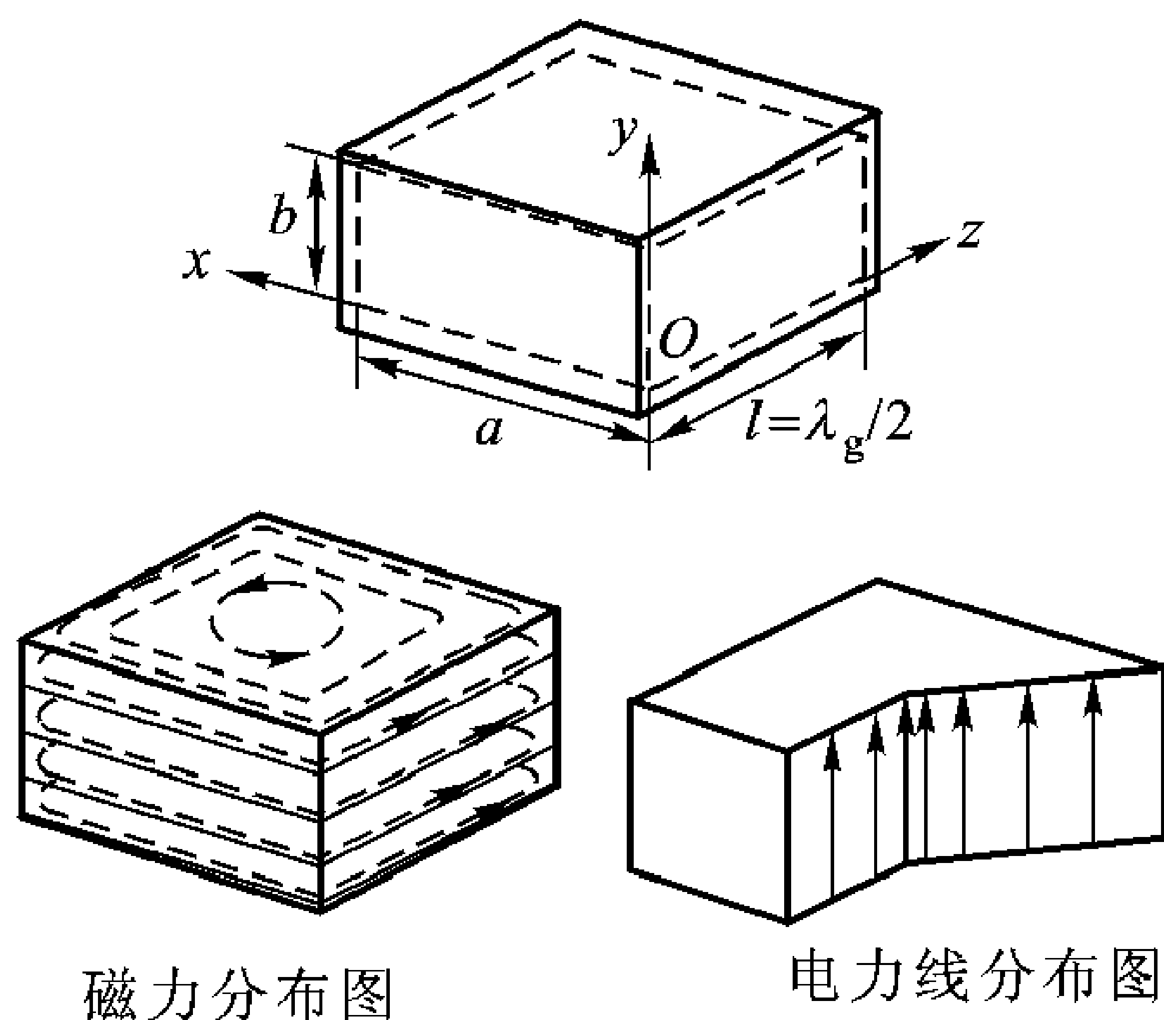


图7-6 矩形空腔谐振器场分布

例7-2 工作于 TE_{101} 模式的矩形谐振器，在谐振器端面 P 点 $\left(x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2},\ z=0\right)$ 插入一金属薄片，当金属薄片所在平面由 $x-z$ 平面转到 $y-z$ 平面时，对谐振器内磁力线分布有怎样的影响？请进一步分析对谐振频率有怎样的影响？分别说明其理由。

解： 据图7-7(a)，金属薄片在 $x-z$ 平面与磁力线平行，金属薄片插入不影响 TE_{101} 模场分布，对谐振频率几乎没有影响。当金属薄片由 $x-z$ 平面转到 $y-z$ 平面[见图7-7(b)]，金属薄片表面与原 TE_{101} 模磁力线垂直。为满足金属薄片表面磁场法向分量等于零的边界条件，磁力线在金属薄片表面拐弯，沿薄片表面走。与原 TE_{101} 模场分布相比，磁力线路径增长，等效于电感增加，谐振频率降低。因此通过金属薄片的旋转可实现对谐振器频率的调谐。

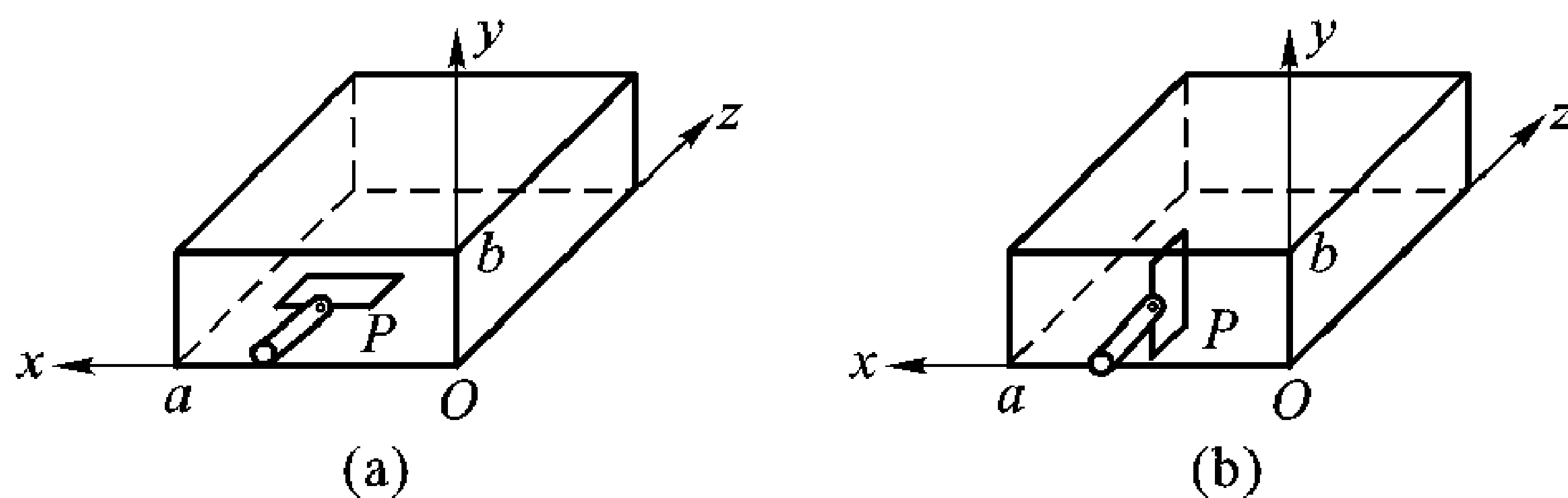


图7-7 金属薄片对矩形谐振器频率的调谐

(a) 调谐金属薄片水平放置 (b) 调谐金属薄片垂直放置

7.3.3 微扰近似下品质因数的计算

谐振器的另一重要参数——品质因数 Q_0，根据定义，要求出其储能 W，则

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2}\int_V \mu\,|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}V \tag{7.3.15}$$

式中 W_e、W_m 分别为谐振器中任一瞬间电场储能与磁场储能，因为电场储能最大时，磁场磁能为零，磁场储能最大时，电场储能为零。式(7.3.15)右边表示的是最大磁场储能。当谐振器内介质损耗可忽略时，谐振器壁引起的损耗为

$$P_l = \frac{1}{2}\oint_s |\boldsymbol{J}_s|^2 R_s \mathrm{d}S = \frac{1}{2}R_s\oint_s |\boldsymbol{H}_s|^2 \mathrm{d}S \tag{7.3.16}$$

式中 R_s 为腔壁表面电阻率，$\boldsymbol{J}_s$ 为表面电流，$\boldsymbol{H}_s$ 为表面切向磁场。

将式(7.3.15)、(7.3.16)代入 Q_0 表达式(7.2.2)得到

$$Q_0 = \frac{2\pi}{T}\frac{\frac{1}{2}\int_V \mu|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}V}{\frac{1}{2}R_s\oint_s|\boldsymbol{H}_s|^2\mathrm{d}S} = \frac{\omega\mu}{R_s}\frac{\int_V|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}V}{\oint_s|\boldsymbol{H}_s|^2\mathrm{d}S} = \frac{2}{\delta}\frac{\int_V|\boldsymbol{H}|^2\mathrm{d}V}{\oint_s|\boldsymbol{H}_s|^2\mathrm{d}S} \tag{7.3.17}$$

式中 δ 为腔壁导体趋肤深度。

谐振腔内壁附近的切向磁场总要大于腔内部的磁场，如近似认为 $|\boldsymbol{H}^2| \approx \frac{1}{2}|\boldsymbol{H}_s|^2$，则可得

$$Q_0 \approx \frac{1}{\delta}\frac{V}{S} \tag{7.3.18}$$

据式(7.3.18)可近似估计谐振腔的 Q_0 值。由此式可以看出，空腔谐振器的 Q_0 值近似与腔体体积 V 成正比，与其内壁表面积 S 成反比，与趋肤深度成反比。比值 V/S 越大，Q_0 值越高。因此，为获得较高的 Q_0 值应选择谐振器的形状使 V/S 大。因球的 V/S 最大，故球形谐振器 Q_0 最大。

如欲精确计算式(7.3.15)、(7.3.16)，式中 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{H}_s$ 应为计及损耗后的磁场。以前计算场量时谐振器壁的损耗没有考虑。如果将损耗看成对没有损耗谐振器的扰动，当扰动很小时作为一级近似，可以用没有损耗时的场计算谐振器的储能及腔壁的损耗，然后根据 Q_0 的定义计算 Q_0。这一近似对于工程应用来说，只要扰动小并不引起多少误差。

下面以矩形谐振器为例，求出一级近似下矩形空腔谐振器 TE_{101} 模的 Q_0 值。因为空腔谐振器内总的储能为电能和磁能之和，但电能最大时，磁能为零，于是对于 TE_{101} 模有

$$\begin{aligned} W &= W_{e\max} = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^l \mathrm{d}z\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^a \mathrm{d}x\,|E_y|^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\int_0^l \mathrm{d}z\int_0^b \mathrm{d}y\int_0^a \mathrm{d}x E_{101}^2\sin^2\frac{\pi x}{a}\sin^2\frac{\pi z}{l} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}E_{101}^2\cdot\frac{a}{2}\cdot b\cdot\frac{l}{2} = \frac{\varepsilon abl}{8}E_{101}^2 \end{aligned} \tag{7.3.19}$$

为了求壁上的功率损耗需要求壁上的电流密度，参考图 7－6，谐振器壁

电流密度为：
后壁

$$J_y = -H_x\Big|_{z=l}$$

前壁

$$J_y = H_x\Big|_{z=0}$$

右壁

$$J_y = -H_z\Big|_{x=0}$$

左壁

$$J_y = H_z\Big|_{x=a}$$

顶壁

$$J_x = -H_z, \quad J_z = H_x$$

底壁

$$J_x = H_z, \quad J_z = -H_x$$

谐振器壁电流所产生的功率损耗为

$$P_L = \frac{R_s}{2}\left[2\int_0^b\int_0^a |H_x|^2_{z=0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\int_0^l\int_0^b |H_z|^2_{x=0}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2\int_0^l\int_0^a (|H_x|^2 + |H_z|^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\right]$$

将 TE_{101} 模场量代入并积分得到

$$P_L = \frac{R_s\lambda_0^2}{8\eta^2}E_{101}^2\left[\frac{ab}{l^2} + \frac{bl}{a^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{l} + \frac{l}{a}\right)\right] \tag{7.3.20}$$

将式(7.3.19)、(7.3.20)代入式(7.2.2)得到

$$Q_0 = \frac{\pi\eta}{4R_s}\left[\frac{2b(a^2+l^2)^{3/2}}{al(a^2+l^2)+2b(a^3+l^3)}\right] \tag{7.3.21}$$

例 7-3 设铜制矩形谐振器尺寸为 $a = l = 0.02$ m，$b = 0.01$ m，工作模式为 TE_{101}，谐振器内为空气填充，介质损耗可忽略，近似计算谐振器的 Q_0 值。

解：谐振频率

$$f_0 = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}} = 10.62 \text{ GHz}$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi f_0\mu}{\sigma}} = 2.69\times10^{-2}\ \Omega$$

代入式(7.3.21)求得

$$Q_0 = 7\ 780$$

7.3.4 波长计

波长计实际上是一个高 Q 谐振器。通过改变柱形谐振器的长度 l 实现波

长计谐振频率的调谐。同轴线波长计、圆柱波长计最常用[见图 7－8（a）、（b）]，因为这两种结构的波长计改变谐振器长度 l 最容易。图 7－8（a）所示同轴线波长计实际就是图 7－3（e）所示的同轴线谐振器，同轴线一端短路，一端开路。同轴线内导体与螺旋测微头连接。旋转螺旋测微头，即改变内导体伸入谐振器的长度，从而实现波长计谐振频率的调谐。螺旋测微计的读数可到 5 μm 精度。如果波长为 10 cm，同轴波长计的波长读出精度可到 5×10^{-6} m。同轴线波长计工作于 TEM 模，圆柱波长计可工作于多种模式。图 7－8（b）所示圆柱波长计工作于 TE_{011}模。这种模式的场分布有如下特点：场在圆周方向没有变化，具有轴对称性。谐振器壁只有圆周方向电流，没有径向电流。因此改变波长计长度的调谐活塞与谐振器壁可作成非接触式，这给调谐活塞的制造带来很大方便且没有磨损。但对于其他模式，非接触调谐活塞会切断这些模式径向电流，迫使这些电流漏泄到活塞背后，正好被放置在活塞背后的吸收物质吸收，因而这些模式的品质因数很低，建立不起振荡。同轴线波长计一般通过耦合环与外面系统连接，工作于 TE_{011}模的圆柱波长计与波导耦合的一种方式也示于图 7－8（b），它是通过谐振器底面两个耦合孔与矩形波导（TE_{10}模）宽边耦合的，两耦合孔间距为半个波导波长。

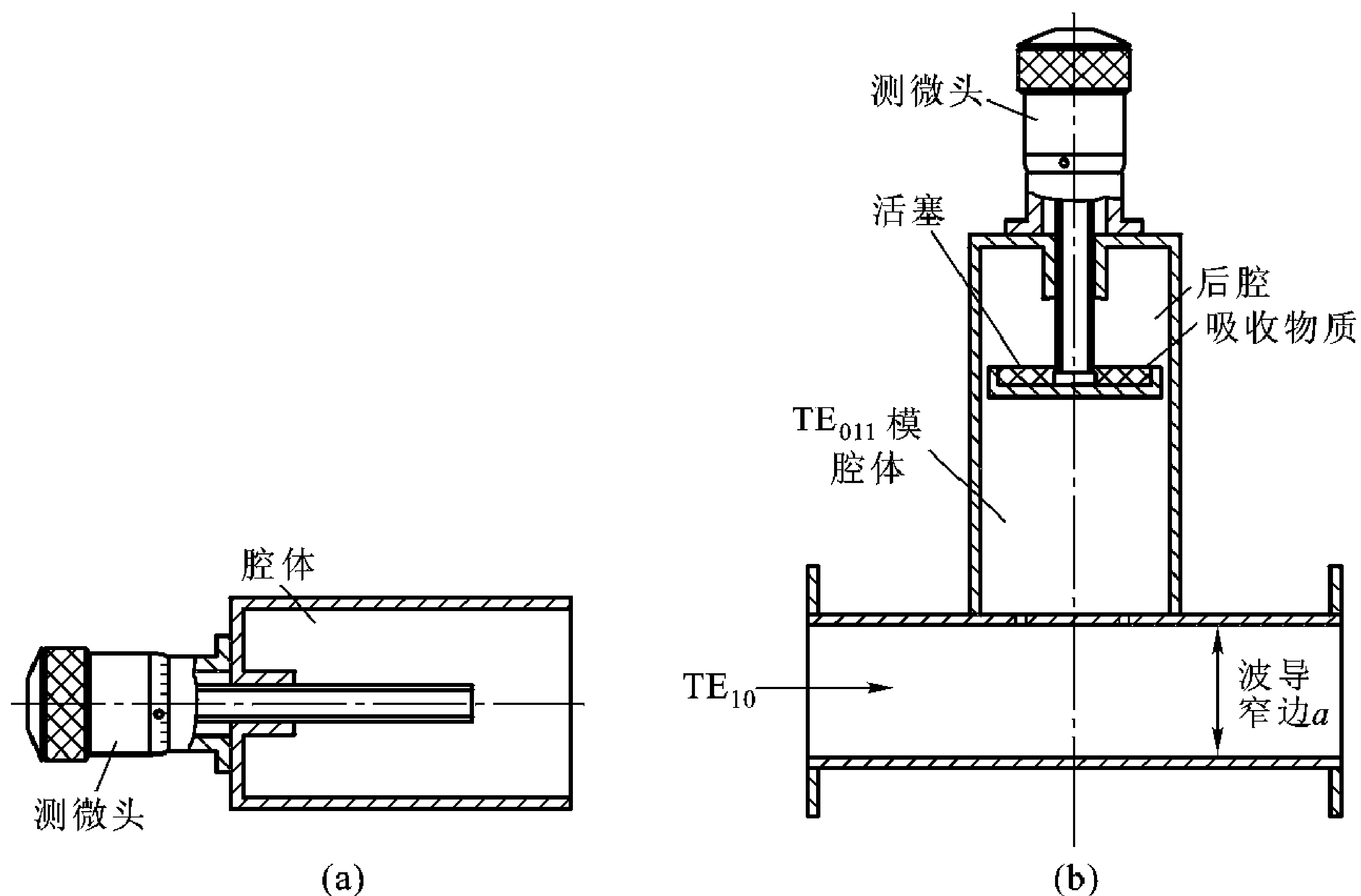


图 7－8　波长计

（a）同轴线波长计　（b）TE_{011}模圆柱波长计

波长计可用来检测系统的工作频率，其原理如图 7－9 所示。系统耦合出的一部分微波能量，从工作于 TE_{10}模的矩形波导左边输入，并为右边的波导检波器检测。工作于 TE_{011}模的波长计通过波导宽边两个孔与矩形波导耦合，接

在输入波导与检波器之间。

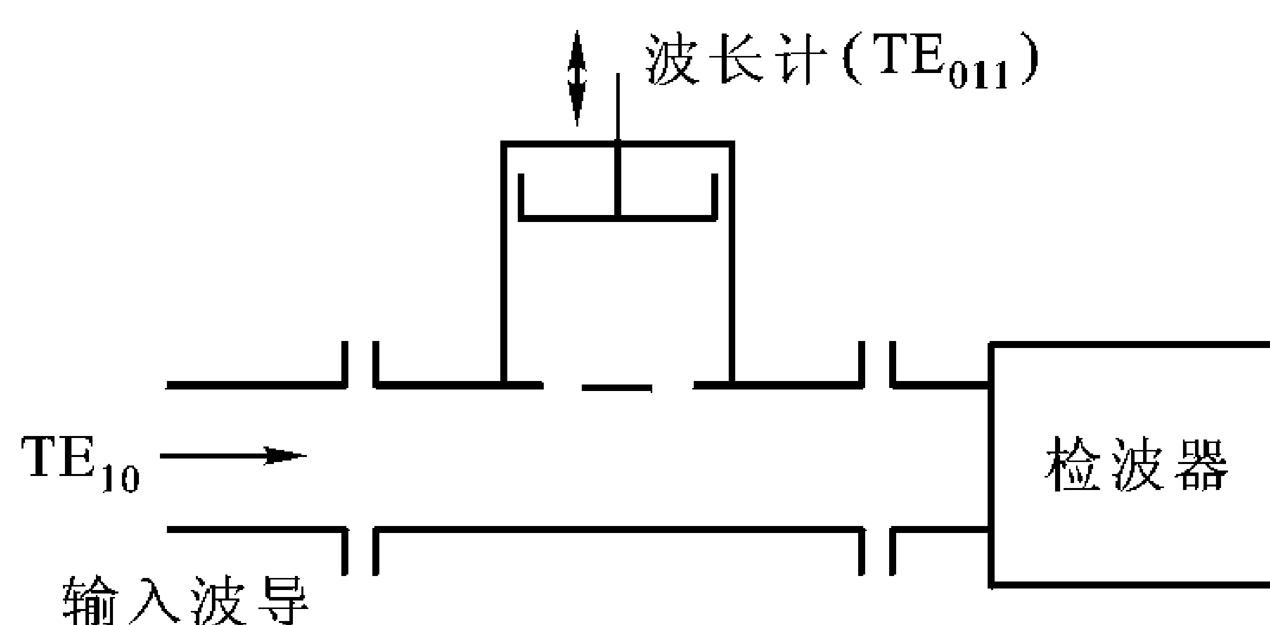


图 7-9 波长计工作原理

调节波长计的可调短路活塞进而可调节波长计的谐振频率。当波长计谐振频率与系统工作频率一致时，波长计谐振，波长计从系统吸收的能量最多，检波器输出变小，从而测得系统的工作频率。

7.4 微带谐振器

将介质基片上微带导电片切断，保留长为 l 的一段，就构成图 7-10 (a) 所示的矩形片微带谐振器。从原理上说它和柱形金属波导两端用导电板短接构成的谐振器相似，因为微带导电片切断部分相当于开路，产生全反射。这类问题分析的难点在于切断处将会激励起高次模，等效的开路面并不在导电薄片切断处。

微带谐振器介质基片上的导电薄片如果是圆形或椭圆形，就构成圆片形和椭圆片形微带谐振器，如图 7-10 (b)和(c)。

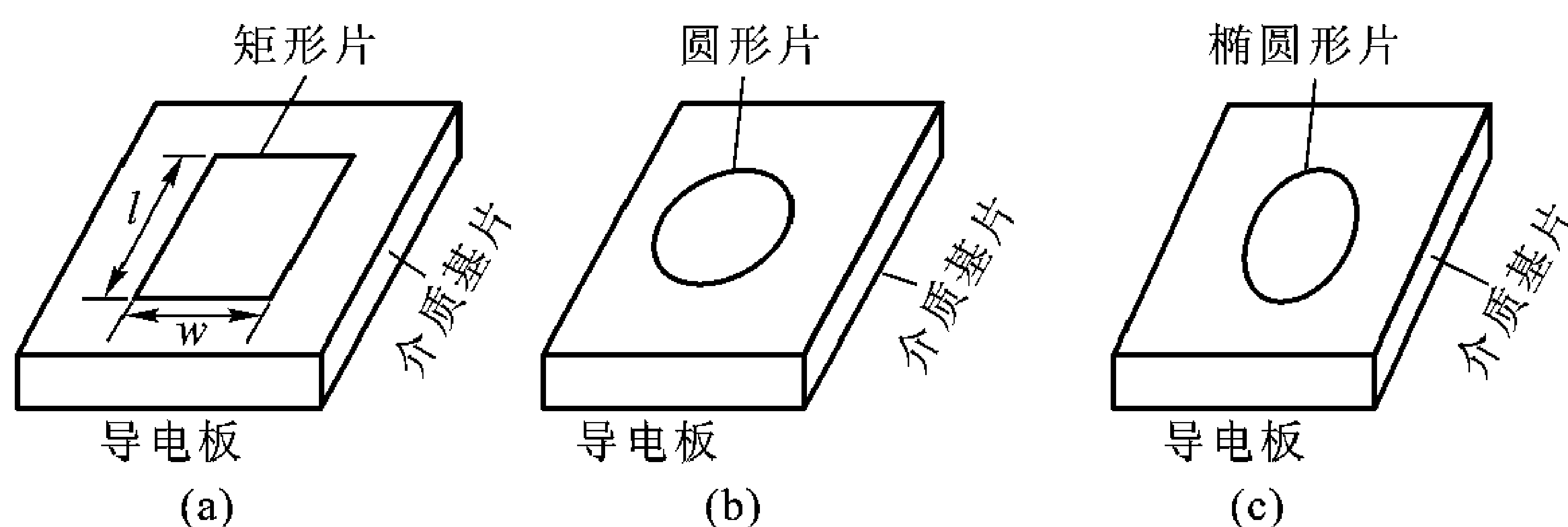


图 7-10 微带谐振器
(a) 矩形片 (b) 圆形片 (c) 椭圆形片

微带谐振器的近似分析

如果矩形片微带谐振器导电薄片的线度 W，l 都比较大，可以忽略薄片边缘场及有限介质填充的影响，则可用磁壁法进行近似分析。最简单的模型是假

设矩形片四周各边为磁壁，上下导体片为电壁，电磁场在这些磁壁和电壁限定的空间里振荡，以构成一个谐振器，如图 7－11（a），在此谐振器中，假设介质基片的厚度 $h \ll \lambda$，则其振荡模式从 y 方向看为 TM 模，即在 y 方向磁场无纵向分量 $H_y = 0$，但 $E_y \neq 0$，由于 $h \ll \lambda$，场沿 y 方向无变化，$\partial/\partial y = 0$，即 $k_y = 0$。由于在 $z = \pm l/2$，$x = \pm W/2$ 处为磁壁所包围，即电场切向分量在法线方向梯度为零或磁场切向分量为零，在此条件下解波方程

$$(\nabla_t^2 + k_t^2)\begin{Bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{h} \end{Bmatrix} = 0$$

得到

$$k_t^2 = k_x^2 + k_z^2$$

$$k_x = \frac{m\pi}{W}$$

$$k_z = \frac{n\pi}{l}$$

故决定谐振频率的色散方程为

$$k^2 = \left(\frac{m\pi}{W}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

由于磁壁模型忽略了边缘效应的影响，当 W、l 不是很大时，误差就很大，因而在实际应用中是没有价值的。

为了补偿边缘效应，仍然基于磁壁模型，但 W、l 用等效宽度 W_e 与等效长度 l_e 代替，而介电常数 ε_r 用等效介电常数 ε_e 替代[见图 7－11（b）]，有关 W_e、l_e、ε_e 的计算不再深入讨论。

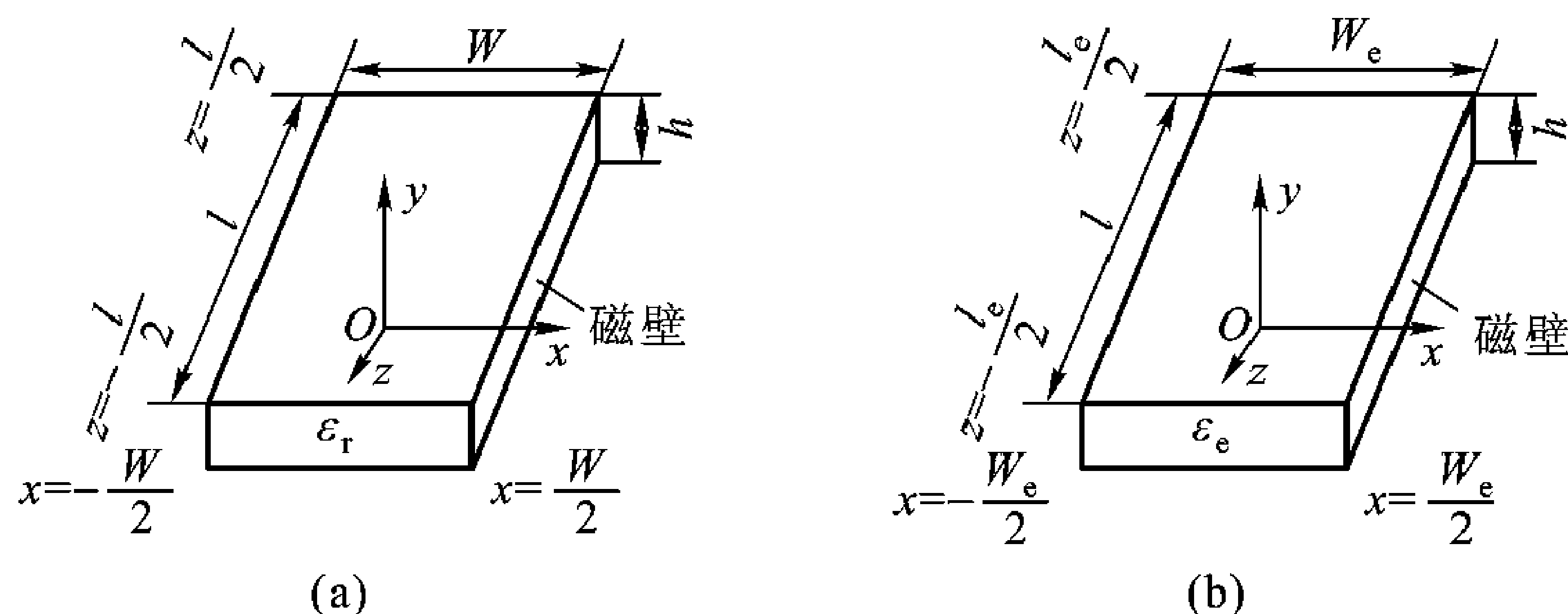


图 7－11 微带谐振器的磁壁法模型

（a）忽略边缘效应 （b）计及边缘效应的影响

边缘耦合平行耦合线带通滤波器

频率较低时耦合的多级 LC 谐振回路可以作带通滤波器。频率较高时，谐

振回路可选用两端开路的半波长微带谐振器，其优点是可用平面工艺制作。图7－12就是以两端开路的半波长微带谐振器作为耦合基本单元的平行耦合线带通滤波器。因为谐振器之间耦合是通过微带线的边缘场进行的，故称为边缘场耦合的平行耦合线带通滤波器。

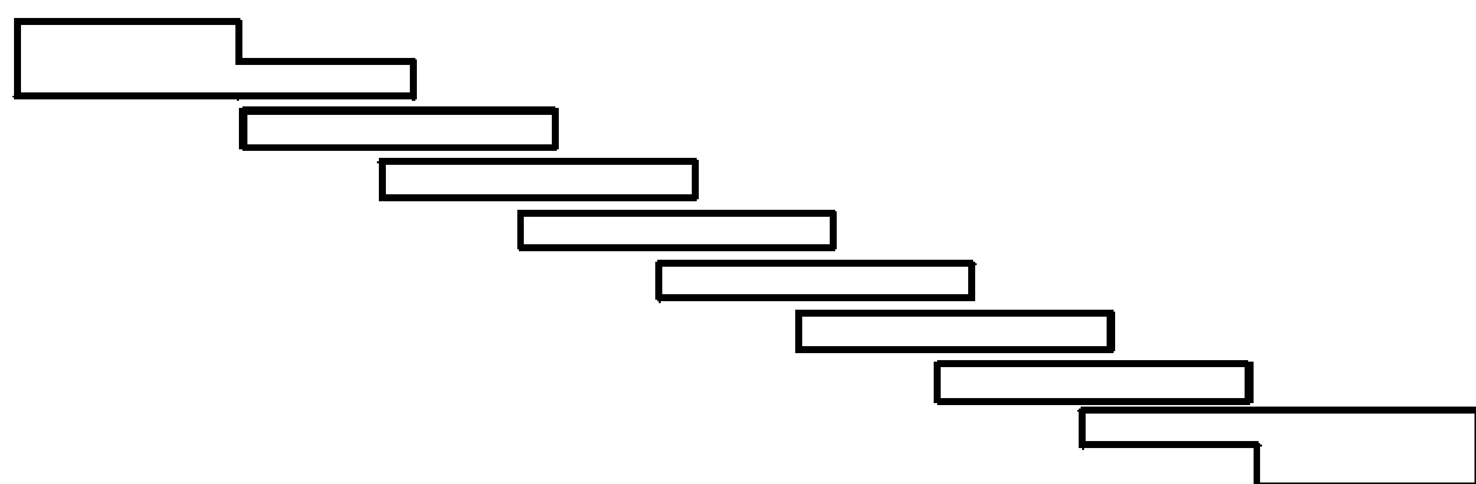


图7－12　边缘耦合平行耦合线带通滤波器

7.5　介质谐振器

介质谐振器的概念，Richtmyer早在1939年就已提出，其后许多学者对这种谐振器的谐振频率和存在模式进行了分析，提出这种谐振器的设计方法和电路特性。但长期以来，这种谐振器并未在实际电路中得到应用，主要是缺乏制作介质谐振器所需的合适材料。进入20世纪70年代，在介质材料方面的研究取得突破性进展，人们发现和研制出了一些适合微波应用的新材料，这使介质谐振器的理论研究和实际应用都有了较大的发展。介质谐振器现已成为微波电路中的一种新型元件，主要用作滤波器和振荡器。

介质谐振器的主要优点是：(1) Q 值高，温度稳定性好，可以与殷钢相媲美；(2)体积小，重量轻，可作为混合集成电路元件用于微波和毫米波电路中；(3)制造工艺简单，价格便宜；(4)适合多种微波和耦合电路使用。其主要技术指标有三个：(1) Q 值。它近似等于介质损耗角正切的倒数，介质损耗角正切越小，Q 值越高，更利于实际应用。(2)谐振频率的温度系数 τ_f。它与介电常数的温度系数 τ_ε 及介质热膨胀系数 τ_v 有关。τ_f 越小，谐振频率随温度变化越小，谐振器的频率稳定度越高；(3)相对介电常数 ε_r。在微波应用中，ε_r 在30～100范围内，在毫米波应用中，ε_r 在30以下。ε_r 越大，谐振器的体积越小，能量越向谐振器体内集中，受外电路影响越小。但也不能太大，太大时，对几何尺寸要求严格，不利于制作。目前在C波段介质谐振器 Q 值已达 10^4 量级，τ_f 在 10^{-6} 量级，可与 TE_{101} 模矩形空腔谐振器相媲美，甚至更高，但其在体积、重量、加工等方面的优点则远非金属谐振腔所能达到的。

介质谐振器的形状有矩形、圆柱形、圆环形等。如图7－13(a)、(b)、(c)所示，这些都是孤立的介质谐振器，它们便于进行理论分析。但在实际应

用中，它们必须有支撑的支架以及屏蔽外壳等，特别在微波集成电路中，常把它们放在介质基片上，成为一种非对称结构，如图 7－13（d）。

对介质谐振器的分析，较早的文献大都采用磁壁法，即把介质谐振器边界看成磁壁，电磁场在磁壁所限制的体积内振荡。这种方法对高次振荡模谐振频率的计算误差尚小，但对低次模的误差可达 10% 以上。为了进一步提高精度，也可采用变分法，并利用近似的数值分析，可使误差控制在 1% 以内。本书第 13 章给出分析介质谐振器的有限元方法。

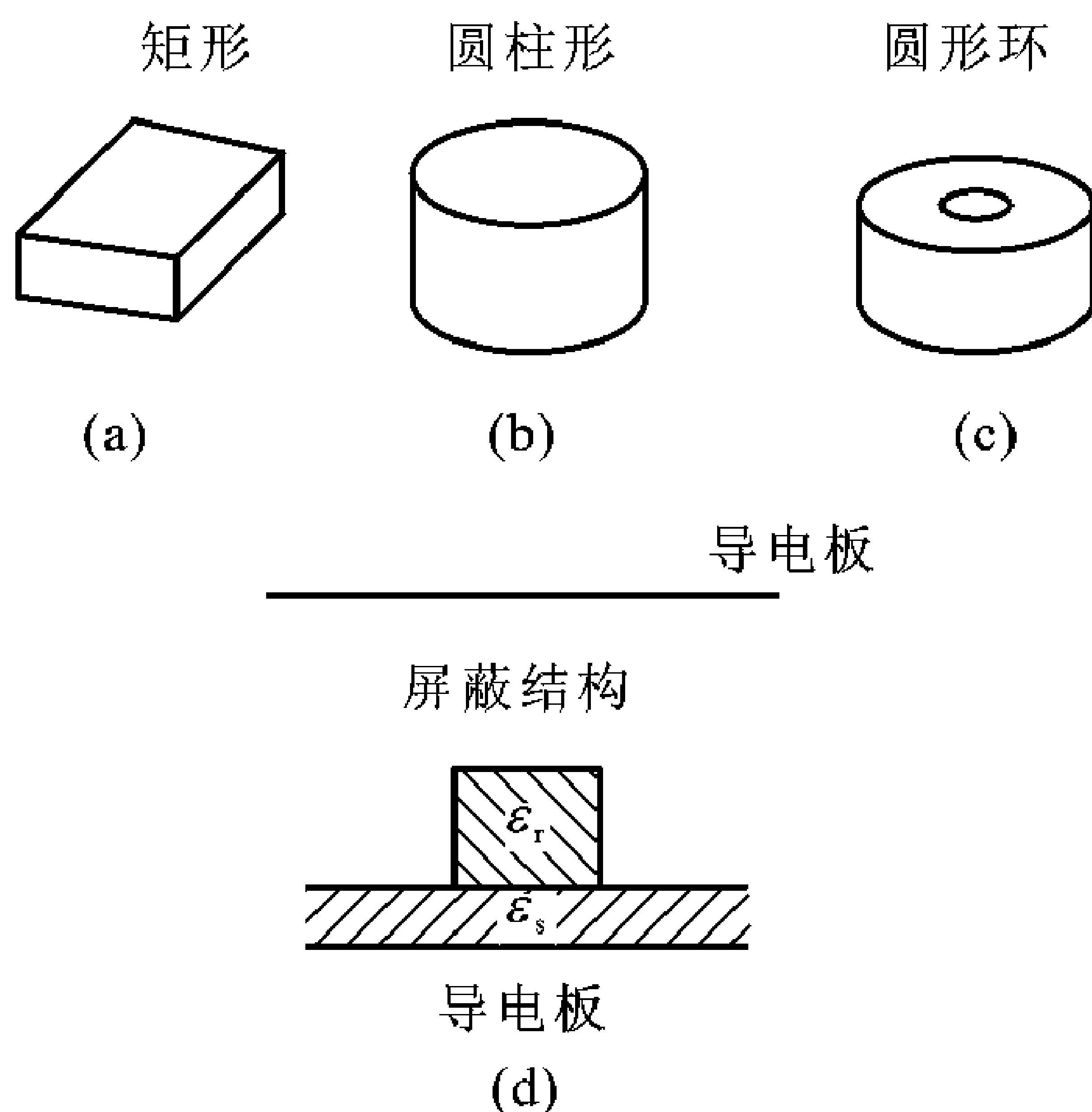


图 7－13　介质谐振器

（a）矩形　（b）圆柱形　（c）圆形环

（d）屏蔽结构

对于图 7－13（d）所示的实际上得到应用的介质谐振器，如以 y 为纵向，可以分成 3 个基本模块[图 7－14（a）]，Ⅰ为介质谐振器所在区域，Ⅱ、Ⅲ为空气及介质基片所在区域，每个区域可用传输线等效，上下两导电板用短路线表示，不同模块交界面，用网络 T 表示模

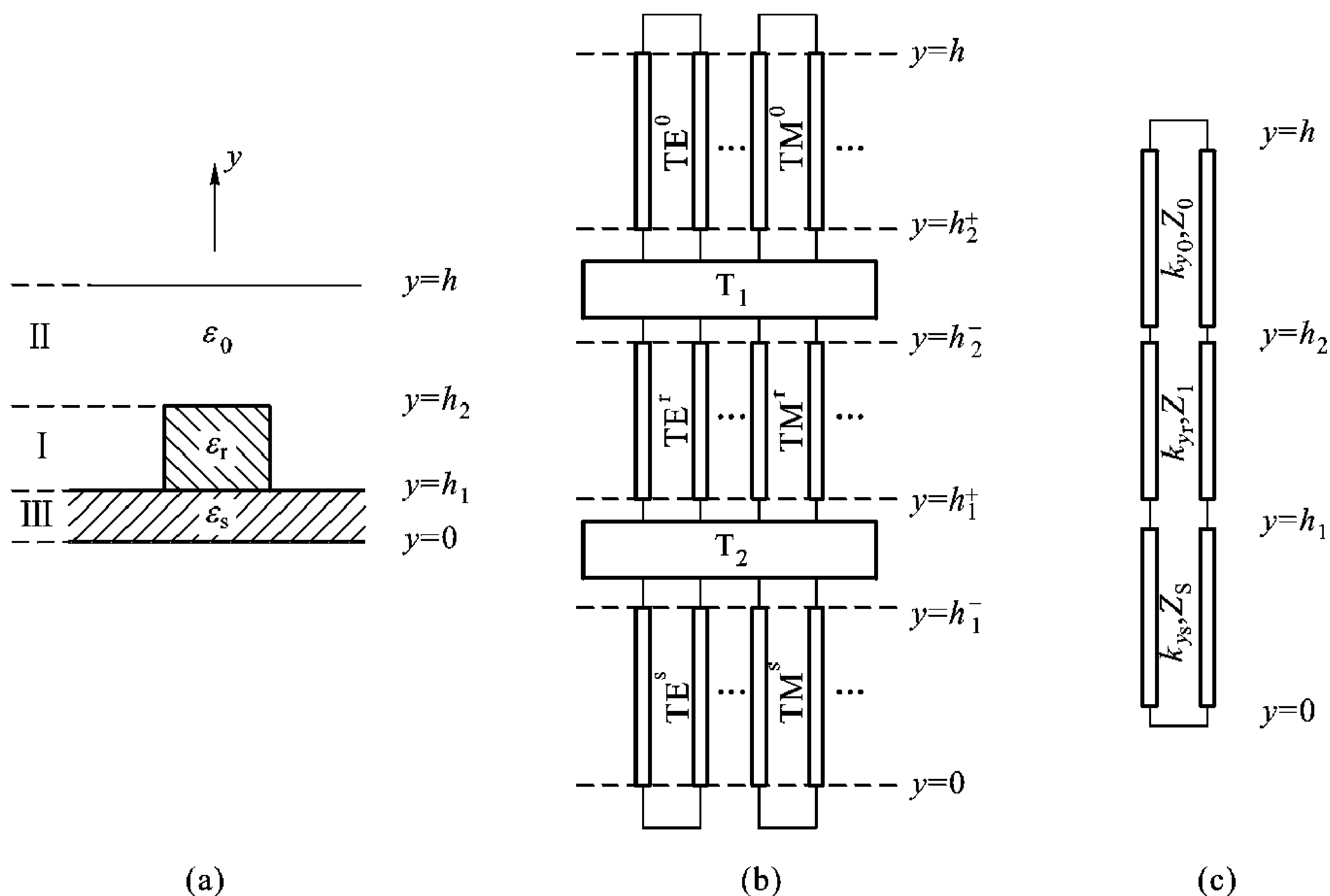


图 7－14　屏蔽结构介质谐振器及其等效电路

（a）介质谐振器截面图　（b）、（c）等效网络

式之间的耦合。最终得到如图 7－14（b）所示的横向等效网络。

利用第 6 章分析结果，可以求出各模块所等效的传输线参数。原则上，用模式匹配法可求出耦合网络 T_1、T_2 的参数，如果模式取得足够多可得到介质谐振器的精确解。本书最后一章 13.1、13.2 节将对模式匹配法进行初步讨论。

作为近似，如果略去模式之间的耦合，即用单位矩阵表示耦合网络 T_1、T_2，则图 7－14（b）所示的等效网络可简化为图 7－14（c）。选取任一参考面，如 $y=h_1$，求出 $\pm y$ 方向看进去的输入导纳 $Y^{\uparrow}$，$Y^{\downarrow}$，谐振条件要求

$$Y^{\uparrow}+Y^{\downarrow}=0$$

式中 $Y^{\uparrow}$，$Y^{\downarrow}$ 是 ω 的函数，故上式可近似决定介质谐振器的谐振频率。

介质谐振器在介质稳频振荡器中得到广泛应用。图 7－15（a）是环路反馈式介质稳频振荡器电路示意图。不加介质谐振器时，FET 电路处于微波放大器的工作状态，不产生振荡；当把高 Q 介质谐振器放置在输出微带线与输入微带线之间，通过磁耦合把输出功率的一部分反馈到栅极，当反馈相位和反馈功率合适时将产生振荡，介质谐振器相当于窄带带通滤波器，在介质谐振器的中

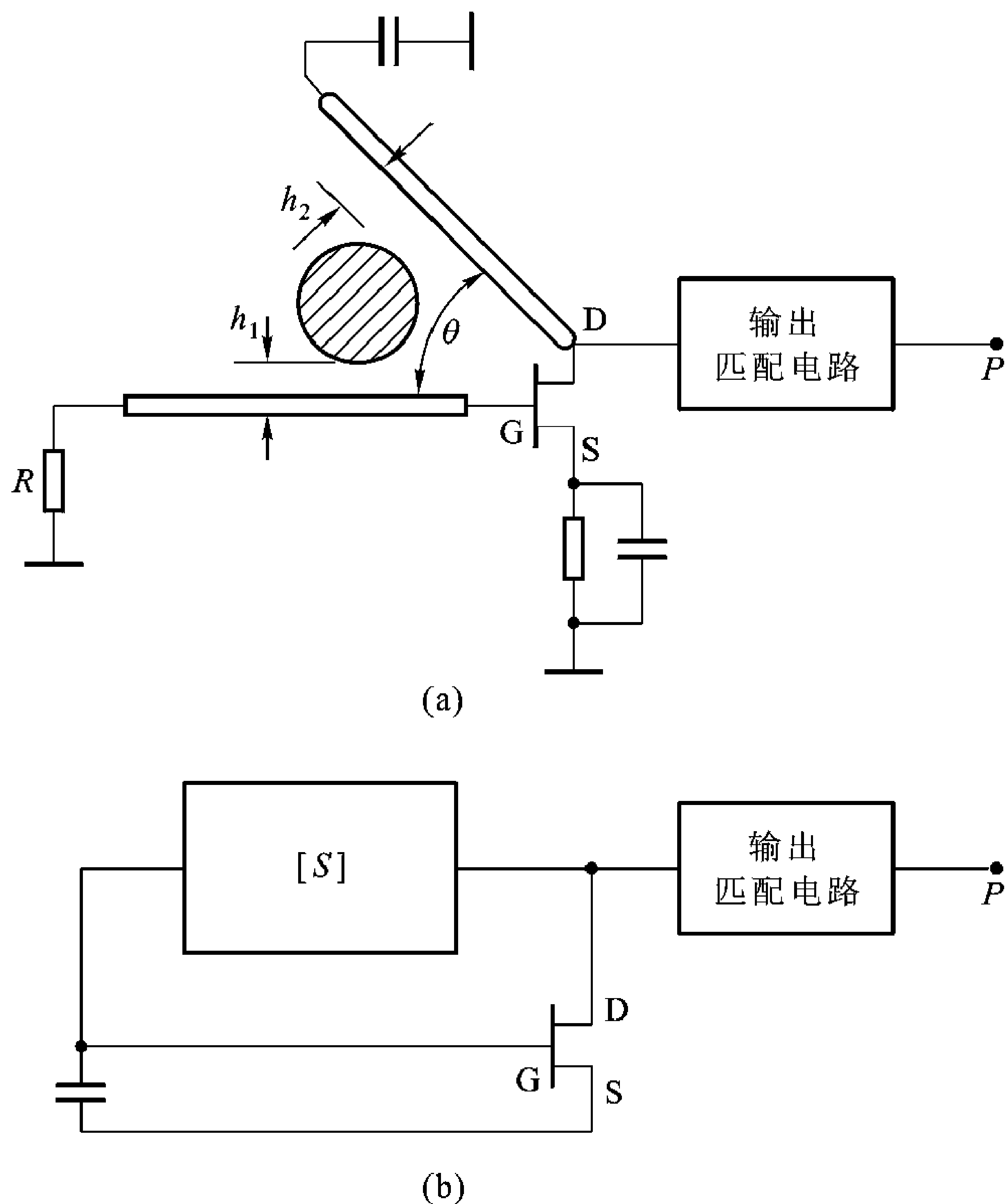


图 7－15 环路反馈式介质稳频振荡器

（a）振荡器电路 （b）等效电路

心频率处，反馈最强，相位合适。图 7－15（b）是反馈式介质振荡器的等效电路图。

反馈式介质稳频振荡器的稳频效果与介质振荡器有载品质因数 Q_L（Q_L 定义为 2π 乘谐振腔中储能与一周期内包括外电路在内的腔的总的损耗之比，见 7.7 节）成正比，因此希望 Q_L 越大越好。Q_L 不仅取决于介质谐振器固有品质因数 Q_0，而且与微带电路耦合的强弱有直接关系。为了提高 Q_L，可以减弱耦合，与此同时，应选用高增益 FET 或采用两级 FET 放大电路。

7.6　开放式谐振器

本节讨论的开放式谐振器又称为法布里－珀罗腔。常用的有两种，平面镜腔和球面镜腔。图 7－16 是平面镜腔的示意图，它是由两块平行的镜构成，镜间距为 $2l$，镜面可以是圆形的或矩形的。设想一平面波入射至一镜面，则波在二镜面之间形成稳定的驻波。但只有波非常接近于正入射，且镜面线度远大于波长的情况下，波在多次反射的过程中逃逸出镜间空间的部分占的比重很小，即衍射损失很小，才能建立起有足够高的品质因数的振荡模式。相反地，如果波以较大的入射角斜入射至镜面时，不需经太多次反射，波就逃逸出镜面空间，衍射损失很大，不能形成稳定的振荡。当然后一种情况在作为向空间辐射的元件时是有利的。

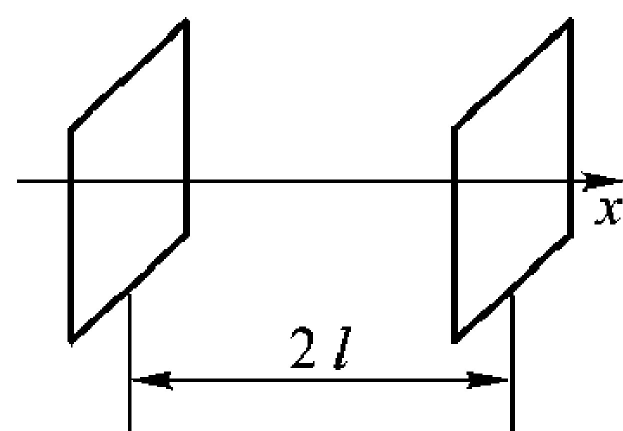


图 7－16　平面镜腔示意图

对于开放式谐振腔，例如图 7－16 的平面镜腔，其镜面间距 $2l$ 远大于波长，至少取 10 个自由空间波长左右。对于那些衍射损失小的振荡模式，提高腔长度可增大腔内电磁储能而并不相应增大衍射损失，因而产生很高 Q 值的稳定振荡。另一方面，对于那些衍射角较大（斜入射）的模式而言，增加腔长将导致开放边界扩展，从而使衍射损耗较大的模式（或波更容易地从开放边界逸出到外空间的模式）在腔中不能建立稳定的振荡，因此退出模式竞争行列，使开放腔中振荡频谱较为稀疏，大大减少了封闭腔中存在的令人头痛的模式竞争问题，使开放腔中高 Q 值的振荡可以稳定工作。

所以，开放式谐振系统的特点是，既能激励起一些高 Q 值的谐振模式，又同时伴随有向周围空间的辐射。正是后一点使大量模式通过向外辐射而在腔内消失掉，使封闭腔中振荡频谱密集的问题在此得到克服。所以在开放腔中研究振荡模式的谐振条件的同时，还要研究不同模式在镜边缘产生的衍射。

开放谐振腔大量应用于激光器中，故称为光学谐振腔。

如果平面镜腔二镜面的线度远大于波长，可以认为趋于无穷，则平面镜腔

就简化为平行板波导腔，其谐振频率决定于

$$kl = \frac{\pi q}{2} \ (q = 1, 2, \cdots) \tag{7.6.1}$$

其中 q 表示平面镜间 z 方向电磁波变化的半波数。

如果镜面线度有限，设 x 方向为 $2a$，y 方向为 $2b$，镜面间距还是 $2l$，则决定谐振频率的相位条件为

$$kl = \frac{\pi q}{2} + \pi p \tag{7.6.2}$$

p 是体现衍射作用对相位条件的修正量，在腔的衍射损失小时，可把 p 分成两项

$$p = p_a + p_b \tag{7.6.3}$$

p_a 代表 x 方向的开端衍射参量，p_b 则是 y 方向开端衍射参量

$$p_a = \frac{\pi m^2}{4(M_a + B - jB)^2} \tag{7.6.4}$$

$$p_b = \frac{\pi n^2}{4(M_b + B - jB)^2} \tag{7.6.5}$$

式中 m、n 表示电磁波沿 x、y 方向变化的半波数，m、$n = 1$、2、…，M_a、M_b 为无量纲镜面宽度

$$M_a = \sqrt{\frac{2ka^2}{l}} \tag{7.6.6}$$

$$M_b = \sqrt{\frac{2kb^2}{l}} \tag{7.6.7}$$

B 为常数，且 $B = 0.824$。

如果 a、b 比波长足够大，使得 $M_a \gg m$，$M_b \gg n$，则 p_a、p_b 是小量，表明在开端 $x = \pm a$、$y = \pm b$ 只有很小的衍射。p_a，p_b 一般是复量。

$$p_a = p'_a + jp''_a$$

$$p_b = p'_b + jp''_b$$

$$p'_a = \frac{\pi m^2}{4} \frac{M_a(M_a + 2B)}{[(M_a + B)^2 + B^2]^2}$$

$$p''_a = \frac{\pi m^2}{2} \frac{B(M_a + B)}{[(M_a + B)^2 + B^2]^2}$$

将下标 a 改为 b，m 改成 n 就得到 p'_b，p''_b。所以

$$p = p' + jp'' \tag{7.6.8a}$$

$$p' = p'_a + p'_b \tag{7.6.8b}$$

$$p'' = p''_a + p''_b \tag{7.6.8c}$$

将式(7.6.8a)代入式(7.6.2)，而式(7.6.2)中 k 定义为

$$k = \omega / c$$

可以得到

$$\frac{\omega l}{c} = \frac{\pi q}{2} + \pi\ (p' + \mathrm{j}p'') \tag{7.6.9}$$

式(7.6.9)表明 ω 也是复数，实部 p' 为修正腔的谐振频率 Re (ω)，而虚部 p'' 使频率出现 Im (ω)，它对应衍射造成的辐射损失。

开放腔的品质因数，如果只计及镜面反射损耗，大体估计如下所述。对于 TEM_{00p} 模，设 S 为波束横截面积，u 为腔内储存的能量密度，腔内的总能量为

$$U = uSl$$

如 α 为每在镜面上反射一次的功率损失部分，则镜面上损失的功率为

$$p = cu\alpha s$$

按照 Q 的定义

$$Q_{镜} = 2\pi \frac{U}{pT} = \frac{2\pi}{\alpha}\frac{l}{\lambda}$$

以上两式中 c 为光速，T 为振荡周期。如果 $\alpha = 0.5\%$，$\lambda = 6\,328$ Å，$l = 50$ cm，则 $Q_{镜} \approx 10^9$，它远比微波频段的封闭式谐振腔的品质因数要高。

如只计及衍射损耗，腔的品质因数可用下式计算

$$Q_{衍} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Re}\,[\omega]}{\mathrm{Im}\,[\omega]} = \frac{q + 2p'}{4p''} \approx \frac{q}{4p''} \tag{7.6.10}$$

后一等式是在 $q >> p'$ 条件下得出的。由上式可见，要使 $Q_{衍}$ 高，q 需为大整数，即腔的二镜间距 $2l$ 远大于波长，另一方面要使衍射损失 p'' 很小，要求镜面线度 $2a$、$2b$ 比波长大得多。

如镜面损耗与衍射损失同时考虑，总的 Q 值有如下关系式：

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{镜}} + \frac{1}{Q_{衍}}$$

例 7－4　试说明法布里－珀罗干涉器[图 7－17 (a)]的透射输出曲线[图 7－17(b)]。图中 d 为干涉器厚度，θ 为入射光与干涉器表面夹角。

解：法布里－珀罗干涉器的基础是光束在薄板的两个表面多次反射产生的透射光的干涉。只有满足 $k_z d = n\pi$ 或 $n\lambda = 2d\sin\theta$ 条件时，在干涉器内来回反射一次相移为 $2n\pi$，从干涉器透射出去的波相位相同，合成起来的场(在透镜焦点)最强。在焦点最大光强度为 $I_{\max} = E^2$。当输入光波长偏离 $n\lambda = 2d\sin\theta$ 条件时，干涉器内波来回反射一次相移不等于 $2n\pi$，从干涉器透射出去的光相位不一致，相互抵消一部分，因而透射输出减小。波长偏离 $n\lambda = 2d\sin\theta$ 愈严重，输出愈小。在波长偏离相同的情况下，随着表面反射率的增大，透射输出曲线越尖锐，因此在焦点检测到的光强与波长关系就如图 7－17 (b)所示。

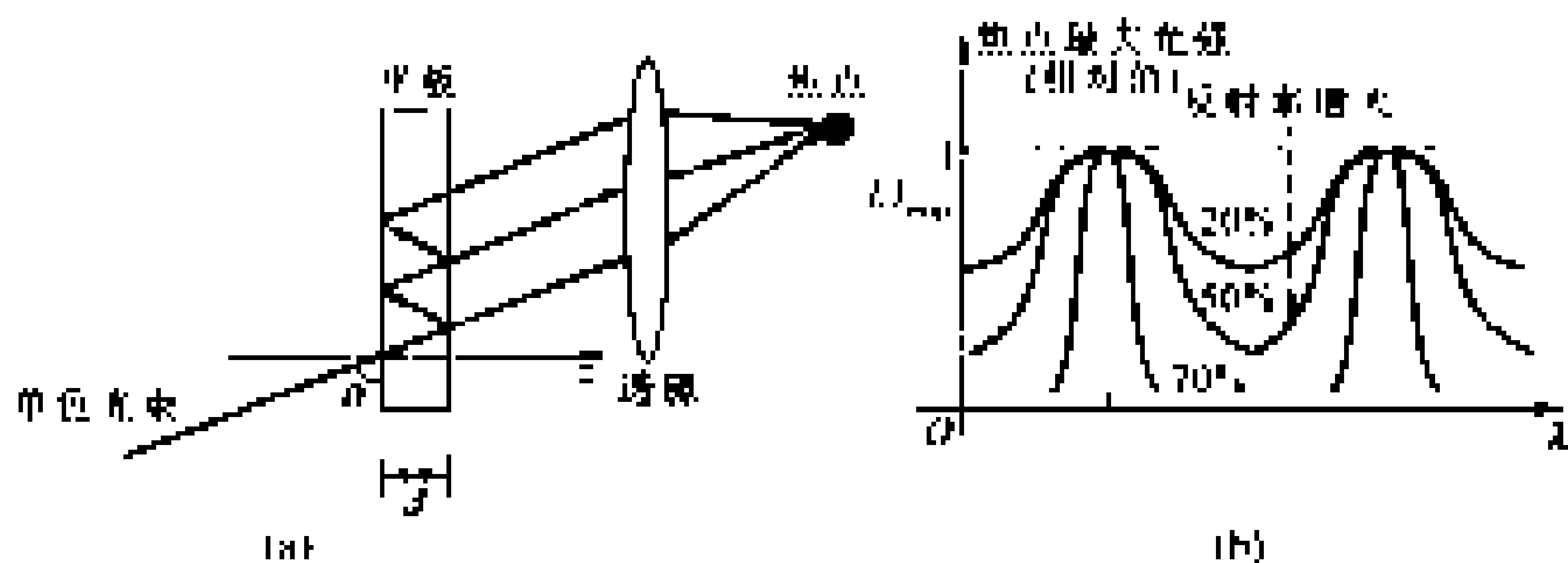


图 7 – 17 法布里 – 帕罗干涉器

(a) 原理结构 (b) 随着反射率增大，最大值之间的光强减小，干涉曲线尖锐度增大

7.7 谐振器与传输线的耦合

7.7.1 耦合的方式

空腔谐振器跟同轴线的耦合与波导跟同轴线的耦合类似，一般也有两种方法，即电探针耦合与耦合环耦合。不管是哪一种耦合方式，电探针激励的电场或耦合环激励的磁场与谐振器工作模式在探针附近的电场或耦合环附近的磁场分布要尽可能一致。波导与空腔谐振器的耦合一般用小孔耦合。波导通过小孔耦合到谐振器中的场也要与谐振器在小孔附近工作模式的场结构尽量一致。以上 3 种耦合结构示于图 7 – 18 (a)、(b)、(c)。

微带线与微带谐振器既可通过隙缝进行耦合，如图 7 – 18 (d)，也可通过边缘漏泄场耦合，如图 7 – 18 (e)。微带线与介质谐振器耦合，介质谐振器放在微带线一侧，通过漏泄场耦合。图 7 – 15 (a) 所示的介质稳频振荡器中介质谐振器就是通过漏泄场与微带线耦合的。

光波段谐振器通过半透明膜与外界耦合。图 7 – 19 所示氦氖气体激光器作为激光腔的平面镜腔，镜的一个端面要求反射率尽量高，最好能达到 100% 反射；另一个镜面，激光器中激光要通过此镜面输出，其反射率并不要求达到 100%，控制到一个适当的数值即可，一般为 98%。激光器与外界的耦合正是通过此镜面的“半”透明特性达到。激光腔中的布儒斯特窗对 x 方向极化的光是透明的，对 y 方向极化光有较大反射。因此激光腔中只有 x 方向极化的光建立起振荡。

只要弄清传输线与谐振器中场分布，耦合器设计就有根据。由于耦合器边界条件的复杂性，其分析比规则边界条件的谐振器与传输线复杂得多。限于篇

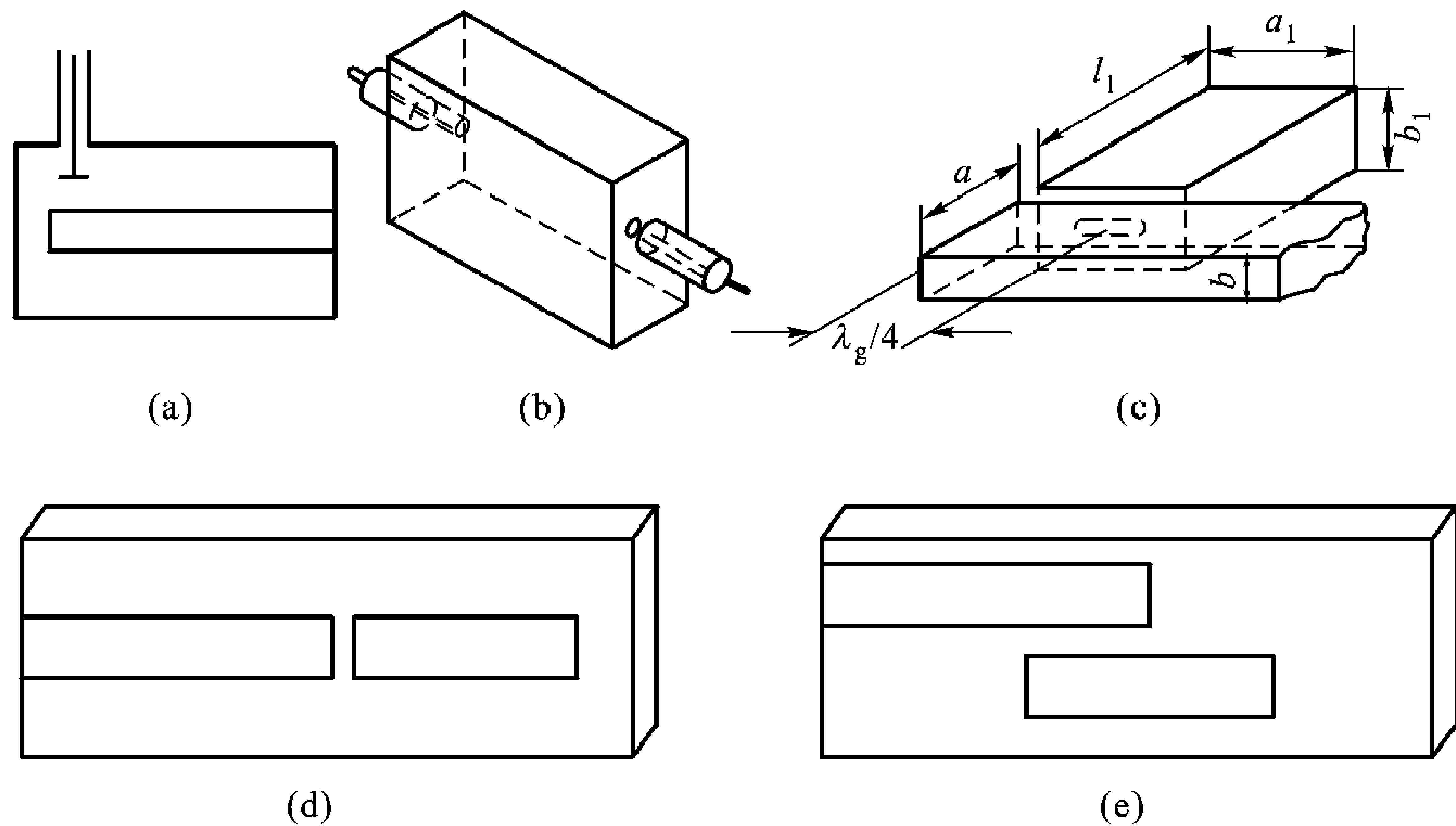


图 7－18　同轴线、波导与空腔谐振器以及微带与微带谐振器的耦合

(a) 电探针耦合　(b) 耦合环耦合　(c) 小孔耦合　(d) 微带隙缝耦合　(e) 微带边缘场耦合

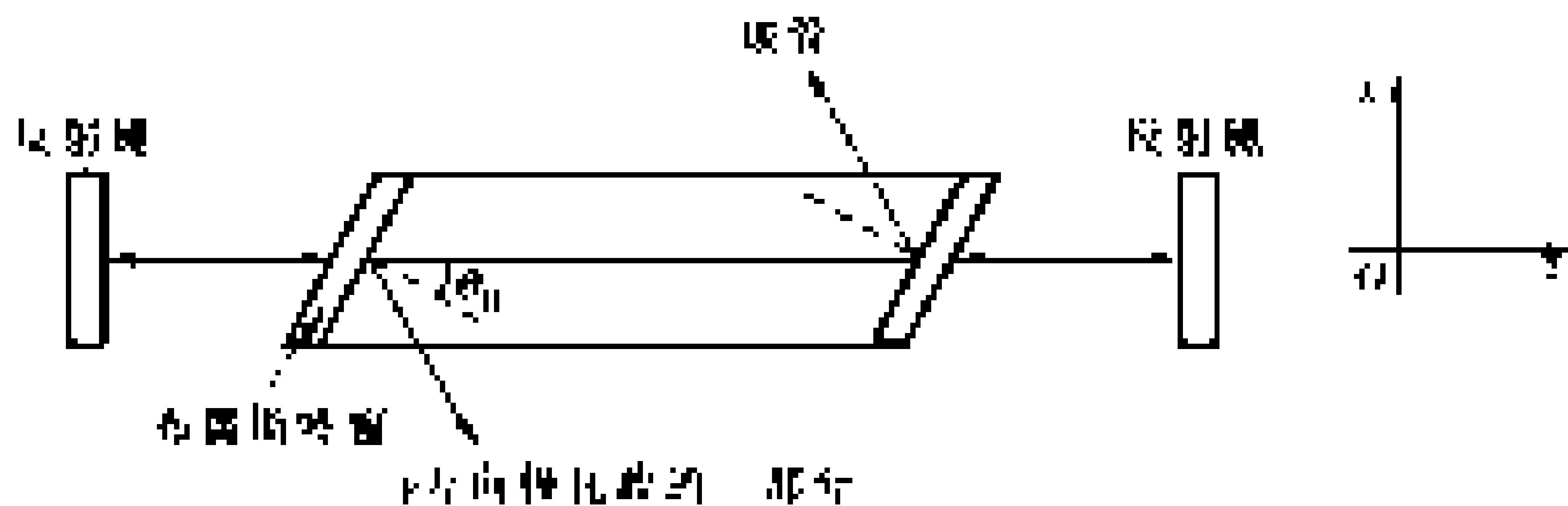


图 7－19　氦氖气体激光器

幅，众多传输线与谐振器耦合的结构就不再列举了。

7.7.2　传输线与谐振器耦合的等效电路

传输线与谐振器的耦合及其等效电路示于图 7－20 (a)和(b)。谐振器用并联的 LCG 谐振电路表示，耦合器则用一无损两端口网络等效。

注意，图 7－20 (b)的等效电路只对工作于某一特定模式的场而言，工作于不同模式的谐振器要用不同参数的谐振电路等效。

如果把耦合器理解为从传输线到谐振器的一个升压变压器，升压比为 n，则图 7－20 (b)的等效电路可表示成图 7－20 (c)，传输线特征导纳 Y_0 变换到谐振器内时为 $Y'_0 = Y_0/n^2$，故图 7－20 (c)的等效电路可进一步简化到图 7－20 (d)。所以谐振器与外电路耦合从谐振器角度看，传输线的影响等效于增加一损耗电导 Y'_0。此时总的损耗电导 $G_L = G_0 + Y'_0$。定义与谐振器固有损耗联系

的品质因数 Q_0 为

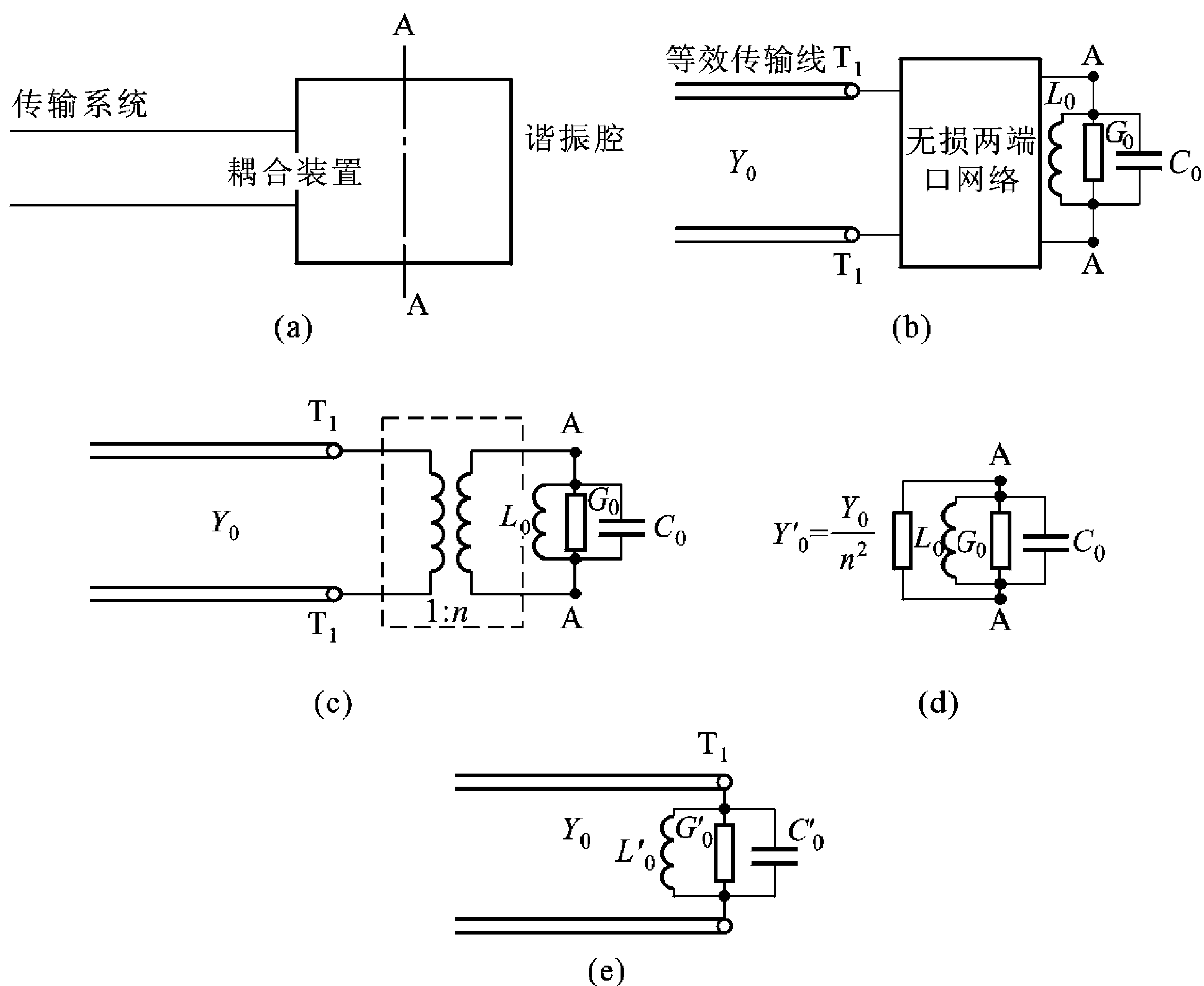


图 7－20　传输线与谐振器耦合的等效电路

(a)原理结构　(b)、(c)、(d)、(e)等效电路

$$Q_0 = \frac{\omega C_0}{G_0} \tag{7.7.1}$$

而与外电路损耗联系的外观品质因数

$$Q_e = \frac{\omega C_0}{Y'_0} \tag{7.7.2}$$

则与谐振器总的损耗联系的有载品质因数

$$Q_L = \frac{\omega C_0}{Y'_0 + G_0} \tag{7.7.3}$$

显然

$$\frac{1}{Q_L} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_e} \tag{7.7.4}$$

定义谐振器与外电路耦合度

$$\beta = \frac{Q_0}{Q_e} = \frac{Y'_0}{G_0} = \frac{Y_0}{n^2 G_0} \tag{7.7.5}$$

它表示外电路损耗与谐振器内损耗之比。

如果将谐振器 L_0、C_0、G_0 通过理想变压器变换到传输线一端，其等效电路则简化到图 7－20（e），其中 $C'_0=n^2C_0$，$G'_0=n^2G_0$，$L'_0=L_0/n^2$，所以从传输线角度看，谐振器相当于一个对频率敏感的负载。注意，不管把传输线特征导纳通过理想变压器归算到谐振器内，或把谐振器通过理想变压器归算到传输线，谐振器的品质因数不变。在谐振频率点，$\omega=\omega_0$，谐振器为一纯电导 G'_0。传输线终端 T_1 面反射系数

$$\Gamma=\frac{Y_0-G'_0}{Y_0+G'_0} \tag{7.7.6}$$

传输线上驻波系数

$$\rho=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}=\begin{cases}Y_0/G'_0=Y_0/n^2G_0=\beta & (Y_0>n^2G_0)\\ G'_0/Y_0=n^2G_0/Y_0=1/\beta & (n^2G_0>Y_0)\end{cases} \tag{7.7.7}$$

即谐振器与外电路耦合度 $\beta>1$ 时，$\rho=\beta$，当 $\beta<1$ 时，$\rho=1/\beta$。

7.7.3 谐振器特征参数的测量

前已指出，对外电路而言，可将谐振器看作一个对频率敏感的负载。在谐振频率附近，谐振器所等效的负载特性随频率变化而变化，根据传输线理论，传输线的状态也跟着变化，描述传输线状态的特征量，如反射系数、驻波系数与驻波相位也相应跟着变化。因而通过对谐振频率附近与谐振器耦合的传输线上反射系数 Γ、驻波系数与驻波相位的测量即可提取谐振器的特征参数。

如果假定谐振频率附近，谐振器电导 G'_0不随频率而变，则谐振器偏离谐振频率时，从圆图上看，谐振器所等效的负载将沿等 G'_0圆旋转，随谐振器工作频率与谐振频率偏离程度，即 $\Delta\omega=|\omega-\omega_0|$的增加，谐振器的电纳分量 $B'(\omega)$也增加，谐振器导纳（或阻抗）在圆图上对应点，即等 G'_0圆与等 $B'(\omega)$圆交点，不管 $G'_0<1$ 还是 $G'_0>1$，离开圆图中心点距离，即反射系数模 $|\Gamma(\omega)|$都增加[见图 7－21（a）和（b）]，而驻波系数 $\rho=(1+|\Gamma|)/(1-|\Gamma|)$当然也增加。所以在谐振频率附近，驻波系数 ρ 与 ω 关系如图 7－22（a）。驻波最小点位置随频率的变化规律由图 7－21（a）和（b）可见是不一样的。对于图 7－21（a）所示的 $G'_0<1$ 或 $\beta>1$ 的情况，最小点位置随频率单调变化，如图 7－22（b）。而对于图 7－21（b）所示的 $G'_0>1$ 或 $\beta<1$ 的情况，随着 ω 偏离 ω_0 程度的增加，驻波最小点位置相对于谐振时驻波最小点位置的偏离，先是随频率增加而增加，到达最大值后再增加频率，驻波最小点位置又接近谐振时的驻波最小点位置，如图 7－22（c）。所以谐振频率附近驻波最小点位置变化规律在 $\beta>1$、$\beta<1$两种情况下是不一样的。基于 $\beta>1$、$\beta<1$ 两种情况下驻波最小点位置变化规律在谐振频率附近的差异，可判断谐振器与外电路的耦合度，或谐振器损耗相对于外电路损耗是大于 1（$\beta<1$）还是小于 1（$\beta>1$）。

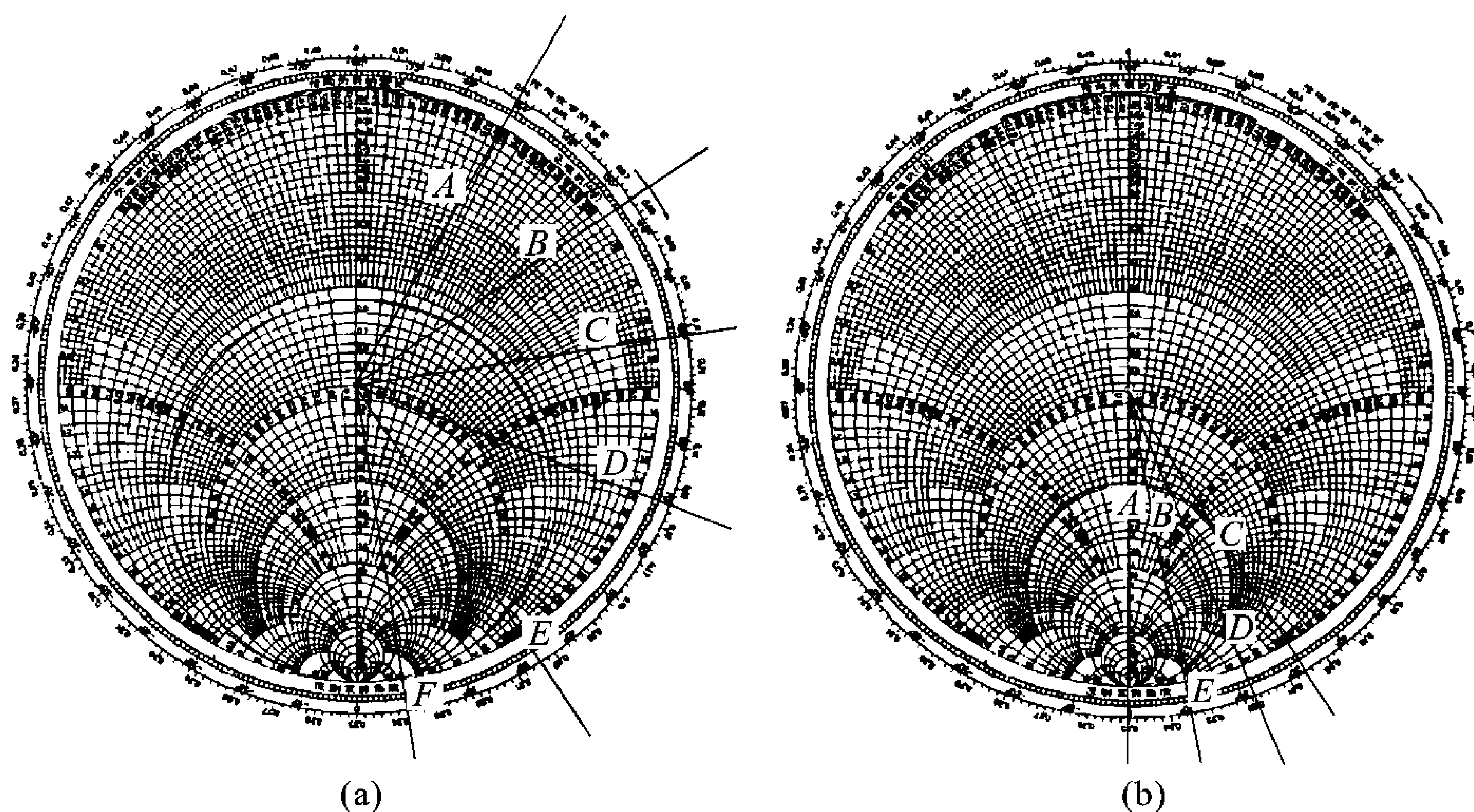


图 7-21 谐振频率附近驻波最小点位置 l_{min}在圆图上的表示

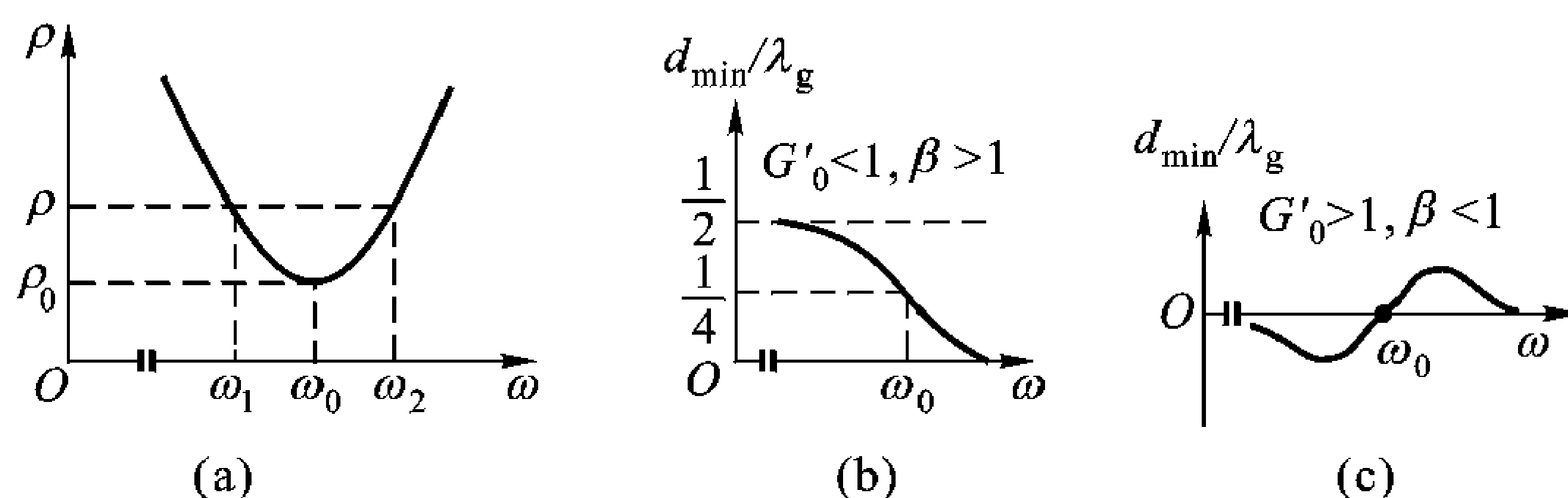


图 7-22 谐振器谐振频率附近 $\rho-\omega$，$d_{min}-\omega$ 曲线

(a) $\rho-\omega$ (b) $d_{min}-\omega$ 曲线($\beta>1$) (c) $d_{min}-\omega$ 曲线($\beta<1$)

谐振频率附近反射系数相位 ψ 随频率的变化既可从图 7-21 的圆图分析得到，也可根据式(2.2.26)的关系得到(见习题 7-15)。

如果能测得在谐振频率附近与谐振器耦合的传输线上的反射系数与频率关系($|\Gamma|-\omega, \psi-\omega$)或驻波系数与频率($\rho-\omega$)、第一个驻波最小点位置与频率($d_{min1}-\omega$)的关系曲线[如图 7-22 (a)和(b)]，那么谐振器的特征参数 ω_0、Q_0、G'_0(或 β)也就确定了。

从 $\rho-\omega$，$d_{min1}-\omega$ 提取谐振器的特征参数

谐振时驻波系数最小，所以 $\rho-\omega$ 曲线上最小驻波系数ρ_0 对应的频率就是谐振频率 ω_0。根据谐振频率附近 d_{min1}随频率是否单调变化可决定谐振器与外电路耦合的程度，其损耗电导可由下式决定

$$G'_0=\begin{cases}1/\rho_0 & (d_{min}\text{随频率单调变化}, \beta>1)\\ \rho_0 & (d_{min}\text{随频率非单调变化}, \beta<1)\end{cases}$$

为计算品质因数 Q_0 要先计算$\frac{\partial B'(\omega)}{\partial\omega}$。为此在 $\rho-\omega$ 曲线上任选一点 ρ_x（$\rho_x>\rho_0$），其对应的频率为 ω_x。因为已假定谐振频率附近谐振器的损耗电导近似等于谐振时的损耗电导 G'_0，所以当谐振器工作频率偏离谐振频率 ω_0 到 ω_x 时，在圆图上其等效负载一定为等 G'_0圆与 ρ_x 圆交点，该交点对应的负载电纳就是谐振器工作频率偏离到 ω_x 时的 $B'(\omega_x)$。因为 $\omega=\omega_0$ 时，$B'(\omega_0)=0$，所以$\frac{\partial B'(\omega)}{\partial\omega}=\frac{B'(\omega_x)}{|\omega_x-\omega_0|}$。如此，就可按式(7.2.12)计算固有品质因数 Q_0，$Q_0=\frac{1}{2}\omega_0\frac{\partial B'(\omega)}{\partial\omega}\Big/G'(\omega_0)$。

从 $\Gamma\sim\omega$ 提取谐振器的特征参数

谐振器特征参数也可通过测量谐振频率附近的谐振器反射功率曲线得到。图 7－23 是以入射波功率归一化的反射波功率随角频率变化的曲线，如果谐振器品质因数比较高，频带窄，可假定入射波功率在谐振频率附近不随频率变化。因为谐振时反射功率 $P_r(\omega)$最小，所以反射功率最小的点对应的频率就是谐振频率 ω_0。

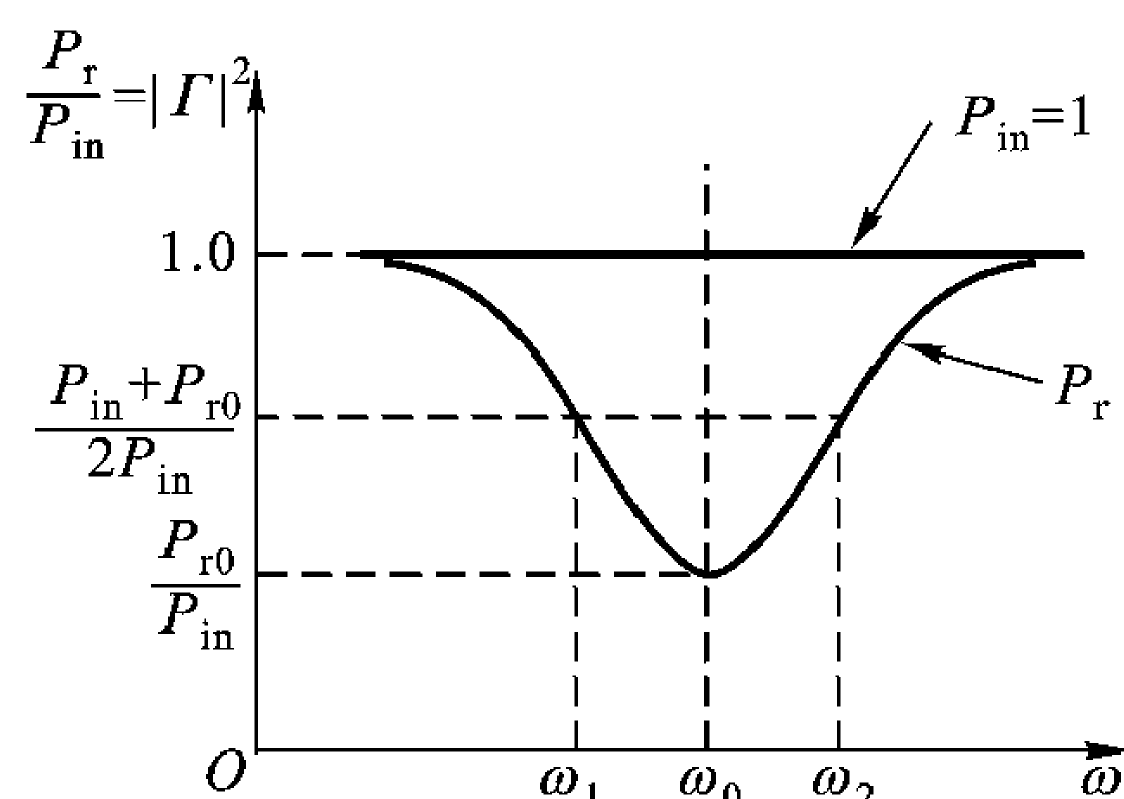


图 7－23　谐振频率附近反射功率与频率关系曲线

偏离谐振频率，当电纳 $B(\omega_1)$或 $B(\omega_2)$与电导 G'_0+Y_0 相等时，谐振器吸收功率 $P(\omega_1)$或 $P(\omega_2)$只有谐振时的一半。此时反射功率

$$P_r(\omega_1)=P_r(\omega_2)=\frac{1}{2}[P_{in}(\omega_0)+P_r(\omega_0)]$$

$P_{in}(\omega_0)$为入射波功率。只要从反射功率曲线测出 $P_r(\omega_1)$、$P_r(\omega_2)$对应的频率 ω_1 与 ω_2，就可根据

$$Q_L=\frac{1}{2}\omega_0/|\omega_1-\omega_0|\quad 或\quad Q_L=\frac{1}{2}\omega_0/|\omega_2-\omega_0|$$

得到有载品质因数 Q_L。谐振时的反射系数$|\Gamma|^2=\frac{P_r(\omega_0)}{P_{in}(\omega_0)}$

由$|\Gamma|$可得到谐振时的驻波系数 $\rho=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$。

耦合度 β 或谐振器的等效损耗电导 $G'_0=\rho$（当 $\beta<1$ 时）还是 $G'_0=1/\rho$（当 $\beta>1$ 时），可根据驻波最小点位置 $d_{min1}-\omega$ 或反射系数相位 $\psi-\omega$ 在谐振频率

附近是否单调变化进行判断。当 β 判定后，$Q_0 = Q_L(1+\beta)$，$Q_e = \frac{1+\beta}{\beta}Q_L$。

借助矢量网络分析仪可直接测量反射系数的相位 $\psi(\omega)$，谐振器特征参数的测量就更方便了。矢量网络分析仪已成为微波测试不可缺少的仪器。

例 7－5　根据图 7－24 (a)所示测量系统，用定向耦合器采样得到入射波、反射波功率曲线如图 7－24 (b)，测得反射功率最小点对应频率 $f_0 = 9\,370$ MHz，f_0 与 $f_1 = f_0 + 5$ MHz 以 P_0^i 归一化的对应的入射波、反射波功率分别为 $P_0^i = 1$，$P_0^r = 0.16$，$P_1^i = 0.95$，$P_1^r = 0.342$。用微扰法判断谐振器与系统耦合度 $\beta > 1$，计算 f_0、Q_0、β。

解：反射功率最小点对应的频率即谐振频率，所以 $f_0 = 9\,370$ MHz，谐振点反射系数的模 $|\Gamma_0|$ 为

$$|\Gamma_0| = \sqrt{\frac{P_0^r}{P_0^i}} = \sqrt{0.16} = 0.4$$

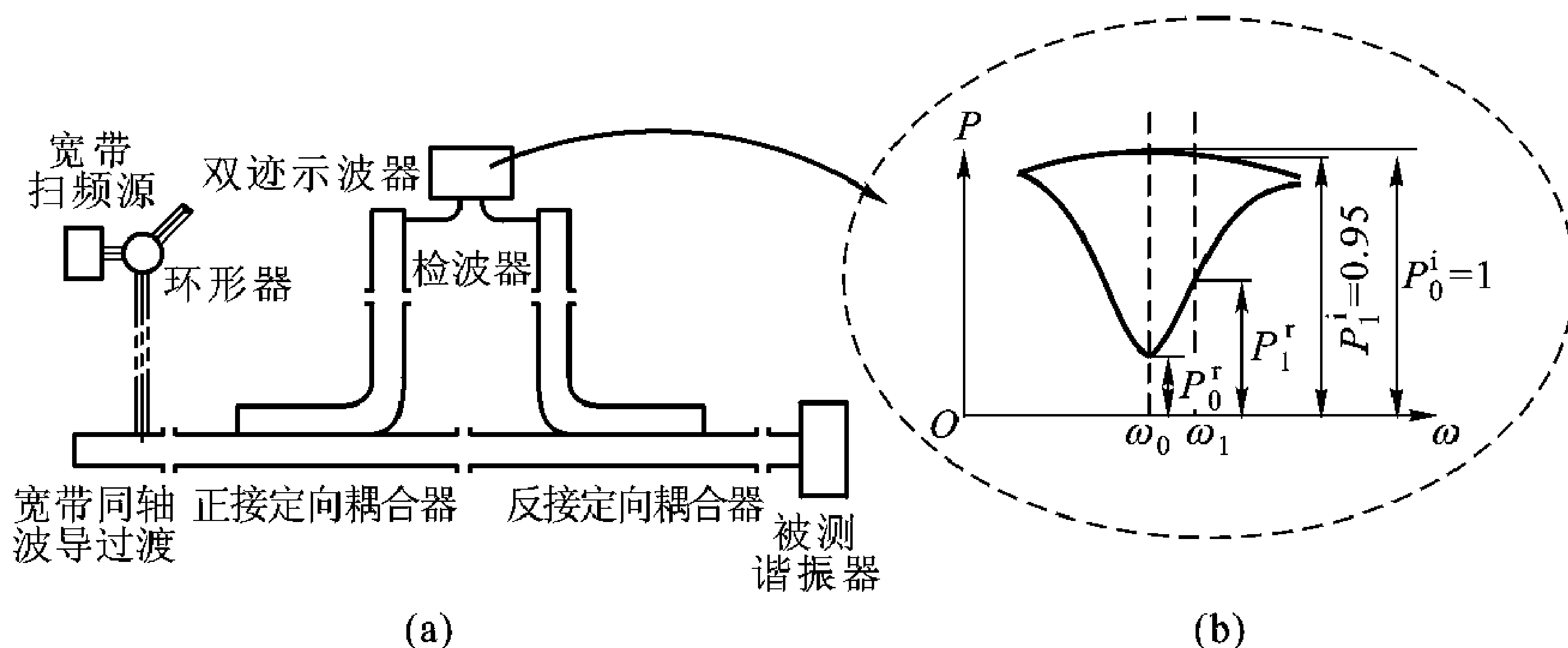


图 7－24　例 7－5 图

(a)测量系统　(b)入射功率、反射功率曲线

所以谐振点

$$\rho = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1.4}{0.6} = 2.33$$

因为 $\beta > 1$，所以

$$\beta = \rho = 2.33$$

$f = f_1$ 处反射系数模 $|\Gamma_1| = \sqrt{\frac{0.342}{0.95}} = 0.6$，对应的 $\rho_1 = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+0.6}{1-0.6} = 4$。

假定谐振频率附近谐振器等效电导

$$g \approx g_0 = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2.33} = 0.428$$

在导纳圆图(图 7－25)上作 $\rho_1 = 4$ 的等 ρ 圆与 $g = 0.428$ 的等 G 圆交点。读出过交点处等 b 线的值为 $b = \pm 0.84$，所以

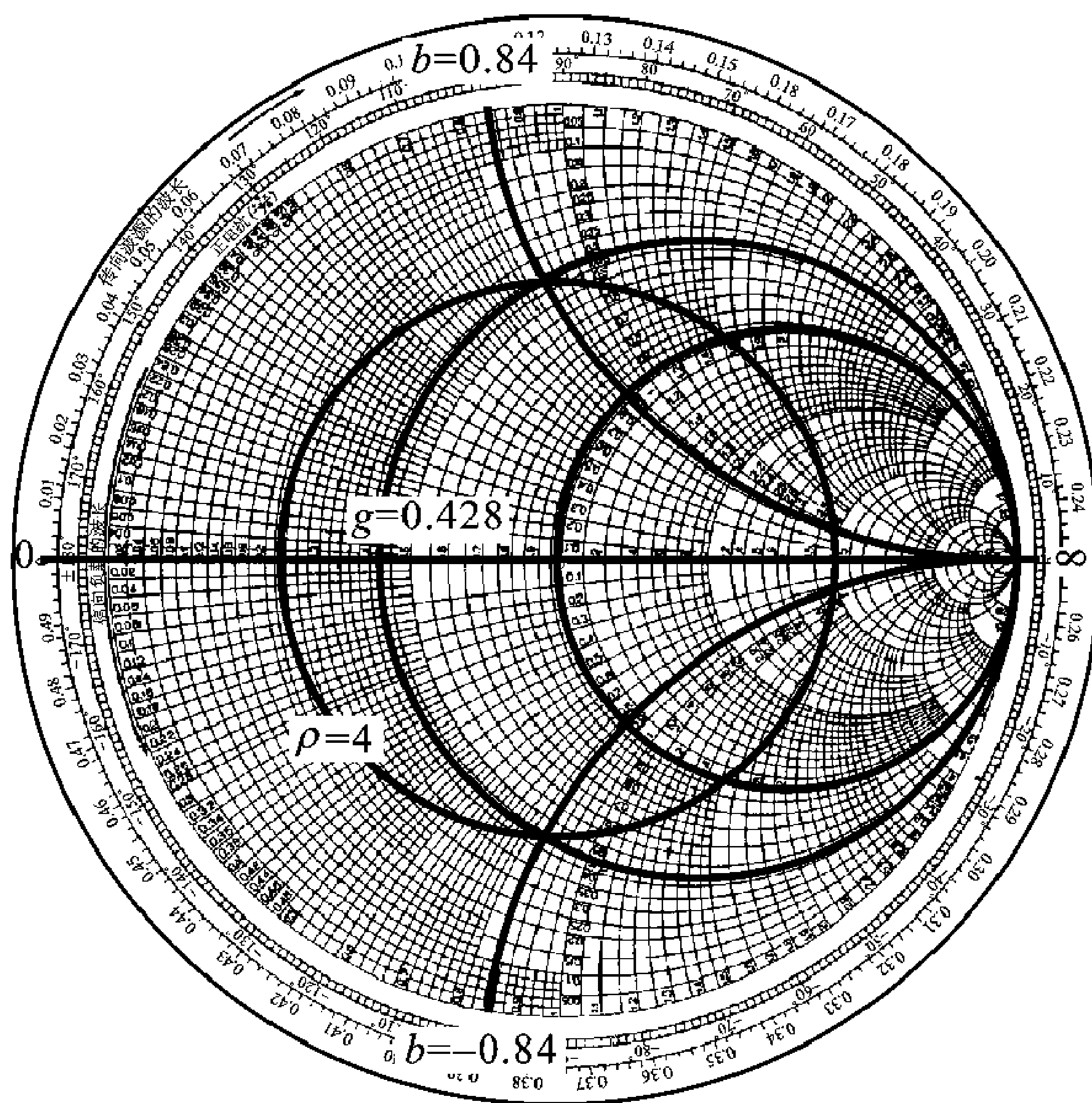


图 7－25　例 7－5 用圆图

$$Q_0 = \frac{1}{2} f_0 \frac{\mathrm{d}B\ (f)}{\mathrm{d}f} / g\ (f_0)$$

$$= \frac{1}{2} \times 9\,310 \times \frac{0.84}{5} / 0.424$$

$$= 1\,844.43$$

本章要点

- 谐振器是一个储能元件，具有频率选择性，描述谐振器的特征参数是谐振频率 ω_0、品质因数 Q_0 以及谐振器损耗。
- 集总式低频 LC 谐振回路只在一个谐振频率点 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 附近有较强的电磁振荡，分布式高频谐振器可在一系列分立的频率 ω_n 附近产生较强的电磁振荡，这就是分布式谐振器谐振频率的分立性和多重性。品质因数 Q_0 表示谐振器选择频率的能力，品质因数越高，选择频率能力越强，稍偏离谐振频率，电磁振荡就急剧减小。谐振器损耗一般相对于外电路损耗而言。
- 只要使传输线的两端短路（反射系数为 $\Gamma = -1$）或开路（反射数 $\Gamma = 1$），就构成传输线型谐振器。同轴线一端开路、一端短路即构成同轴线谐振器；矩形波导、圆波导两端短路就构成矩形谐振器、圆柱形谐振器；微带线两端断开、圆柱介质波导两端断开，就构成微带线谐振器、介质谐振器。所有这些

谐振器中电磁场在坐标轴的3个方向都是驻波分布，都发生谐振。给出3个坐标轴方向的等效网络，利用各坐标轴方向的谐振原理，即可得到决定谐振器谐振频率的特征方程。

- 谐振器一般工作于最低模，高次模振荡是竭力避免的。工作于TE_{011}模的圆柱谐振器，虽不是最低模，但可以利用非接触式短路活塞，使其他模式径向高频电流被切断，迫使这些电流漏泄到短路活塞背后，被活塞背后的吸收物质吸收，阻尼了这些模式的振荡。在开放式谐振器中巧妙地利用衍射损耗使那些斜入射至镜面的波因衍射损耗而建立不起振荡。
- 谐振器与外电路的耦合有多种方式，归结起来有电耦合、磁耦合与混合耦合。表示谐振器与外电路耦合的参数是外观品质因数 Q_e 或耦合度 β（$\beta = Q_0/Q_e$）。对于外电路而言，谐振器是一个频率敏感的负载，对谐振器特征参数的测量正是基于这一原理。通过测量谐振器在谐振频率附近反射系数的模$|\Gamma|$与相位 ψ（$\Gamma = |\Gamma| e^{j\psi}$）或驻波系数 ρ 与离开谐振器第一个驻波最小点位置d_{min1}与频率关系，得到谐振器特征参数的有关信息。谐振器特征参数的测量无非是从$(|\Gamma|, \psi)$或(ρ, d_{min1})在谐振频率附近随频率变化的信息中提取谐振器的特征参数。

习题

7.1 谐振器与波导相比，特点是什么？

7.2 微波谐振器用LC回路等效，其等效的物理意义是什么？

7.3 谐振器的特征参量有几个？说明其物理意义，谐振器与外电路耦合用什么特征量表示？物理意义是什么？

7.4 有一矩形波导谐振腔，其几何尺寸为6 cm×7.5 cm×10 cm，问其最长的谐振波长是多少？

7.5 有一个微波加热炉，其腔体尺寸 a、b、l 分别为44、36、40 cm。如果频率在2 450±20 MHz范围内，试问腔中有多少模式发生谐振？其 m、n、p 各为多少？为什么微波加热用的谐振腔设计为多模腔？

7.6 矩形谐振腔的内截面几何尺寸为22.86 mm×10.16 mm×20 mm，谐振腔材料为铜，电导率为5.8×10^7 s/m，腔工作在最低模，求：

(1) 谐振波长 λ；

(2) 固有品质因数 Q；

(3) 若最大电场强度振幅为1 000 V/m，问腔中储能和腔壁损耗的功率各是多少？

7.7 一个直径为3 cm，长度 $l = 3$ cm的圆柱谐振器，求其最低模式的谐振频率。

7.8 谐振腔中电磁场的空间分布和波导中相应模式的电磁场分布有什么关系？试以矩形谐振腔T_{101}模和矩形波导TE_{10}模为例进行讨论。

7.9 谐振腔A和谐振腔B的几何尺寸和工作模式都相同，腔体A充以$\varepsilon_r > 1$（$\mu_r = 1$）的介

质，在它们各自的谐振频率下电源在腔 A 和腔 B 中激起电场振幅相同的电磁振荡，问谐振腔 A 中任意点（$H=0$ 的点除外）的磁能密度 w_{HA} 与谐振腔 B 中相应点的磁能密度 w_{HB} 是否相同？请说明理由。

7.10 设计一个工作于 TE_{011} 模的圆柱谐振腔，要求其调谐范围为 $f_1 = 9\,800$ MHz，$f_2 = 10\,200$ MHz，并要求其在上述频率范围内除了 TM_{111} 简并模外不出现其他寄生模，试选择适当的直径 D 和对应于上述频率 f_1 和 f_2 的腔长 l_1 和 l_2。

7.11 有什么办法使圆波导腔只工作于 TE_{011} 模？

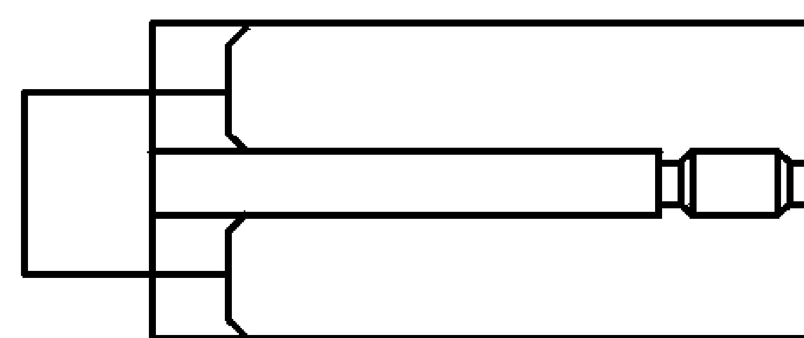
7.12 根据矩形波导 TE_{10} 模与圆波导腔 TE_{011} 模场分布特点，如何设计一个耦合器使矩形波导 TE_{10} 模有效激励工作于 TE_{011} 模的圆波导腔。

7.13 开放腔中如何解决模式竞争问题？

7.14 $\lambda/4$ 同轴线谐振腔和一同轴线耦合（见题图 7.14），问：

(1) 若采用磁耦合（即耦合环耦合），耦合环应放在什么地方？放置的方向应当如何？

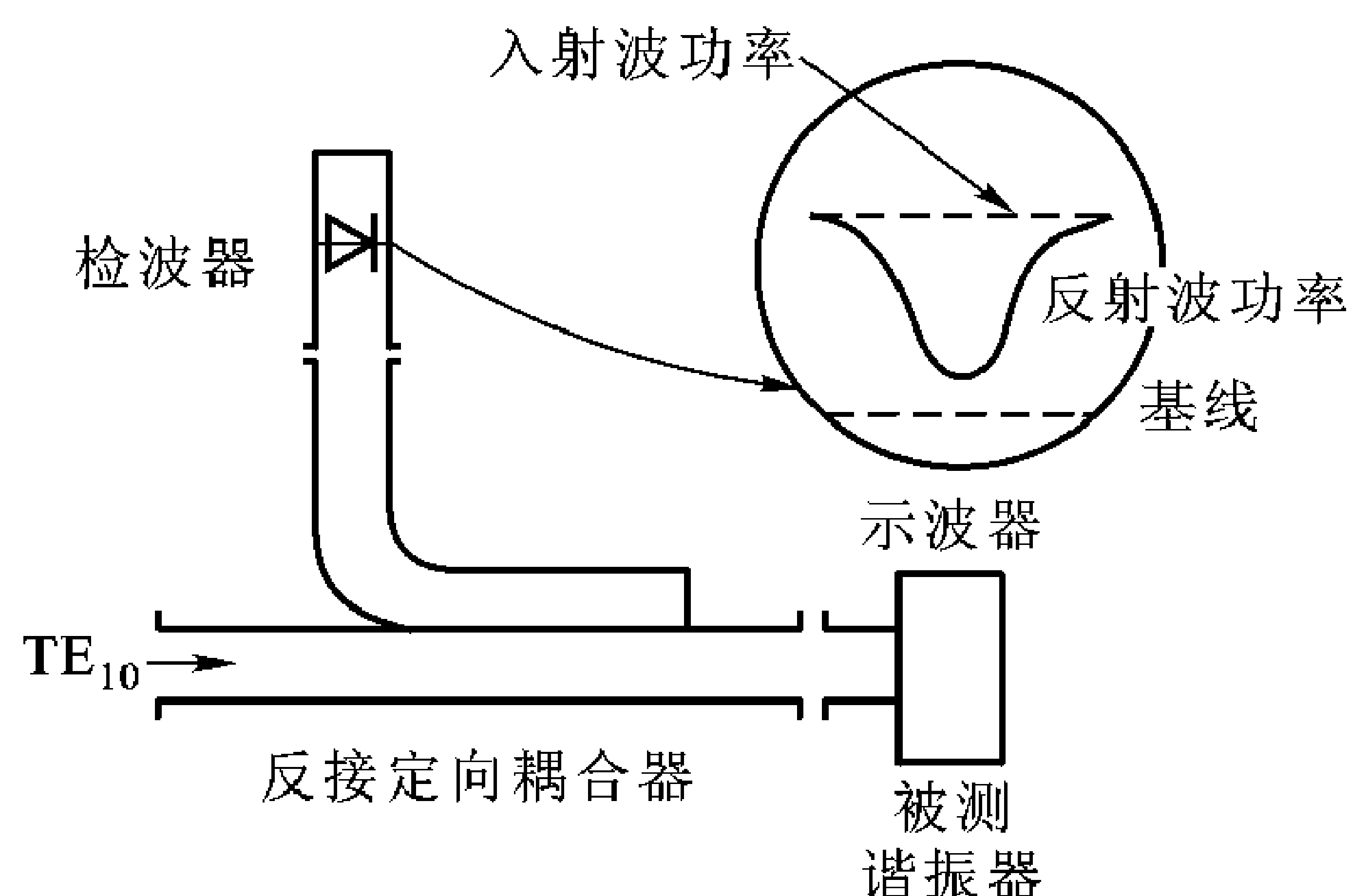
(2) 若采用电耦合（即探针耦合），探针应放在什么地方？如果端面电容处要安装微波元器件，则探针必须装在侧面的什么地方？



题图 7.14

7.15 谐振器与传输线耦合，谐振器相当于一个对频率敏感的负载[见图 7 - 20(e)]，根据图 7 - 21，在耦合度 $\beta > 1$ 和 $\beta < 1$ 两种情况下分析谐振频率附近，在 T_1 参考面反射系数相位 ψ 随频率 ω 变化关系。

7.16 传输线与矩形空腔谐振器耦合，测得其反射功率与频率关系如题图 7.16。如果在谐振器顶部开一小孔，从孔中插入一青草叶子（对于谐振器的微扰），分析在 $\beta > 1$ 和 $\beta < 1$ 两种情况下，随青草叶子插入谐振器深度的增加，反射功率曲线如何变化？

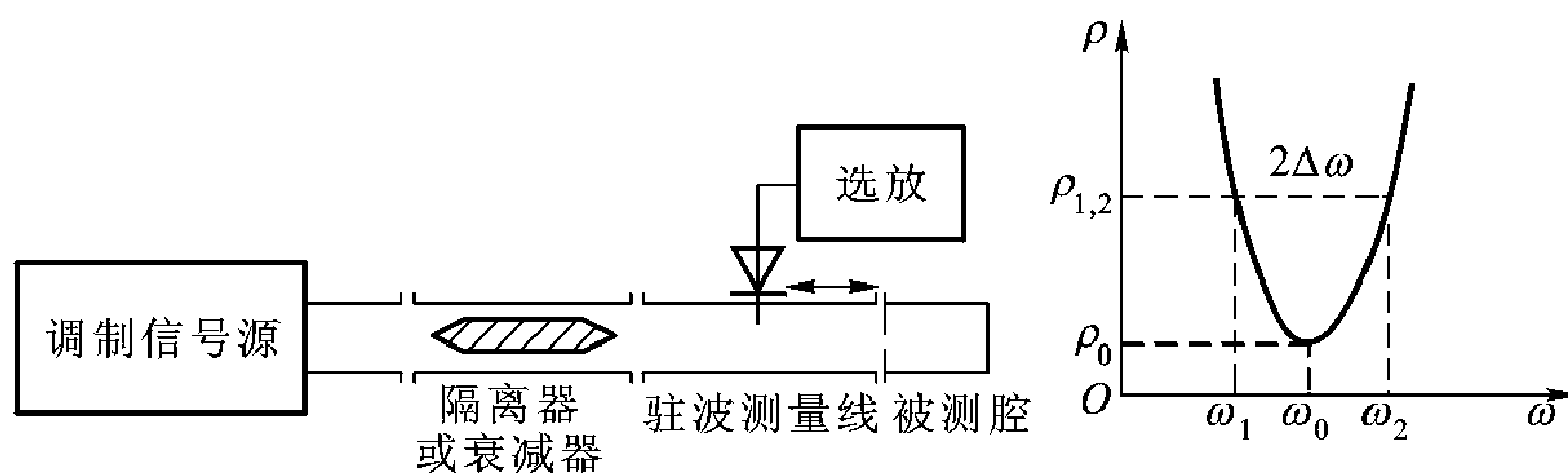


题图 7.16

7.17 如题图 7.17 所示，在测量线上测得单口腔的 $\rho - f$ 曲线，问题如下：

(1) 说明在 $\rho - f$ 曲线的最小 ρ 处（$\rho = \rho_0$）为腔的谐振频率；

(2) 证明当 $\rho_{1,2}=\dfrac{1+\rho_0+\sqrt{1+\rho_0^2}}{1+\rho_0-\sqrt{1+\rho_0^2}}$时，它所对应的 $2\Delta f$ 为腔的半功率带宽，即 $Q_L=\dfrac{f_0}{2\Delta f}$。



题图 7.17

第 8 章　天　　线*

第 4 章到第 7 章对电磁问题的讨论都假定所研究的空间不存在产生电磁振荡的源，即麦克斯韦方程中 $\boldsymbol{J}=0$，$\rho=0$。我们知道，随时间变化的电流和电荷在其周围必然产生随时间变化的电磁场，这种随时间变化的电场和磁场能相互转换。因此在交变电流和电荷存在的情况下，必有部分电磁能离开波源(电流和电荷)向外传播，这就是电磁辐射。能有效地辐射(或接收)电磁波的装置称为天线。

本章先介绍天线基本概念及表征天线的主要参数，然后通过对几种典型天线系统(主要是线天线和口径天线)的讨论使读者掌握天线的基本工作原理、设计原则及其应用。本章 8.1 节介绍天线的基本概念及基本参数；8.2 节引入标量位与矢量位及其解；8.3、8.4 节分析电基本振子与磁基本振子的辐射及其特性；8.5、8.6 节重点讨论线天线与线阵天线；8.7、8.8 节讨论口径天线与微带天线；最后 8.9 节为传输方程与雷达方程。

8.1　概述

天线用来发射和接收电磁波。发射天线可以看作波导中传播的导行波到自由空间的转换器，而接收天线则可看成自由空间传播的电磁波转变为波导中导行波的转换器，如图 8-1。在图 8-1 (a)的发射模式中，振荡源产生的交变电磁振荡先耦合到波导，转变为波导中传播的电磁波，最后通过喇叭状的转换器(即天线)辐射到自由空间。而在图 8-1 (b)的接收模式中则相反，从自由空间来的电磁波先经喇叭状的转换器(天线)到波导，最终为接收机检测。对天线的最基本要求有两个：一是发射或接收电磁波的方向性和极化特性，对方向性和极化特性的具体要求视不同的应用环境而定；二是天线和波导的匹配，即在发射模式下，波导中导引的电磁波能全部通过天线辐射出去，在接收模式下，天线接收到的电磁功率全部被接收机接收。

业已发展的多种满足上述基本要求的天线(见图 8-2)，其结构、形式差别甚大，大体可分为线天线和口径天线两类。移动通信用的 VHF、UHF 天线，大多是以对称振子为基础而发展起来的各种形式的线天线，卫星地面站接收卫

---

* 本章 8.5、8.6 节主要参考 Liang Chi Shen，Jin Au Kong “Applied Electromagnetism”。

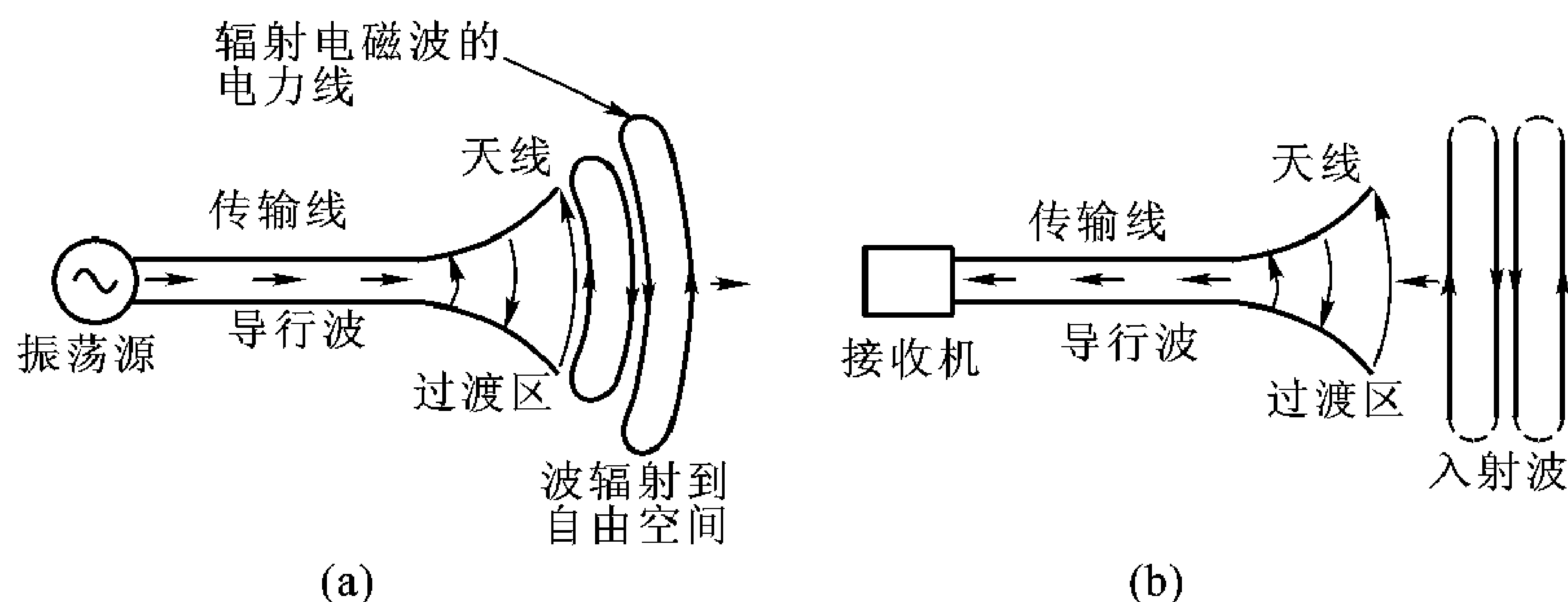


图 8-1　天线工作的两种模式

(a) 发射模式　(b) 接收模式

星信号大多用抛物面天线(口径天线)。

天线的特征与天线的形状、大小及构成材料有关。天线的大小一般以天线发射或接收电磁波的波长 λ 来计量。因为工作于波长 $\lambda=2$ m 的长为 1 m 的偶极子天线的辐射特性与工作于波长 $\lambda=2$ cm 的长为 1 cm 的偶极子天线是相同的。

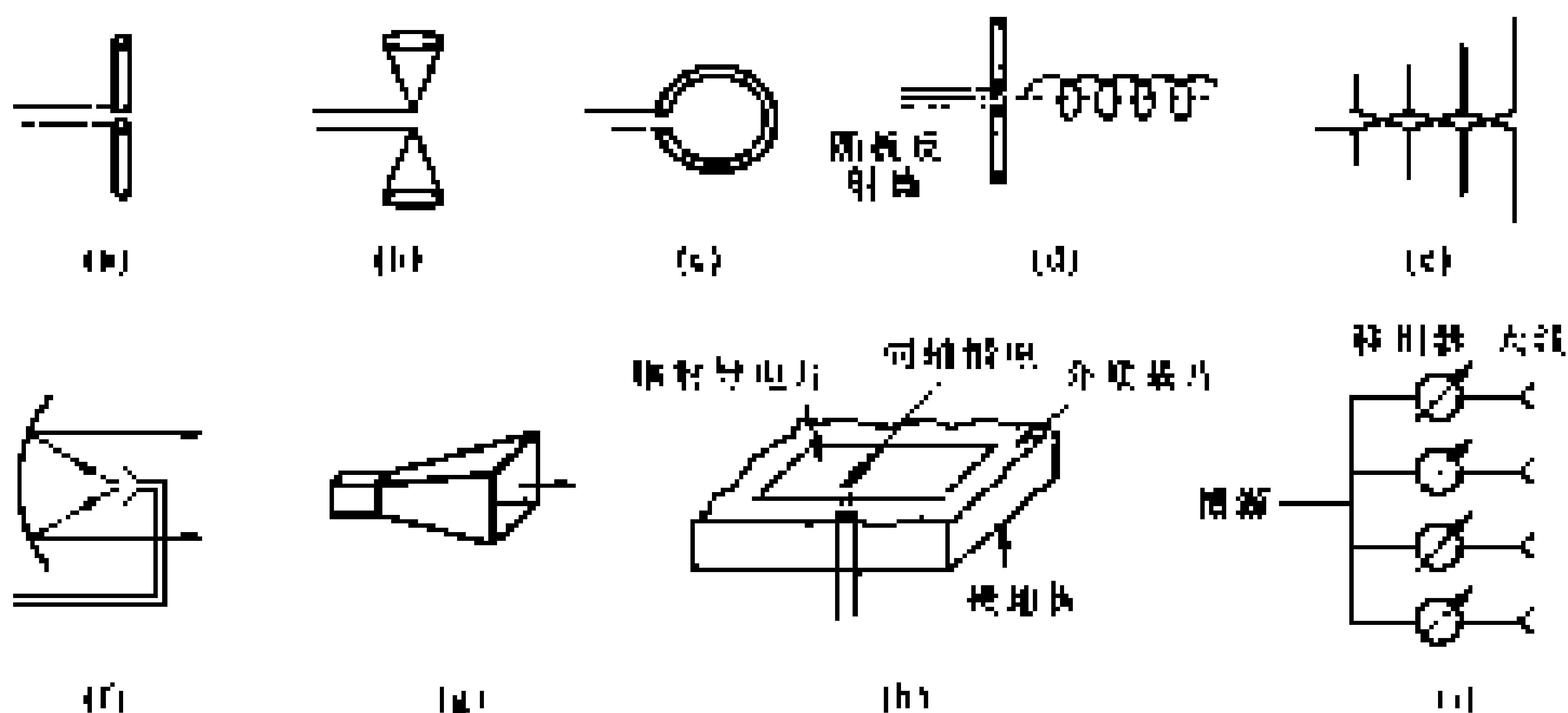


图 8-2　天线举例

(a) 细振子天线　(b) 双圆锥振子天线　(c) 环形天线　(d) 螺旋天线　(e) 对数周期天线
(f) 抛物面天线　(g) 喇叭天线　(h) 微带天线　(i) 天线阵

描述天线特性的主要参数有:

1. 与天线方向性有关的参数

天线的方向性可以用方向性函数或方向图表示。离开天线一定距离处，描述天线辐射的电磁场强度在空间的相对分布的数学表达式，称为天线的方向性函数；把方向性函数用图形表示出来，就是方向图。因为天线的辐射场分布于

整个空间，所以天线的方向图通常是三维的立体方向图。图 8－3 就是典型的口径天线的方向图。最大辐射波束通常称为方向图的主瓣。主瓣旁边的几个小的波束叫旁瓣。

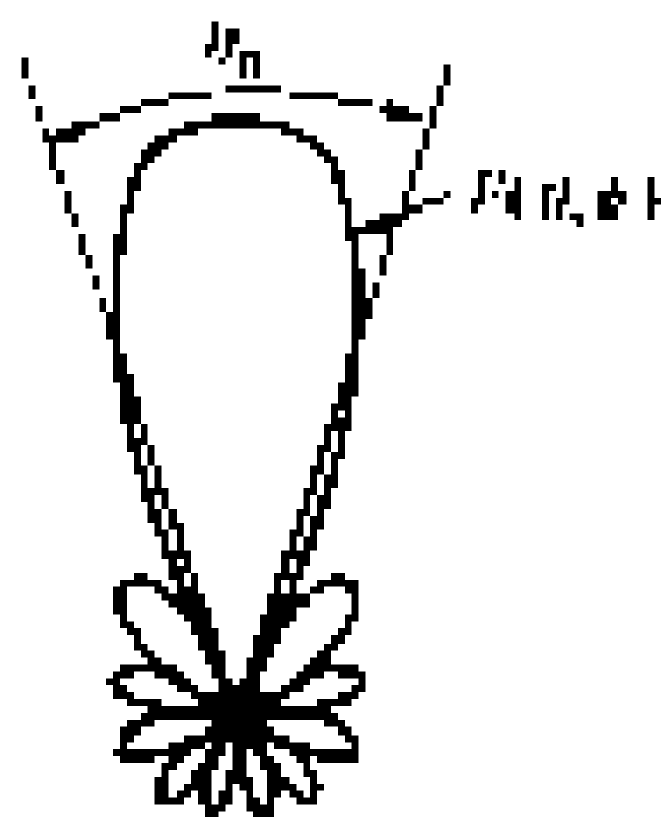


图 8－3　口径天线方向图

为了方便对各种天线的方向图进行比较，就需要规定一些表示方向图特性的参数，这些参数有：天线增益 G（或方向性 G_D）、波束宽度（或主瓣宽度）、旁瓣电平等。

（1）天线增益 G 与方向性 G_D

天线增益是在波阵面某一给定方向天线辐射强度的量度，它是被研究天线在最大辐射方向的辐射强度与被研究天线具有同等输入功率的各向同性天线在同一点所产生的最大辐射强度之比，其严格的定义是

$$G=\frac{\text{单位立体角最大辐射功率}}{\dfrac{\text{馈入天线总功率}}{4\pi}} \tag{8.1.1}$$

天线方向性 G_D 与天线增益 G 类似但与天线增益定义略有不同，为

$$G_D=\frac{\text{单位立体角最大辐射功率}}{\dfrac{\text{总的辐射功率}}{4\pi}} \tag{8.1.2}$$

因为天线总有损耗，天线辐射功率比馈入功率总要小一些，所以天线增益总要比天线方向性小一些。理想天线能把全部馈入天线的功率限制在某一立体角 Ω_B 内辐射出去，且在 Ω_B 立体角内均匀分布，见图 8－4。这种情况下天线增益与天线方向性相等：

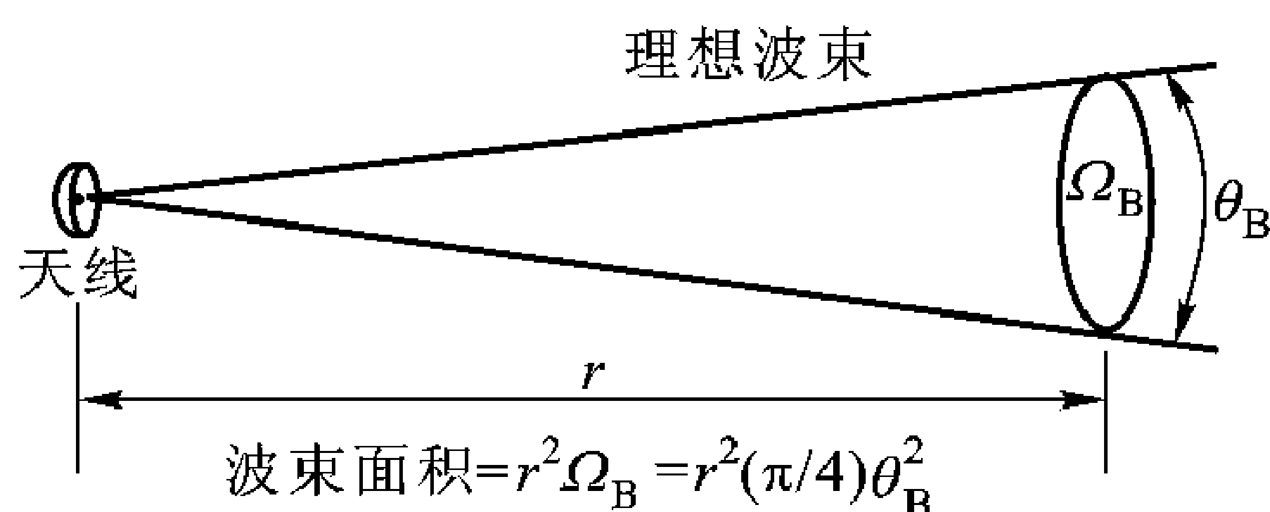


图 8－4　理想天线的辐射波束立体角 Ω_B 及波束宽度 θ_B

$$G=G_D=\frac{4\pi}{\Omega_B} \tag{8.1.3}$$

（2）波束宽度

实际天线的辐射功率有时并不限制在一个波束中，在一个波束内也非均匀分布。在波束中心辐射强度最大，偏离波束中心，辐射强度减小。辐射强度减小到 3 dB 时的立体角即定义为 Ω_B。波束宽度 θ_B（见图 8－3），与立体角 Ω_B 关系为

$$\Omega_B=\frac{\pi}{4}\theta_B^2 \tag{8.1.4}$$

例 8-1 天线增益 44 dB，假定波束截面为圆，求波束宽度 θ_B。

解： 增益 G 为

$$G = 10^{44/10} = 2.51 \times 10^4$$

从式(8.1.3)得到

$$\Omega_B = \frac{4\pi}{2.51 \times 10^4} = 5 \times 10^{-4} \quad (\text{球面度})$$

$$\theta_B = \sqrt{4/\pi}\ \sqrt{\Omega_B} = 0.025\ \text{rad} = 1.45°$$

例 8-2 距地球 36 000 km 同步轨道上的卫星，发射天线波束宽度为 0.1°，该天线波束辐射到地球上面积有多大？

解： 波束宽度为

$$\theta_B = \frac{\pi}{180°} \times 0.1° = 1.745 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

由式(8.1.4)得

$$\Omega_B = \frac{\pi}{4} \times (1.745 \times 10^{-3})^2 = 2.35 \times 10^{-6} (\text{球面度})$$

天线波束照射面积为

$$A_{spot} = 2.35 \times 10^{-6} (36\ 000 \times 10^3)^2\ \text{m}^2 = 3.10 \times 10^9\ \text{m}^2$$

(3) 旁瓣电平

旁瓣电平是指离主瓣最近且电平最高的第一旁瓣电平，一般以分贝表示。方向图的旁瓣区一般是不需要辐射的区域，其电平应尽可能的低。

2. 天线效率

天线效率定义为天线辐射功率与输入功率之比，记为 η_A，即

$$\eta_A = \frac{P_\Sigma}{P_i} = \frac{P_\Sigma}{P_\Sigma + P_l} \tag{8.1.5}$$

式中，P_i 为输入功率，P_l、P_Σ 分别为损耗功率与天线辐射功率，$P_i = P_\Sigma + P_l$。天线的辐射电阻 R_Σ 常用来衡量天线辐射功率的能力。天线的辐射电阻是一个虚拟的量，定义如下：设有一个电阻 R_Σ，当通过它的电流等于天线上的最大电流 I_m 时，其损耗的功率就等于辐射功率。显然，辐射电阻的高低是衡量天线辐射能力的一个重要指标，即辐射电阻越大，天线的辐射能力越强。

由上述定义得到辐射电阻与辐射功率的关系为

$$P_\Sigma = \frac{1}{2} I_m^2 R_\Sigma \tag{8.1.6}$$

即辐射电阻为

$$R_\Sigma = \frac{2P_\Sigma}{I_m^2} \tag{8.1.7}$$

仿照引入辐射电阻的办法，损耗电阻 R_1 为

$$R_1 = \frac{2P_1}{I_m^2} \tag{8.1.8}$$

将上述两式代入式(8.1.5)得天线效率为

$$\eta_A = \frac{R_\Sigma}{R_\Sigma + R_1} = \frac{1}{1 + R_1/R_\Sigma} \tag{8.1.9}$$

可见，要提高天线效率，应尽可能提高 R_Σ，降低 R_1。

3. 极化特性

极化特性是指天线在最大辐射方向上电场矢量的方向随时间变化的规律。具体地说，就是在空间某一固定位置上，电场矢量的末端随时间变化所描述的图形。按天线所辐射的电场的极化形式，可将天线分为线极化天线、圆极化天线和椭圆极化天线。线极化又可分为水平极化和垂直极化；圆极化和椭圆极化都可分为左旋和右旋。当圆极化波入射到一个对称目标上时，反射波是反旋向的。在传播电视信号时，利用这一特性可以克服由反射所引起的重影。一般来说，圆极化天线难以辐射纯圆极化波，其实际辐射的是椭圆极化波，这对利用天线的极化特性实现天线间的电磁隔离是不利的，所以对圆极化通常又引入椭圆度参数。

在通信和雷达中，通常是采用线极化天线；但如果通信的一方是剧烈摆动或高速运动着的，为了提高通信的可靠性，发射和接收都应采用圆极化天线；如果雷达是为了干扰和侦察对方目标，也要使用圆极化天线。另外，在人造卫星、宇宙飞船和弹道导弹等空间遥测技术中，由于信号通过电离层后会产生法拉第旋转效应，因此其发射和接收也采用圆极化天线。

4. 频带宽度

天线的电参数都与频率有关，也就是说，上述电参数都是针对某一工作频率设计的。当工作频率偏离设计频率时，往往要引起天线参数的变化，例如主瓣宽度增大、旁瓣电平增高、增益系数降低、输入阻抗和极化特性变坏等。实际上，天线也并非工作在点频，而是有一定的频率范围。当工作频率变化时，天线的有关电参数不应超出规定的范围，这一频率范围称为频带宽度，简称为天线的带宽。

5. 输入阻抗

要使天线效率高，就必须使天线与馈线良好匹配，也就是要使天线的输入阻抗等于传输线的特性阻抗，这样才能使天线获得最大功率。注意天线的输入阻抗与天线辐射电阻的区别。天线辐射电阻用天线上的最大电流 I_m 定义(见式8.1.7)，而天线的输入阻抗与所取的参考面有关。如果以微波功率经传输线(包括各类波导)馈入天线的点为参考面，则天线的输入阻抗可以用馈入点的电

流 I_{ref}或电压 V_{ref}定义，对应的天线阻抗分别为$\dfrac{2P_{\Sigma}}{I_{\mathrm{ref}}^2}$，$\dfrac{V_{\mathrm{ref}}^2}{2P_{\Sigma}}$。$V_{\mathrm{ref}}$、$I_{\mathrm{ref}}$定义为所取参考面电场或磁场的积分。

天线的输入阻抗对频率的变化往往十分敏感，当天线工作频率偏离设计频率时，天线与传输线的匹配变坏，致使传输线上电压驻波比增大，天线效率降低。因此在实际应用中，还引入电压驻波比参数，并且驻波比不能大于某一规定值。

第3章已指出利用互易定理可以证明天线具有互易性，即天线在发射模式和接收模式具有相同的方向性。如果一给定天线工作在发射模式，A方向辐射电磁波的能力比B方向强100倍，那么该天线工作于接收模式时，接收A方向辐射来的电磁波灵敏度比B方向也强100倍。图8-2中列举的天线都具有互易性。本章以后讨论的天线都是互易的。

如果所观测点离开波源很远，波源可近似为点源。从点源辐射的波其波阵面是球面。因为观测点离开点源很远很远，在观察者所在的局部区域，其波阵面可近似为平面，当作平面波处理。符合这一条件的场通常称为远区场。在很多天线应用场合，远区场的假设都是成立的。远区场假设为我们分析研究天线辐射的场带来很大方便。这里所谓很远很远都是以波长来计量的。

8.2 标量和矢量位函数及其解

电磁波是由交变电流和交变电荷激发的。研究由源激发的场必须从有源麦克斯韦方程出发：

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{8.2.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{8.2.2}$$

这里 $\boldsymbol{J}$ 是产生电磁场的源。如果 $\boldsymbol{J}$ 已知，通过解麦克斯韦方程可求得 $\boldsymbol{E}$ 和$\boldsymbol{H}$。麦克斯韦方程也可通过求解标量位函数 $\varPhi$ 和矢量位函数 $\boldsymbol{A}$ 进行。本节先给出如何用位函数 $\boldsymbol{A}$ 和 $\varPhi$ 表示场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$，然后给出位函数 $\boldsymbol{A}$ 跟 $\varPhi$ 满足的微分方程及其解。

矢量位 $\boldsymbol{A}$ 定义为

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{8.2.3}$$

因为旋度的散度等于零，按式(8.2.3)定义 $\boldsymbol{B}$，麦克斯韦方程$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$，自动得到满足。因为 $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$，将式(8.2.3)定义的 $\boldsymbol{B}$ 代入式(8.2.1)得到

$$\nabla \times (\boldsymbol{E} + \mathrm{j}\omega\boldsymbol{A}) = 0 \tag{8.2.4}$$

因为梯度的旋度等于零，我们选用下式定义标量位函数 $\varPhi$

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\boldsymbol{A} - \nabla\varPhi \tag{8.2.5}$$

$\nabla\Phi$ 前取负号是考虑到静电场中电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与电位 Φ 之间关系。

按式(8.2.3)、(8.2.5)定义的 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 满足麦克斯韦方程组中的二个方程，但是式(8.2.5)定义的 $\boldsymbol{A}$ 并不是惟一的。因为如果我们定义另一个矢量位函数 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\psi$，$\psi$ 是一个任意的标量函数，由于梯度的旋度等于零，所以 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}'=\nabla\times\boldsymbol{A}$，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 定义了同一个 $\boldsymbol{B}$，为保证矢量位 $\boldsymbol{A}$ 惟一，有必要对矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 作一规定：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\Phi=0 \tag{8.2.6}$$

这个规定叫洛伦兹条件，是从相对论原理得出的，具体推导本书从略，有兴趣的读者可参阅有关电磁理论的书。

将式(8.2.3)、(8.2.5)代入式(8.2.2)，并利用本构关系 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，得到

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon(-\mathrm{j}\omega A-\nabla\Phi)+\mu\boldsymbol{J}$$

因为 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$，再应用洛伦兹条件，可得

$$\nabla^2\boldsymbol{A}+\omega^2\mu\varepsilon\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J} \tag{8.2.7}$$

将式(8.2.5)代入 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_v/\varepsilon$，再一次应用洛伦兹条件得到

$$\nabla^2\Phi+\omega^2\mu\varepsilon\Phi=-\rho_v/\varepsilon \tag{8.2.8}$$

式(8.2.5)和式(8.2.6)结合可得到用矢量位 $\boldsymbol{A}$ 表示的 $\boldsymbol{E}$

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\left(\boldsymbol{A}+\frac{\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}}{k^2}\right) \tag{8.2.9}$$

方程(8.2.7)、(8.2.8)包含 4 个标量方程，通常叫做非齐次亥姆霍兹方程。当边界趋于无穷远时，非齐次亥姆霍兹方程的解非常简单，又得到广泛的应用，即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{8.2.10}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho_v(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{8.2.11}$$

式中 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$，$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{r}'$ 分别表示观察点(即所研究场点)及源所在点的位置矢量。$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 即观察点与源点之间的距离，积分要覆盖所有源所在的区域(见图 8-5)。

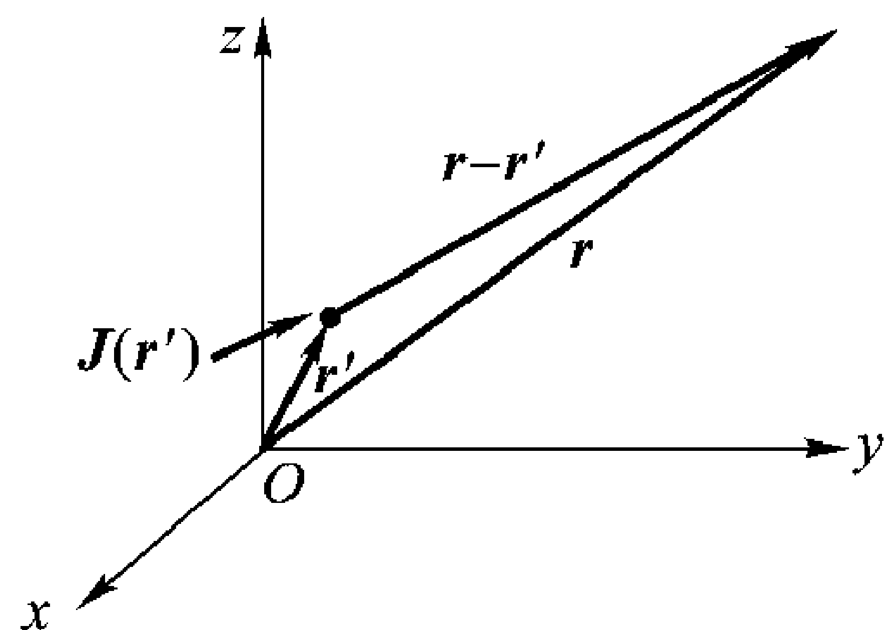


图 8-5　对 $\boldsymbol{r}'$ 处源 $\boldsymbol{J}$ 积分求观察点 $\boldsymbol{r}$ 处矢量位 $\boldsymbol{A}$

式(8.2.10)、(8.2.11)的解导出过程相同。对式(8.2.10)的解推导如下：
如果满足如下方程

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')+k^2 g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \tag{8.2.12}$$

的解格林函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 已知，则波方程 $(\nabla^2+$

$k^2)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\mu_0 \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$的解 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mu\int_{\infty} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \mathrm{d}V' \tag{8.2.13}$$

$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$定义为

$$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \begin{cases} 0 & (\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}') \\ \infty & (\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}') \end{cases}$$

$$\int_{V} f(\boldsymbol{r}') \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \mathrm{d}V' = \begin{cases} 0 & (\boldsymbol{r} \notin V') \\ f(\boldsymbol{r}) & (\boldsymbol{r} \in V') \end{cases} \tag{8.2.14}$$

现用 $\mu\boldsymbol{J}$ 乘式(8.2.12)两边，并作体积分

$$\nabla^2\int_{V'} \mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \mathrm{d}V' + k^2\int_{V'} \mu\boldsymbol{J}(r') g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \mathrm{d}V'$$

$$= -\int_{V'} \mu\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \mathrm{d}V'$$

$$= -\mu\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) \tag{8.2.15}$$

式(8.2.15)与式(8.2.7)相比较，就得到式(8.2.13)。

所以求矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的解已转化为求解满足方程(8.2.12)的格林函数 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$为了分析方便假定源在原点，即 $\boldsymbol{r}'=0$，上式成为

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{r}) + k^2 g(\boldsymbol{r}) = -\delta(\boldsymbol{r}) = -\delta(r) \qquad (r = |\boldsymbol{r}|) \tag{8.2.16}$$

利用球坐标中对称关系，$\dfrac{\partial}{\partial\varphi}=0$，$\dfrac{\partial}{\partial\theta}=0$，式(8.2.16)成为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}\right) + k^2 g = -\delta(r) \tag{8.2.17}$$

作变量替换

$$rg = u, \quad g = \frac{u}{r}, \quad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}/r - \frac{u}{r^2}$$

代入式(8.2.17)得到

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\left(\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}}{r} - \frac{u}{r^2}\right)\right] + k^2 u = 0 \qquad (r \neq 0)$$

对上式化简，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2} + k^2 u = 0$$

上式的解为

$$u = A\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} + B\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr} \tag{8.2.18}$$

所以

$$g = A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r} + B\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr}}{r} \tag{8.2.19}$$

$r \neq 0$ 区域没有任何源，同时只考虑从原点向外传播的波，不考虑任何向原点传播的波，则 $B=0$。所以

$$g(r) = A\frac{e^{-jkr}}{r} \tag{8.2.20}$$

常数 A 取 $\frac{1}{4\pi}$，当源不在原点，r 可用 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 代入，所以一般情况下 $g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 为

$$g(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{8.2.21}$$

将式(8.2.21)代入式(8.2.13)就得到式(8.2.10)。

所以如果源已知，不用直接求解麦克斯韦方程，而先从式(8.2.10)、(8.2.11)求矢量位 A 与标量位 Φ，然后根据式(8.2.5)、(8.2.3)求出 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$。利用式(8.2.9)也可直接从 $\boldsymbol{A}$ 求 $\boldsymbol{E}$。

本节最后对式(8.2.10)、(8.2.11)表示的意义作进一步的解释。式(8.2.10)、(8.2.11)的解实际上是源 $\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$、$\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}$ 与格林函数 $g(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}$ 的卷积。信号分析与系统课程告诉我们，如果已知线性系统的冲击响应 $h(t)$，当系统为 $f(t)$ 的信号激励时，其输出响应 $g(t)$ 就是 $h(t)$ 与 $f(t)$ 的卷积。

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \tag{8.2.22}$$

形式上式(8.2.10)、(8.2.11)与式(8.2.22)完全一样，在式(8.2.10)、(8.2.11)中，源 $\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 与 $\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}$、格林函数 $g(\boldsymbol{r})$、位函数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 与 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})$ 分别与激励信号 $f(t)$、冲击响应 $\boldsymbol{h}(t)$ 以及响应 $g(t)$ 相当。在信号分析课程中，冲击响应 $h(t)$ 就是当系统为 $\delta(t)$ 作用时的输出，而由式(8.2.16)可知，$g(\boldsymbol{r})$ 就是当点源 $\delta(\boldsymbol{r})$ 作用时系统的输出。因此，只要我们所研究的空间 ε、μ 是线性的，即麦克斯韦方程是线性的，那么天线辐射场满足叠加原理，源 $\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 与 $\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}$ 激励的场 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ 与 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r})$ 就是源 $\mu_0\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$ 与 $\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{\varepsilon}$ 与系统“冲击响应” $g(\boldsymbol{r})$ 的卷积。

8.3 电基本振子的辐射

8.3.1 电基本振子

电基本振子(也叫赫兹电偶极子)、磁基本振子(也叫赫兹磁偶极子)是最基

本的电磁辐射单元。工程中应用的众多天线都可分解为基本振子的组合。这两类基本振子具有对偶性，即知道了电基本振子辐射的场就可对偶地写出磁基本振子辐射的场。本节着重分析电基本振子辐射的场。

电基本振子是指一段有高频电流的短导线，见图 8－6（a），导线的直径 d 与波长相比可忽略，因而可用线电流模型近似。所谓短，是指其长度 Δl 与波长相比很小很小，即 $\Delta l/\lambda \ll 1$，并假定导线上各点电流的振幅和相位是相同的，即短导线上电流是均匀分布的。实际线天线上电流不是均匀分布的。如果我们把实际线天线分成 n 段，只要 n 足够大，每段长度比波长小得多，这样每一段上电流可视为均匀分布，就可看成是一个电基本振子。整个线天线辐射的场就是所有这些电基本振子辐射场的总和。所以电基本振子辐射场的分析是线天线工程计算的基础。

按照上面所说的电基本振子模型，要求电流分布在 Δl 长度内与空间坐标无关。这种模型表示的实际上是一个振荡偶极子。考察被 Δl 分开的两个储存电荷的小槽，见图 8－6（b），在 $t=0$ 时，这两个小槽各存储 $+q$ 与 $-q$ 电荷量，正负电荷的流动形成电流 I。在 $t=T/4$ 时，正负电荷运动的结果彼此刚好中和，两个小槽内的净电荷都为零。电荷继续运动的结果使两个小槽内储存电荷的极性改变；到 $t=T/2$，原先储存 $+q$ 的小槽正好为 $-q$ 电荷量填满，而原先储存 $-q$ 的小槽刚好被 $+q$ 电荷量填满；从 $t=T/2$ 到 T 又重复前面过程，但正负电荷运动方向改变，即电流方向改变；到 $t=T$，恢复到 $t=0$ 的状态。如此，以 T 为周期不断重复。

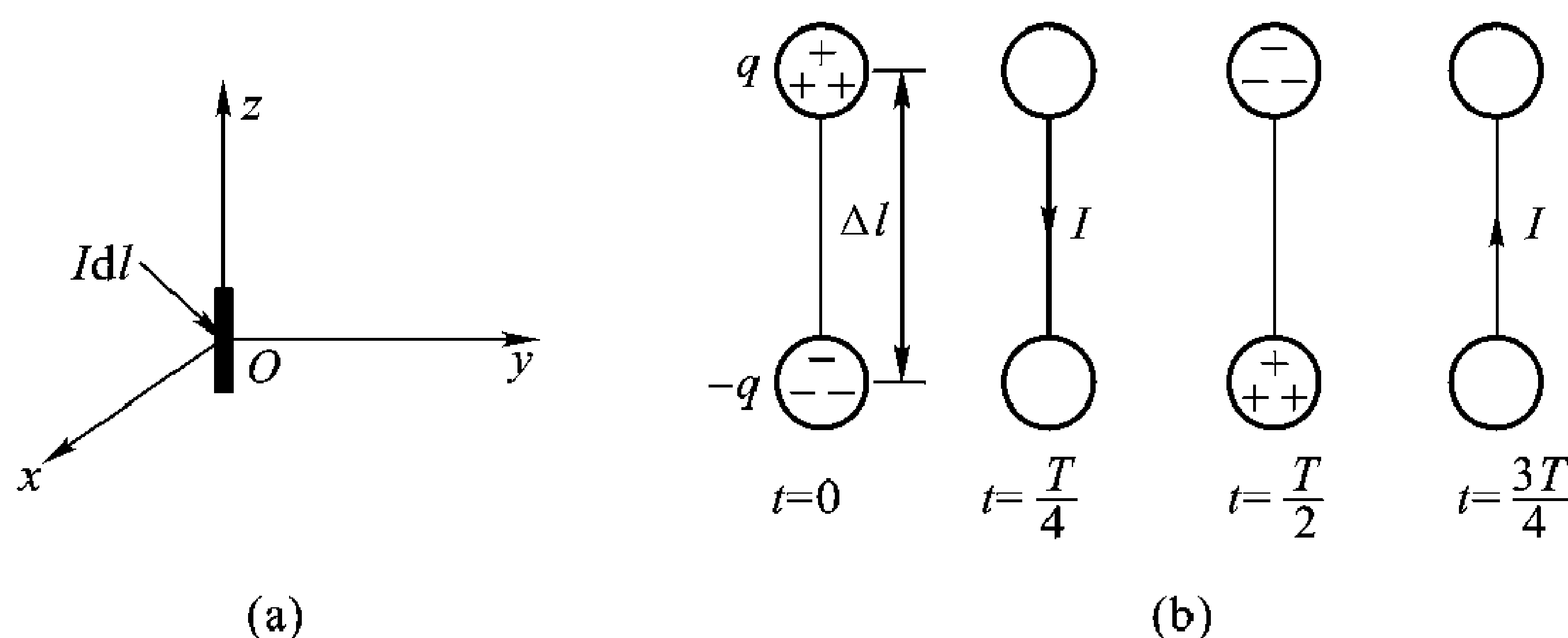


图 8－6 电基本振子与振荡赫兹偶极子

（a）电基本振子模型 （b）振荡赫兹偶极子

图 8－6（b）所示的模型就是振荡偶极子，其偶极矩定义为

$$\boldsymbol{P} = q\Delta \boldsymbol{l} \tag{8.3.1}$$

$\boldsymbol{P}$ 对时间导数就是 $I\Delta \boldsymbol{l}$

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t}\Delta \boldsymbol{l} = I\Delta \boldsymbol{l} = \mathrm{j}\omega \boldsymbol{P} \tag{8.3.2}$$

所以，电基本振子实际上就是振荡电偶极子。

8.3.2　电基本振子辐射的电磁场

为分析电基本振子辐射的电磁场，我们把电基本振子放到球坐标系的原点，偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 的方向与坐标轴 z 重合(见图 8-7)。为求电基本振子的辐射场 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$，先求式(8.2.10)表示的辅助矢量位 $\boldsymbol{A}$。显然，在电基本振子模型下，式(8.2.10)中

$$\Delta V'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') = I\Delta l\boldsymbol{z}_0 \tag{8.3.3}$$

因为电流源所占有空间 $\Delta V' = \Delta A\Delta l$，$\Delta A$ 为导线截面积，而 $J\Delta A = I$。因为这个无限小天线放在坐标原点，故 $\boldsymbol{r}' = 0$，由式(8.2.10)就得到电基本振子产生的矢量位

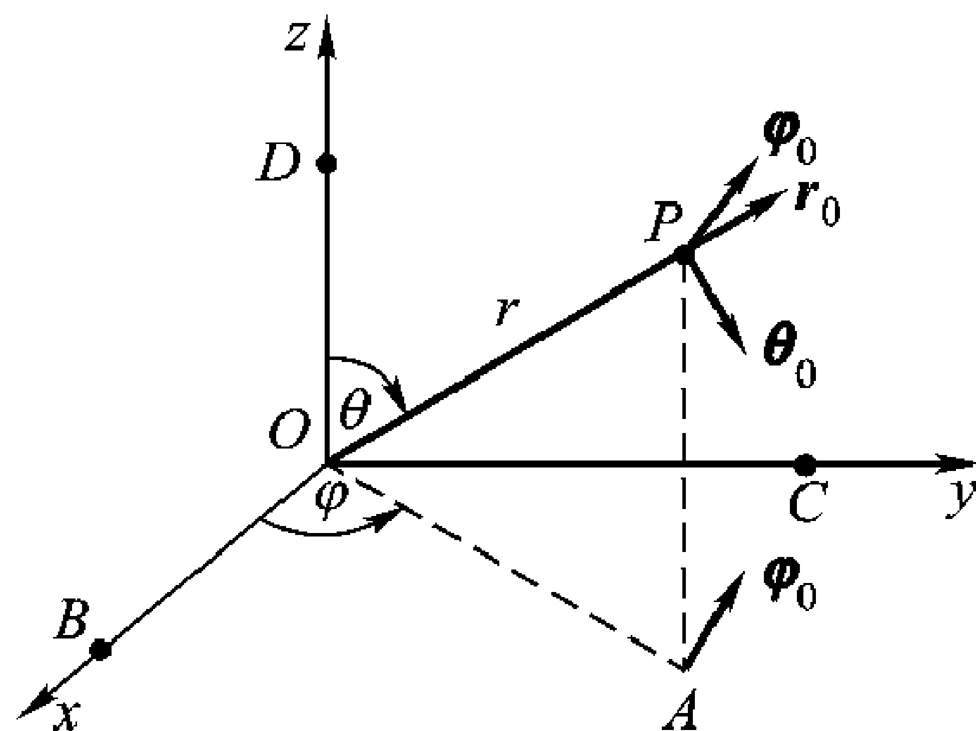


图 8-7　球坐标

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{z}_0 \frac{\mu I\Delta l \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r} \tag{8.3.4}$$

根据式(8.3.4)给出的 $\boldsymbol{A}$，利用式(8.2.3)计算磁场，要用到第 1 章讨论过的球坐标。

在球坐标系统，空间一点 P，可由 3 个坐标 r、θ 和 φ 表示：

r——坐标原点到 P 的长度 OP

θ——z 轴与 OP 的夹角

φ——OP 在 $x-y$ 平面投影 OA 与 x 轴夹角

球坐标中一矢量的方向可用 3 个单位矢量 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{\theta}_0$、$\boldsymbol{\varphi}_0$ 表示，它们分别表示在坐标 r、θ、φ 增加方向的单位矢量。

要记住球坐标与直角坐标系的区别，在球坐标系中单位矢量与所表示矢量的位置有关。如图 8-7，在点 B，$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{x}_0$，$\boldsymbol{\theta}_0 = -\boldsymbol{z}_0$，$\boldsymbol{\varphi}_0 = \boldsymbol{y}_0$，在 C 点，$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{y}_0$，$\boldsymbol{\theta}_0 = -\boldsymbol{z}_0$，$\boldsymbol{\varphi}_0 = -\boldsymbol{x}_0$，而在 D 点，$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{z}_0$。

在球坐标系矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度已在第 1 章给出，并重写如下

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{r}_0 + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\boldsymbol{\theta}_0 \\ &\quad + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{\varphi}_0 \\ &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{r}_0 & r\boldsymbol{\theta}_0 & r\sin\theta\boldsymbol{\varphi}_0 \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{8.3.5}$$

下面应用式(8.3.4)根据式(8.2.3)计算 $\boldsymbol{B}$，并记住 $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{r}_0\cos\theta - \boldsymbol{\theta}_0\sin\theta$，可得

$$\boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\varphi}_0\frac{\mathrm{j}kI\Delta l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\left(1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)\sin\theta \tag{8.3.6}$$

振子以外的区域，$J=0$，故由式(8.2.2)得到

$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\mathrm{j}kI\Delta l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\left\{\boldsymbol{r}_0\left[\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}\right]2\cos\theta+\boldsymbol{\theta}_0\left[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}\right]\sin\theta\right\} \tag{8.3.7}$$

所以磁场只有 φ 分量，围绕 z 轴旋转，电场在包含 z 轴的平面内，没有 φ 分量。

离开电基本振子很远处(以后简称远区)，即满足 $kr=2\pi r/\lambda>>1$ 条件处，将此条件代入式(8.3.6)、(8.3.7)略去高阶小量，就得到电基本振子远区的辐射场

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\varphi}_0\frac{\mathrm{j}kI\Delta l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\sin\theta \tag{8.3.8}$$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\theta}_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{\mathrm{j}kI\Delta l\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\sin\theta \tag{8.3.9}$$

注意其远区场与均匀介质中平面波场相似之处。将式(8.3.8)～(8.3.9)表示的电基本振子远区场与第 4 章讨论的平面波场比较，两者相似之处是：

(1) 电场、磁场和波传播方向三者相互垂直；

(2) 电场和磁场幅度之比均为媒质本征阻抗 $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$，大气中 $\eta\approx\eta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=377\ \Omega$。

但也有不同之处：

(1) 电基本振子产生的场按 $1/r$ 衰减，均匀平面波场是一常数；

(2) 电基本振子产生的场的场强是 θ 的函数，均匀平面波场强是常数；

(3) 电基本振子产生的场等相位面是球面，均匀平面波场等相位面是一平面；

(4) 电基本振子辐射场在半径方向波的速度为 $v=\omega/k$，而均匀平面波在一固定方向速度为 ω/k。

8.3.3　电基本振子的特性

辐射方向图

现在研究电基本振子远区场分布即远区的辐射方向图。由式(8.3.9)可得，电场 $\boldsymbol{E}$ 只有 θ 分量，其大小为

$$|E_\theta| = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\ \frac{k|I|\Delta l}{4\pi r}|\sin\ \theta|$$

所以当 $\theta=\pi/2$，$|E_\theta|$最大，当 $\theta=0$，$|E_\theta|=0$。图 8－8（a）、（b）分别给出天线轴（z 轴）所在平面（$z-x$ 平面）以及与天线轴垂直的 $y-x$ 平面辐射电场$|E_\theta|$的分布。此辐射方向图表示，电基本振子天线在 φ 方向没有方向性，在 z 轴所在的平面内，电矩 $\boldsymbol{p}$ 的方向没有辐射，与电矩 $\boldsymbol{p}$ 垂直的方向辐射最强。

在自由空间电基本振子辐射的时间平均功率流为

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right] = \boldsymbol{r}_0\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}|H_\varphi|^2 = \boldsymbol{r}_0\frac{\eta_0}{2}\left(\frac{k|I|\Delta l}{4\pi r}\right)^2\sin^2\theta \tag{8.3.10}$$

将$|E_\theta|$代入上式，得到

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle = \boldsymbol{r}_0\frac{1}{2\eta_0}|E_\theta|^2 \tag{8.3.11}$$

$\langle \boldsymbol{S}\rangle$在空间的辐射方向图见图 8－9。

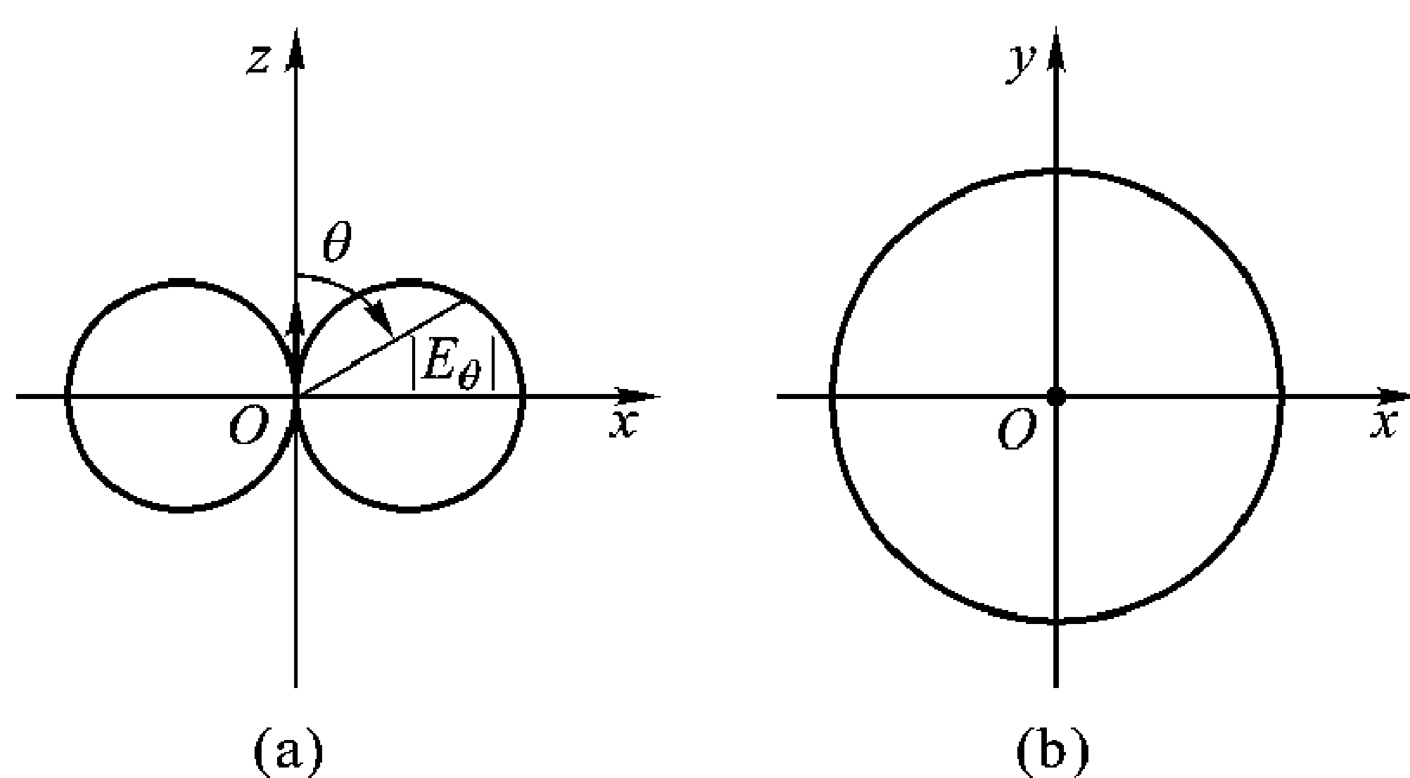


图 8－8　电基本振子辐射场方向图

（a）$x-z$ 平面　（b）$x-y$ 平面

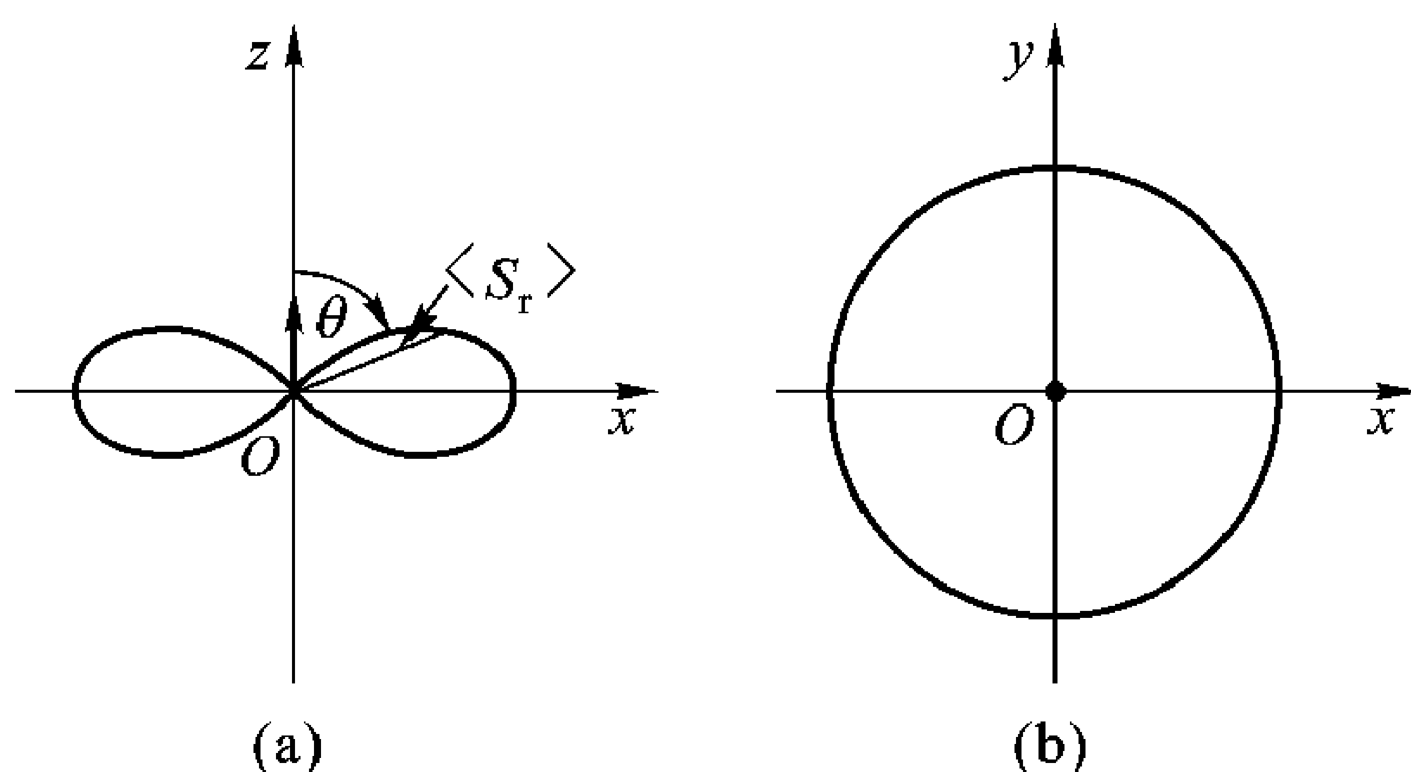


图 8－9　电基本振子的辐射功率方向图

（a）$x-z$ 平面　（b）$x-y$ 平面

天线增益

对式(8.3.10)在半径为 r 的球面上积分，即可求得电基本振子辐射的总功率

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta r^2 \sin\theta \langle S_r \rangle$$
$$= \frac{\eta_0}{2} \left| \frac{kI\Delta l}{4\pi} \right|^2 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin^3\theta = \frac{4\pi}{3}\eta_0 \left| \frac{kI\Delta l}{4\pi} \right|^2 \tag{8.3.12}$$

定义坡印廷功率密度$\langle S_r \rangle$(它是 θ 的函数)与半径 r 的球面上平均功率密度($P/4\pi r^2$)之比为天线的方向增益

$$G_D(\theta, \varphi) = \frac{\langle S_r \rangle}{P/4\pi r^2} = \frac{3}{2}\sin^2\theta$$

图 8-10 给出电基本振子的方向增益图。

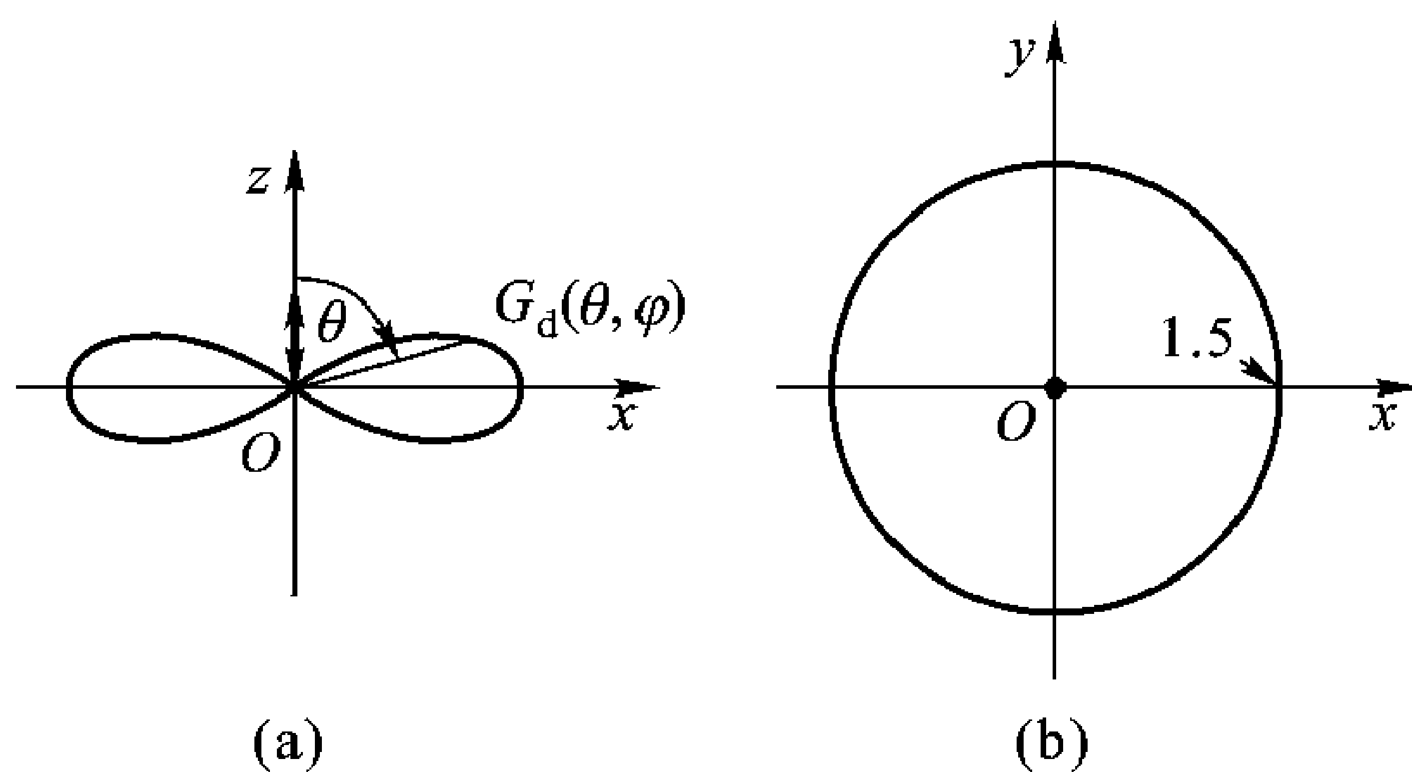


图 8-10 电基本振子方向增益图
(a) $x-z$ 平面 (b) $x-y$ 平面

所以在 $\theta = \pi/2$ 方向，增益为 1.5，$\theta = 0$，增益等于零。天线方向图中增益最大值就是天线的方向性 G_D，所以电基本振子方向性 $G_D = 1.5$。

有效面积与辐射电阻

根据式(8.3.12)以及前面关于天线辐射电阻 R_Σ 的定义，对于电基本振子，电流 I 对空间坐标是常数，故辐射功率与辐射电阻有如下关系

$$P = \frac{1}{2} I^2 R_\Sigma \tag{8.3.13}$$

由此可得

$$R_\Sigma = \frac{2P}{I^2} = \frac{\frac{8\pi}{3}\eta_0 \left| \frac{kI\Delta l}{4\pi} \right|^2}{I^2} = \frac{8\pi}{3}\eta_0 \left| \frac{k\Delta l}{4\pi} \right|^2 = \frac{2\eta_0}{3\lambda^2}\pi (\Delta l)^2 \tag{8.3.14}$$

自由空间 $\eta_0 = 120\pi$，代入上式得到

$$R_{\Sigma}=80\pi^2\frac{(\Delta l)^2}{\lambda^2} \tag{8.3.15}$$

电基本振子作为接收天线时，设其有效面积为 A_e，其接收功率为

$$P_R=A_eP_{波前} \tag{8.3.16}$$

$P_{波前}$为接收波束波阵面到达接收天线处的辐射功率密度，在长度为 Δl 的天线上感应的电压为

$$V=E\Delta l \tag{8.3.17}$$

其中 E 是入射波电场强度，方向与天线短线段相切。

参考图 8-11，当天线与负载阻抗共轭匹配时天线接收功率最大，即

$$Z_T=R_{\Sigma}-jX_A=Z_A^* \tag{8.3.18}$$

式中 X_A 是天线的等效电抗，天线与负载共轭匹配时，负载吸收功率

$$P_R=\frac{V^2}{4R_{\Sigma}}=\frac{E^2\ (\Delta l)^2}{4R_{\Sigma}}=A_eP_{av}=A_e\frac{E^2}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}} \tag{8.3.19}$$

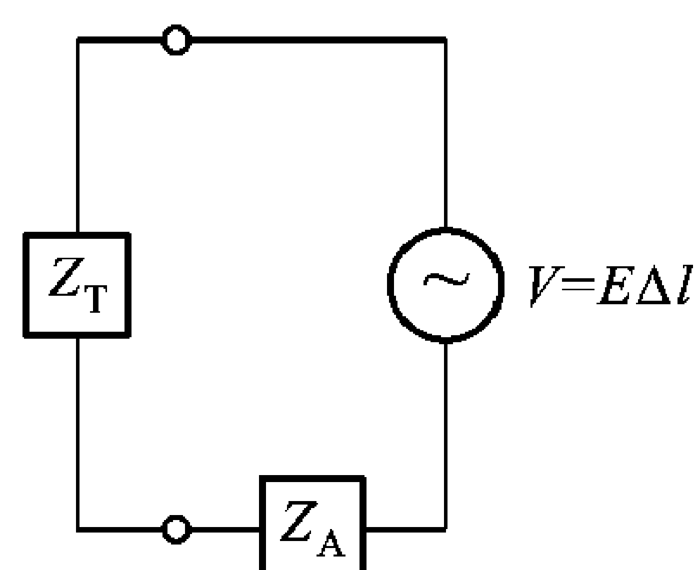


图 8-11 天线与负载共轭匹配时的等效电路

因为

$$R_{\Sigma}=\frac{\frac{2}{3}\pi\ (\Delta l)^2\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}}{\lambda^2}$$

所以由式(8.3.19)得到无损电基本振子有效面积 A_e 为

$$A_e=\frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}(\Delta l)^2\lambda^2}{4\left(\frac{2}{3}\pi\ (\Delta l)^2\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}\right)}=\frac{3\lambda^2}{8\pi} \tag{8.3.20}$$

因为 $G_D=3/2$，故得到

$$\frac{G_D}{A_e}=\frac{3/2}{(3/8\pi)\lambda^2}=\frac{4\pi}{\lambda^2}$$

所以

$$G_D=\frac{4\pi A_e}{\lambda^2} \tag{8.3.21}$$

或

$$G=\frac{4\pi A_e}{\lambda^2} \tag{8.3.22}$$

式(8.3.22)仅对天线无损时才成立。

式(8.3.21)、(8.3.22)是针对电基本振子这种特殊情况下导出的，但是对

于所有其他天线也是成立的，式(8.3.22)更常用。按照式(8.3.22)，天线增益G与天线有效面积A_e是等价的，知道其中一个量即可得出另一个量。显然，天线面积越大，有效面积也越大，但天线的增益与天线实际面积关系并非如此简单，因为天线增益还与波长有关。

电容平板天线

严格地说，有电流通过的一段很短的导线不能视作电流均匀分布的电基本振子，因为它只在短导线的两端电流必须降到零的情况下才成立。但对于图8－12所示的电容平板天线，在连接两电容平板的短线段上，电流几乎均匀，可视作常数。在上下两块平板上，电流都沿半径方向流动，方向却相反，一块板上电流指向圆心，另一块板上电流离开圆心。所以上下两块板在远区辐射场相互抵消。这就是说对于电容平板天线，远区辐射场主要由连接电容板的短线段上流过的电流产生，而短线段上的电流可视为均匀分布。所以电容平板天线可视作电基本振子。

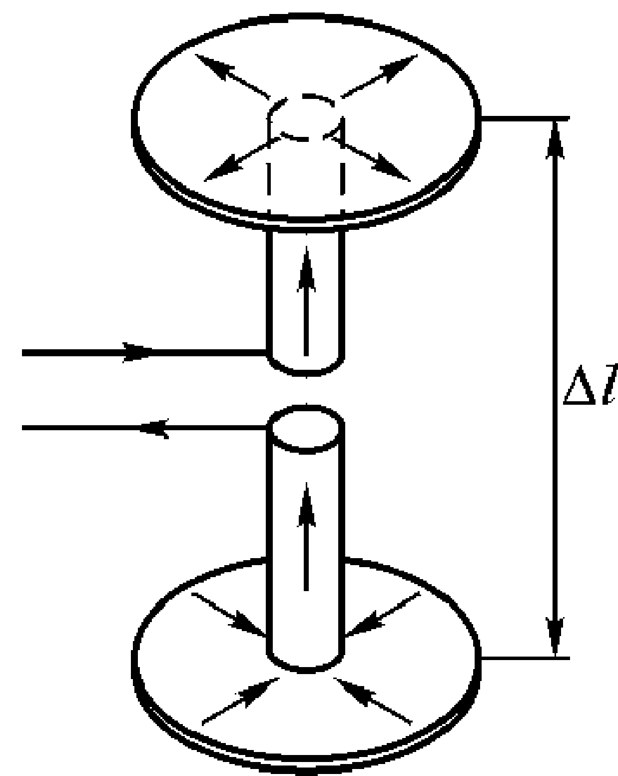


图8－12　电容平板天线

例8－3　计算电容平板天线辐射的总功率，假定该天线辐射的调幅波频率1 MHz，$\Delta l = 1$ m，短线半径0.3 cm，电流$I = 1$ A。

解：先计算波长

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times 10^8}{10^6} = 300\ \text{m}$$

所以该天线长度Δl与波长λ之比为1/300，半径a与波长之比为$a/\lambda = 1\times 10^{-5}$，都比波长短得多，可以用式(8.3.12)进行计算

$$P_t = \frac{120\pi \times (2\pi/300)^2}{12\pi} = 4.39\ \text{mW}$$

例8－4　假定发射天线为一垂直于地面的电基本振子，离开发射天线5 km处有一个手持接收机的人，问此人至少移动多少距离(水平方向和垂直方向)接收机检测的讯号将有3 dB变化？

解：设天线所在点为原点，如果此人在地面沿半径方向离开发射天线，根据式(8.3.9)，$\theta = 90°$，可得

$$\left|\frac{E(r')}{E(5\,000)}\right| = \frac{5\,000}{r'}$$

$\left|\dfrac{E(r')}{E(5\,000)}\right|$用分贝表示时为$20\lg\left|\dfrac{5\,000}{r'}\right|$，使之等于$-3$ dB，即

$$20\lg\left|\frac{5\ 000}{r'}\right| = -3\ \text{dB}$$

得到

$$r' = 7\ 070\ \text{m}$$

如果此人在地面离天线 5 000 m 处垂直上升到 h，检测到讯号衰减 3 dB，则此时 $r'=\sqrt{5\ 000^2+h^2}$，$\sin\theta'=5\ 000/r'$，由

$$20\lg\left|\frac{E(r',\theta')}{E(5\ 000,\theta=90^\circ)}\right| = 20\lg\left|\frac{5\ 000\sin\theta'}{r'\sin 90^\circ}\right| = -3\ \text{dB}$$

可得

$$h = 3\ 211\ \text{m}$$

8.4　磁基本振子的辐射、电振子与磁振子的对偶性

磁基本振子就是理想的磁偶极子。任何载流细导线回路 L 都可看成一个磁偶极子。注意回路 L 不能翘曲，即回路 L 应该是某任意平面内的闭合曲线。当 L 趋于零，就过渡到理想磁偶极子。本节讨论的磁基本振子如图 8－13，是一个在 $x-y$ 平面上半径为 a 的细导线小圆环。导线的线径可忽略，导线上电流可用线电流近似。圆环上载有高频时谐电流 $i(t)=\mathscr{I}_m\cos(\omega t+\varphi)$，故其复数表示是 $I=\mathscr{I}_m e^{j\varphi}$，圆环半径 a 比波长 λ 小得多，即 $a \ll \lambda$，故可假定圆环上任何地方电流的振幅和相位处处相等。该磁基本振子的偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 定义为

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{S} = IS\boldsymbol{z}_0 \tag{8.4.1}$$

I 是复数表示的电流，$\boldsymbol{S}$ 是回路 L 的有向面积，如果右手四指与电流方向一致，大拇指方向即 $\boldsymbol{S}$ 的方向。在图 8－13 中，因为 $\boldsymbol{S}$ 在 $x-y$ 平面，且逆时针转，故 $\boldsymbol{S}$ 的方向就是坐标轴 z 的正方向 $\boldsymbol{z}_0$。

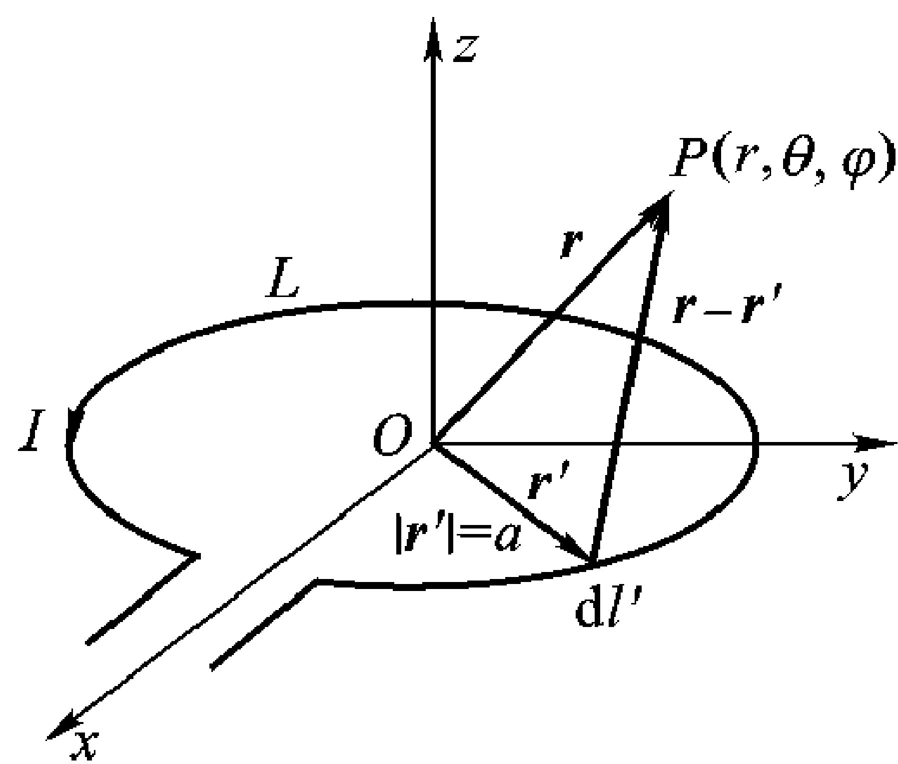


图 8－13　磁基本振子

与分析电基本振子 $\boldsymbol{p}$ 辐射的电磁场一样，若求图 8－13 所示的磁基本振子 $\boldsymbol{m}$ 辐射的电磁场可以先求出 $\boldsymbol{m}$ 产生的矢量位 $\boldsymbol{A}$，然后求 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{E}$。

根据图 8－13，式(8.2.10)中的 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$ 简化为 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'$，故 $\boldsymbol{m}$ 产生的矢量位 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu I}{4\pi}\oint_L \frac{e^{jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \tag{8.4.2}$$

令

$$g(r) = \frac{e^{-jkr}}{r} \tag{8.4.3}$$

所以式(8.4.2)可写成

$$A(r)=\frac{\mu I}{4\pi}\oint_L g(|r-r'|)\mathrm{d}l' \tag{8.4.4}$$

根据矢量分析

$$g(|r-r'|)=g(r)-r'\cdot\nabla g(r)+\cdots$$

又因

$$\oint_L \mathrm{d}l'=0$$

所以

$$A(r)=\frac{\mu I}{4\pi}\oint -r'\cdot\nabla g(r)\mathrm{d}l' \tag{8.4.5}$$

而

$$r'=a\rho_0=a(x_0\cos\varphi'+y_0\sin\varphi')$$
$$\mathrm{d}l'=\mathrm{d}r'=\varphi'_0 a\mathrm{d}\varphi'=a(-x_0\sin\varphi'+y_0\cos\varphi')\mathrm{d}\varphi'$$
$$\nabla g(r)=r_0\left(-\mathrm{j}k-\frac{1}{r}\right)g(r)$$
$$-r'\cdot\nabla g=\rho'_0\cdot r_0\left(\mathrm{j}ka+\frac{a}{r}\right)g(r)$$
$$\rho'_0\cdot r_0=\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')$$

于是式(8.4.5)简化为

$$\begin{aligned}A(r)&=\frac{\mu Ia^2}{4\pi}\left(\mathrm{j}k+\frac{1}{r}\right)g(r)\sin\theta\int_{-\pi}^{\pi}(-x_0\sin\varphi'+y_0\cos\varphi')\cos(\varphi-\varphi')\mathrm{d}\varphi'\\&=\frac{\mu Ia^2}{4\pi}\left(\mathrm{j}k+\frac{1}{r}\right)g(r)\sin\theta\cdot\pi(-x_0\sin\varphi+y_0\cos\varphi)\\&=\varphi_0\frac{\mu IS}{4\pi}\left(\mathrm{j}k+\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\sin\theta\end{aligned} \tag{8.4.6}$$

式中 $S=\pi a^2$ 为环的面积。考虑到关系式 $z_0\times r_0=\varphi_0\sin\theta$，并利用式(8.4.1)，很容易写出 A 的一般表达式为

$$A(r)=\frac{1+\mathrm{j}kr}{4\pi r^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}m\times r \tag{8.4.7}$$

将式(8.4.6)代入式(8.2.3)得到

$$H=\frac{\nabla\times A}{\mu}=\nabla\times\left[\varphi_0\frac{IS}{4\pi}\left(\mathrm{j}k+\frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\sin\theta\right]$$

即

$$H=-\frac{ISk^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\left\{r_0\left[\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}\right]2\cos\theta+\theta_0\left[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}\right]\sin\theta\right\} \tag{8.4.8}$$

因为小电流环上的电流处处等幅同相，环本身又构成闭合回路，不会造成

电荷的宏观堆积，故小电流环产生的标量位 $\Phi\equiv 0$，这样将式(8.4.6)代入式(8.2.5)就可得到电场强度

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\varphi}_0\eta\frac{ISk^2}{4\pi}\left(1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\sin\theta \tag{8.4.9}$$

将式(8.4.9)、(8.4.8)与式(8.3.6)、(8.3.7)比较，函数结构完全相同，区别仅在于常数因子，因为电基本振子实际上就是振荡偶极子，根据式(8.3.2)有

$$I\Delta l z_0=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{p}$$

仿此，磁基本振子(载流细导线圆环)可等效为相距 Δl，两端磁荷分别为 $+q_{\mathrm{m}}$ 和 $-q_{\mathrm{m}}$ 的磁偶极子，其偶极距

$$\boldsymbol{m}=q_{\mathrm{m}}\Delta\boldsymbol{l}=q_{\mathrm{m}}\Delta l z_0=ISz_0 \tag{8.4.10}$$

由此得到磁基本振子的磁流

$$i_{\mathrm{m}}=\frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t}=\frac{S}{\Delta l}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{S}{\Delta l}\frac{\mathrm{d}\left[\mathscr{I}_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\varphi)\right]}{\mathrm{d}t},$$

其对应的磁流复量为

$$I_{\mathrm{m}}=\mathrm{j}\omega\frac{S}{\Delta l}I\ \left(I=\mathscr{I}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\right) \tag{8.4.11}$$

如果定义磁偶极子对应的磁流元为 $I_{\mathrm{m}}\Delta l$，那么它与电流环关系为

$$I_{\mathrm{m}}\Delta l=\mathrm{j}\omega SI$$

或

$$IS=\frac{I_{\mathrm{m}}\Delta l}{\mathrm{j}\omega}=\frac{(\mu I_{\mathrm{m}})\Delta l}{\mathrm{j}k\eta}$$

式中 $\eta=\sqrt{\mu/\varepsilon}$。如将上式代入式(8.4.8)、(8.4.9)得到

$$\boldsymbol{H}=\mathrm{j}k\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\mu I_{\mathrm{m}})\Delta l\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\left\{\boldsymbol{r}_0\left[\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}\right]2\cos\theta+\boldsymbol{\theta}_0\left[1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}+\frac{1}{(\mathrm{j}kr)^2}\right]\sin\theta\right\} \tag{8.4.12}$$

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\varphi}_0\mathrm{j}k(\mu I_{\mathrm{m}})\Delta l\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\left(1+\frac{1}{\mathrm{j}kr}\right)\sin\theta \tag{8.4.13}$$

将式(8.3.6)与式(8.4.13)，式(8.3.7)与(8.4.12)比较，如果将电基本振子的辐射场 $\boldsymbol{H}\to-\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{H}$，且将 $\mu\to\varepsilon$，$\varepsilon\to\mu$，$I\to(\mu I_{\mathrm{m}})$(或 $p\to\mu m$，其中 p 为电偶极矩，m 为磁偶极矩)，就得到磁基本振子的辐射场。电基本振子与磁基本振子这一对偶关系是电磁对偶性的具体例子。

有必要说明一下，本书磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$ 定义为 $\boldsymbol{m}=ISz_0$，有些书上 $\boldsymbol{m}$ 定义为 $\boldsymbol{m}=\mu ISz_0$。如果 $\boldsymbol{m}$ 定义为 $\boldsymbol{m}=\mu ISz_0$，那么式(8.4.12~13)中 (μI_{m}) 为 I_{m} 代替，电偶极子与磁偶极子对偶关系中 $I\to(\mu I_{\mathrm{m}})$ 为 $I\to I_{\mathrm{m}}$ 代替。

8.5 线天线

横向尺寸远小于纵向尺寸并小于波长的细长结构的天线称为线天线。它们广泛地应用于通信、雷达等无线电系统中。对电振子天线的分析可知，增加天线长度即可增加天线总辐射功率，但是要记住只有当天线长度 Δl 比波长 λ 小得多，即 $\Delta l \ll \lambda$ 时式(8.3.12)才成立。当 $\Delta l/\lambda > 0.1$ 时，无论计算辐射总功率的式(8.3.12)还是计算辐射场的式(8.3.8)~(8.3.9)不再适用。但电基本振子的分析结果仍可以作为分析线天线的基础。因为实际线天线可分解为多个电基本振子的组合。本节主要讨论线天线长度大于 0.1λ 时天线的辐射场。需要说明的是，无论是8.3节还是本节，天线的半径 a 都不在公式中出现，这实际上假定天线半径 a 比波长 λ 小得多。如果天线半径 a 与波长 λ 之比 $a/\lambda < 0.01$，有关天线公式中忽略天线半径 a 的影响是许可的。下面分析中，$a/\lambda < 0.01$ 的假定都是满足的。

图8-14(a)所示的线天线，振荡源从 $z=0$ 处接入，天线下端点坐标为 $z=-h_1$，上端点坐标为 $z=h_2$，天线长度 $l=h_1+h_2$ 与波长相比拟，因此沿天线电流分布将是 z 的函数，记作 $I(z)$。

为计算有限长度线天线的辐射场，将有限长度天线分成多个长度为 Δl 的子单元，整个天线的辐射场就是众多子单元辐射场的总和。只要子单元数足够多，每一个子单元 $\Delta l/\lambda < 0.1$ 的条件都得到满足，那么其辐射场都可用式(8.3.8)~式(8.3.9)计算。对于图8-14(b)的一个典型子单元，在自由空间其辐射场 $\Delta \boldsymbol{E}$ 为

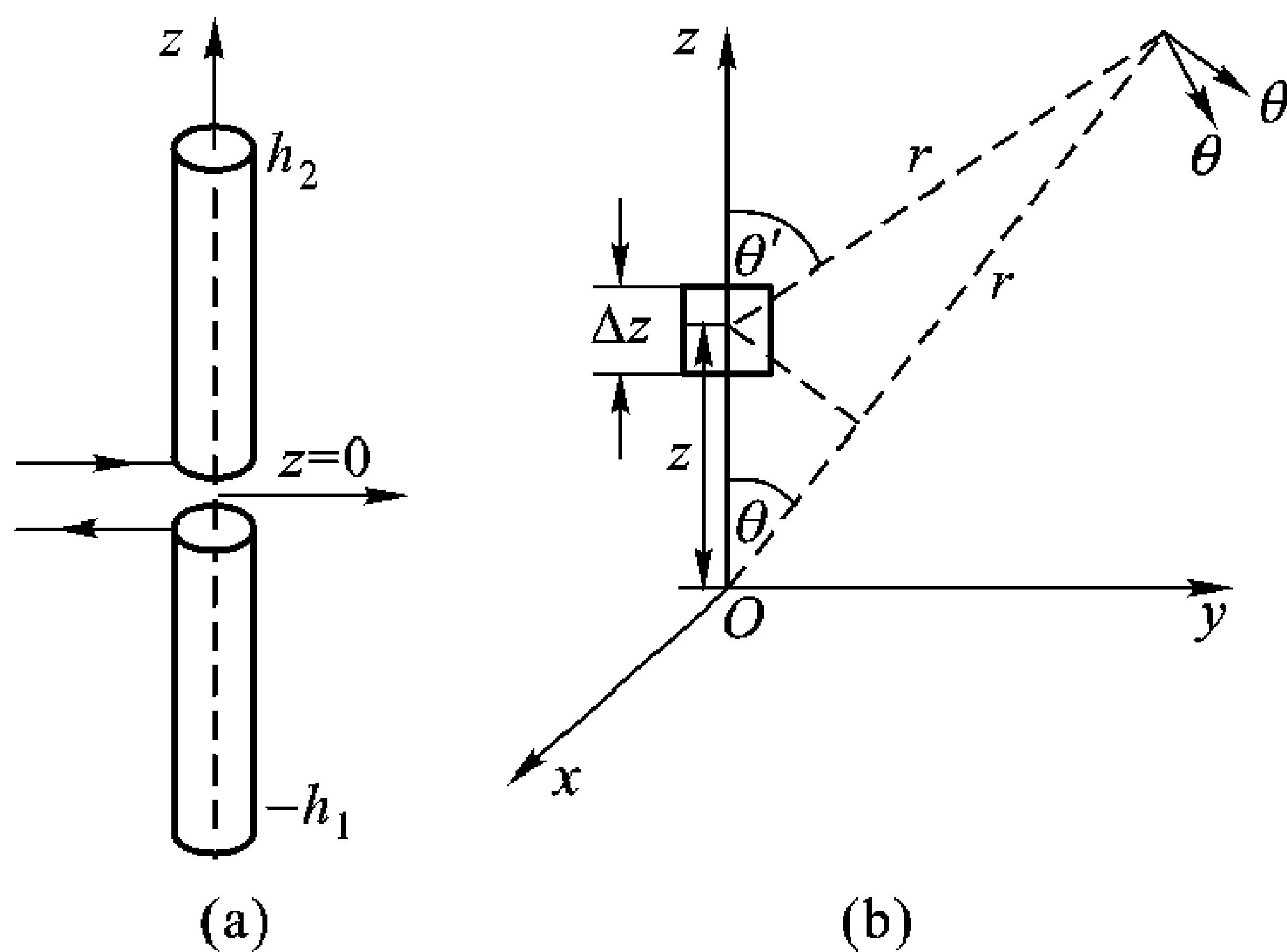


图8-14 线天线

(a) 有限长度的偶极天线

(b) 天线一个小单元的辐射

$$\Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\theta}'_0 \frac{\mathrm{j} I k \Delta l \eta_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr'} \sin\theta'}{4\pi r'} \tag{8.5.1}$$

在远区，r 比天线长度大得多，可作如下近似

$$\theta \approx \theta' \tag{8.5.2a}$$

$$r' \approx r - z\cos\theta \tag{8.5.2b}$$

因此式(8.5.1)可近似为

$$\Delta \boldsymbol{E} = \boldsymbol{\theta}'_0 \frac{\mathrm{j} Ik\Delta l\eta_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}}{4\pi r}\sin\theta \tag{8.5.3}$$

因为天线沿 z 轴放置，所以 $\Delta l = \Delta z$。所有这些子单元辐射场的总和，即整个天线辐射的场为式(8.5.3)的积分

$$\boldsymbol{E} = \int_{-h_1}^{h_2} \boldsymbol{E}\mathrm{d}z = \boldsymbol{\theta}'_0 \int_{-h_1}^{h_2} \frac{\mathrm{j}kI\eta_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}}{4\pi r}\sin\theta\mathrm{d}z$$

$$= \boldsymbol{\theta}_0 \frac{\mathrm{j}k\eta_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\sin\theta U(\theta) \tag{8.5.4}$$

同理可得

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{\mathrm{j}k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\sin\theta U(\theta) \tag{8.5.5}$$

式中

$$U(\theta) = \int_{-h_1}^{h_2} I(z)\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}\mathrm{d}z \tag{8.5.6}$$

注意：得出式(8.5.4)～式(8.5.5)时，式(8.5.2b)的第二项 $z\cos\theta$ 在分母中被略去，但包含在分子指数项中的 $z\cos\theta$ 没有略去，因如果 $z\cos\theta$ 从 0 变化到 $\lambda/2$，$\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta}$就从 1 变到 -1，将使积分改变符号，对积分值有重要影响，故不能略去。

由式(8.5.4)～(8.5.5)可见，对于远区场线天线辐射场与电基本振子辐射场在圆周方向(φ 方向)都以天线轴对称，没有变化。在 θ 方向，电基本振子天线按 $\sin\theta$ 变化，天线轴的方向 $\theta=0$ 没有辐射，与天线垂直的方向，$\theta=90°$，辐射最强。线天线在 θ 方向场变化则在电基本振子天线基础上乘上修正因子 $U(\theta)$。

8.5.1 短振子天线

短振子天线的长度 l 比波长小得多，即 $l \ll \lambda$。与电基本振子的不同是，电流由中间最大值 I 线性地递降到端点的零，见图 8－15 (a)。其

$$I(z) = \begin{cases} I_0\left(1 - \dfrac{z}{h_2}\right) & (z \geqslant 0) \\ I_0\left(1 + \dfrac{z}{h_1}\right) & (z < 0) \end{cases} \tag{8.5.7}$$

应用式(8.5.6)以及 $k(h_1 + h_2) \ll 1$ 条件，得到

$$U(\theta) \approx \int_{-h_1}^{h_2} I(z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}I_0(h_1 + h_2)$$

所以用式(8.5.4)～(8.5.6)计算短振子天线的场与用式(8.3.8)～(8.3.9)计算的场，只要满足

$$\Delta l = h_1 + h_2$$

$$I=\frac{1}{2}I_0$$

两者计算结果就一致。

如果短振子天线与电容平板天线一样长，激励点电流相等，则电容平板天线辐射总功率为短振子天线的4倍。

因此，图8-15(a)所示的短振子天线可用图8-15(b)表示的电基本振子天线或图8-15(c)表示的电容平板天线等效，但图8-15(b)、8-15(c)两种天线上流过的电流为$I_0/2$。

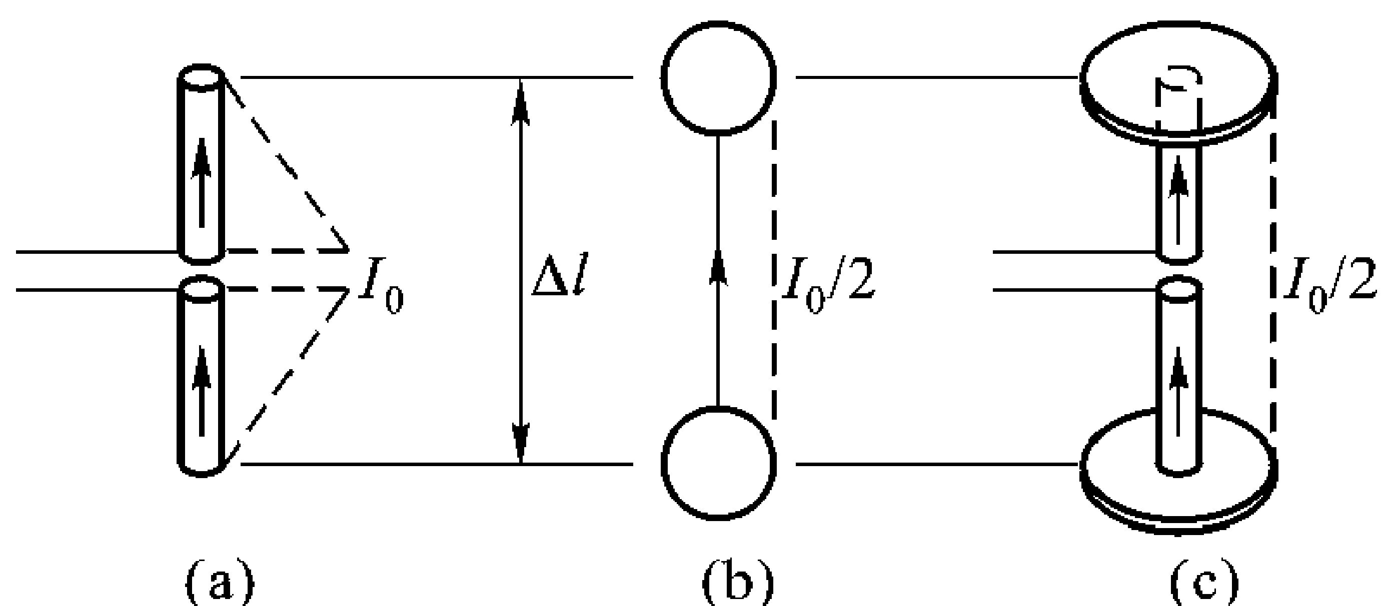


图8-15　短振子天线可用电基本振子、电容平板天线等效
(a) 短振子天线　(b) 电基本振子
(c) 电容平板天线

8.5.2　中心激励半波振子天线

$h_1=h_2=\lambda/4$的振子天线叫做中心激励半波振子。作为辐射电磁能的单元，它得到广泛应用，假定其上的电流按余弦分布，有

$$I(z)=I_0\cos(kz) \quad (8.5.8)$$

所以半波振子可以看成由末端开路的平行双导线构成的传输线的演变。图8-16(a)是由正弦信号源激励的平行双导线，其末端开路。按传输线理论，其上电流分布为余弦分布，末端电流为零。然后在离末端(即开路端)$\lambda/4$处将平行双导线向外折成如图8-16(b)，就构成半波振子。

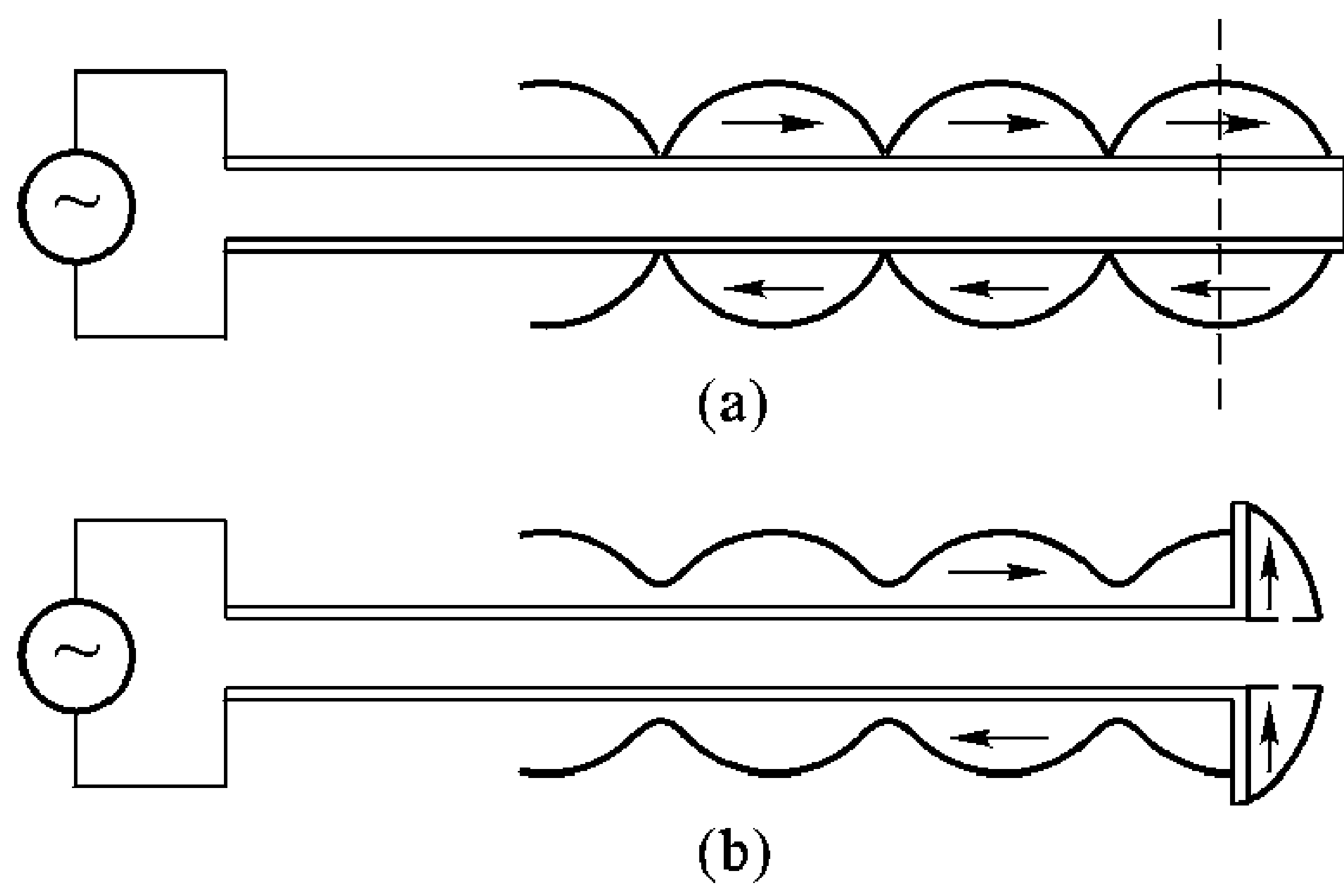


图8-16　从开路平行双导线到半波振子天线
(a) 开路平行双导线上电流分布
(b) 半波振子天线近似电流分布

对于开路的平行双导线[图8-16(a)]终端阻抗趋于无穷大，没有能量辐射，而对于半波振子[图8-16(b)]，有能量辐射，终端等效阻抗不再为无穷大。由于图8-16(a)和图8-16(b)两种情况下终端负载的不同，平行双导线上电流分布也不同。但是对于向外弯折的$\lambda/4$部分，其电流仍可假定为余弦分布。对于辐射功率的计算，式(8.5.8)的假定是可接受的。按式(8.5.8)的电流分布，从式(8.5.6)可计算$U(\theta)$。

$$U(\theta) = \frac{I_0}{k}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}(kz)\cos(kz)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta} = \frac{2I_0\cos\left(\frac{1}{2}\pi\cos\theta\right)}{k\sin^2\theta} \tag{8.5.9}$$

以及时间平均坡印廷功率流

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{I_0^2\eta_0\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\cos\theta\right)}{8\pi^2 r^2\sin^2\theta}\boldsymbol{r}_0 \tag{8.5.10}$$

总的辐射功率

$$P_{\mathrm{t}} = \frac{I_0^2\eta_0 \mathrm{Cin}(2\pi)}{8\pi} \tag{8.5.11}$$

式中 $I_0 = |I|$，函数 Cin (z) 定义为 Cin $(z) = \int_0^z [(1-\cos u)/u]\mathrm{d}u$。

当 $I_0 = 1A$ 时，Cin $(2\pi) = 2.437\,6$，故半波振子辐射的总功率是 36.6 W。

电基本振子、电容平板天线、短振子天线、半波振子天线的辐射方向图几乎相同（见图8－17），但是在相同的激励电流下，半波振子天线辐射功率密度

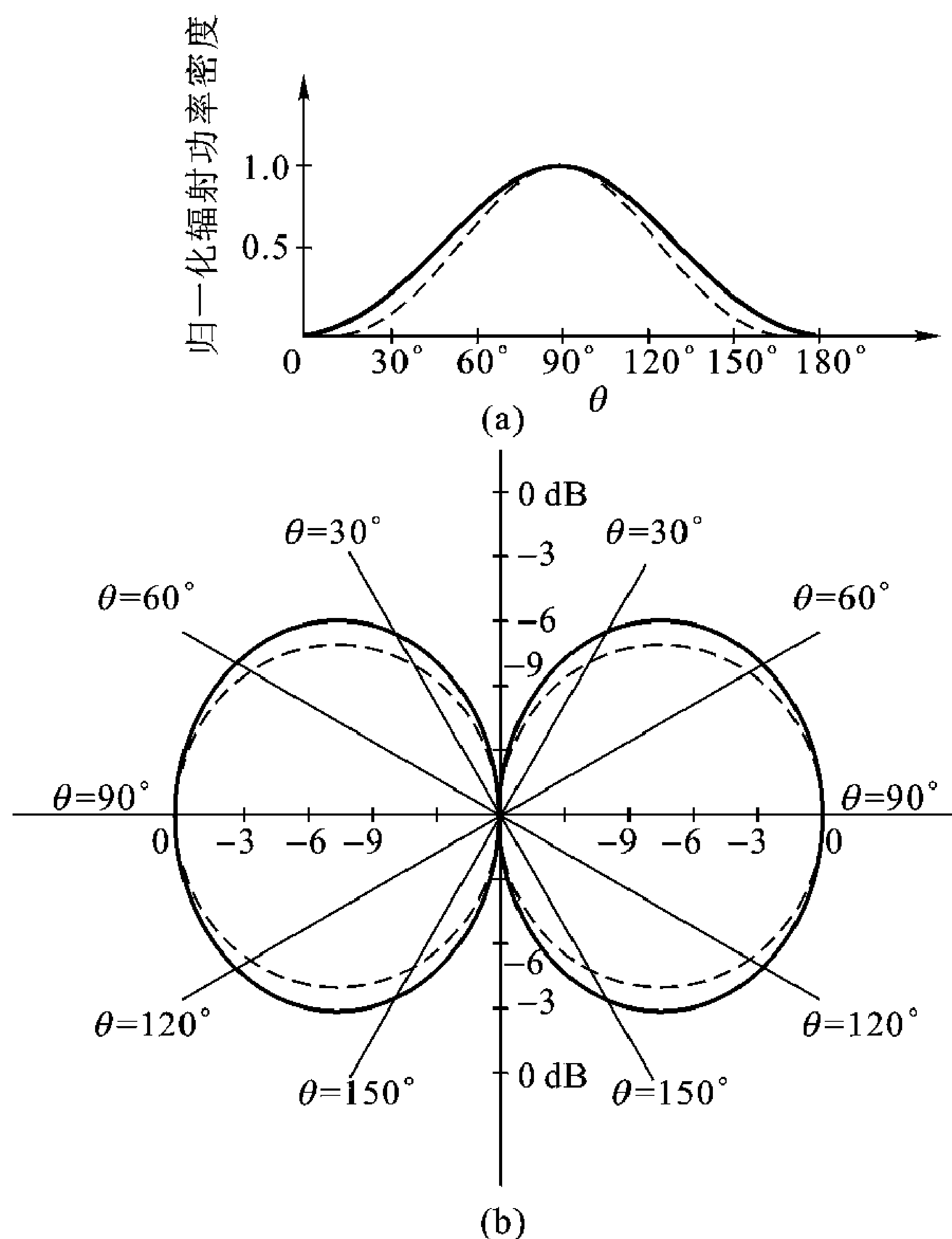


图 8－17 电基本振子、电容平板天线、短振子天线、半波振子天线归一化方向图

(a) 在直角坐标下虚线为半波振子天线方向图，实线为其他 3 种天线方向图，重叠在一起

(b) 在极坐标下图(a)中 4 种天线的归一化辐射方向图(虚线为半波振子天线方向图)

比前3种天线要大得多。

记住，以上几种天线辐射方向图都是 θ 的函数，在某些方向辐射很强，某些方向辐射很小，所以这类天线叫做方向性天线。因为它们在 θ 方向表现出方向性，而在 φ 方向没有方向性，这种 φ 方向没有方向性的天线又叫做全向天线。

8.5.3 中心激励振子天线

中心激励振子天线，$h_1 = h_2 = l/2$，其电流分布可取

$$I(z) = I_0 \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z|\right)\right] \tag{8.5.12}$$

显然，当 $z = \pm l/2$，$I = 0$ 时，应用式(8.5.6)计算 $U(\theta)$

$$\begin{aligned}
U(\theta) &= I_0\int_{-l/2}^{l/2} dz \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - |z|\right)\right] e^{jkz\cos\theta} \\
&= I_0\left\{\int_{-l/2}^{0} dz \sin\left[k\left(\frac{l}{2} + z\right)\right] e^{jkz\cos\theta} + \int_{0}^{l/2} dz \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - z\right)\right] e^{jkz\cos\theta}\right. \\
&= I_0\int_{0}^{l/2} dz \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - z\right)\right]\left[e^{-jkz\cos\theta} + e^{jkz\cos\theta}\right] \\
&= I_0\int_{0}^{l/2} dz \left[\sin k\left(\frac{l}{2} - z\right)\right] 2\cos(kz\cos\theta) \\
&= I_0\int_{0}^{l/2} dz \left\{\left[\sin\left[k\left(\frac{l}{2} - z + z\cos\theta\right)\right] + \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - z - z\cos\theta\right)\right]\right]\right\} \\
&= I_0\left\{\frac{\cos k[(l/2) - z + z\cos\theta]}{k(1-\cos\theta)} + \frac{\cos k[(l/2) - z - z\cos\theta]}{k(1+\cos\theta)}\right\}^{l/2} \\
&= I_0\left\{\frac{\cos[k(l/2)\cos\theta] - \cos(kl/2)}{k(1-\cos\theta)} + \frac{\cos[k(l/2)\cos\theta] - \cos(kl/2)}{k(1+\cos\theta)}\right\} \\
&= I_0\frac{2}{k\sin^2\theta}\left[\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{kl}{2}\right]
\end{aligned}$$

因此线天线的辐射场为

$$\boldsymbol{E} = \theta_0 \eta_0 \frac{jI_0 e^{-jkr}}{2\pi r\sin\theta}\left[\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\frac{kl}{2}\right] \tag{8.5.13}$$

当 $\theta \to 0$，由洛必达(L'hopital)法则给出 $|E_\theta| \to 0$，由此可作出不同线天线的辐射方向图。

【情况1】 半波振子天线，$l = \lambda/2$，$kl = \pi$，前面已讨论过。

【情况2】 1.5波长振子，$l = 3\lambda/2$，有

$$|E_\theta| = \frac{\eta_0 I_0}{2\pi r\sin\theta}\left|\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos\theta\right)\right|$$

其辐射场分布示于图8-18，当 $\theta = 0$，$\cos\theta = 1/3$，$|E_\theta| = 0$。

【情况3】 2波长线天线，$l = 2\lambda$，有

$$|E_\theta| = \frac{\eta_0 I_0}{2\pi r \sin\theta}|\cos(2\pi\cos\theta) - 1|$$

其辐射场分布示于图 8-19，当 $\theta=0$，$\pi/2$，$|E_\theta|=0$。

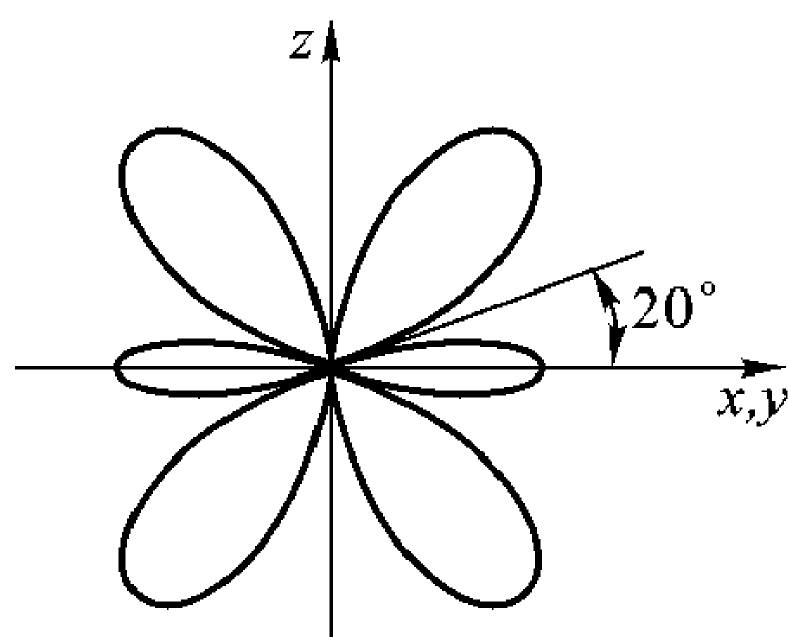


图 8-18　1.5λ 偶极天线辐射方向图

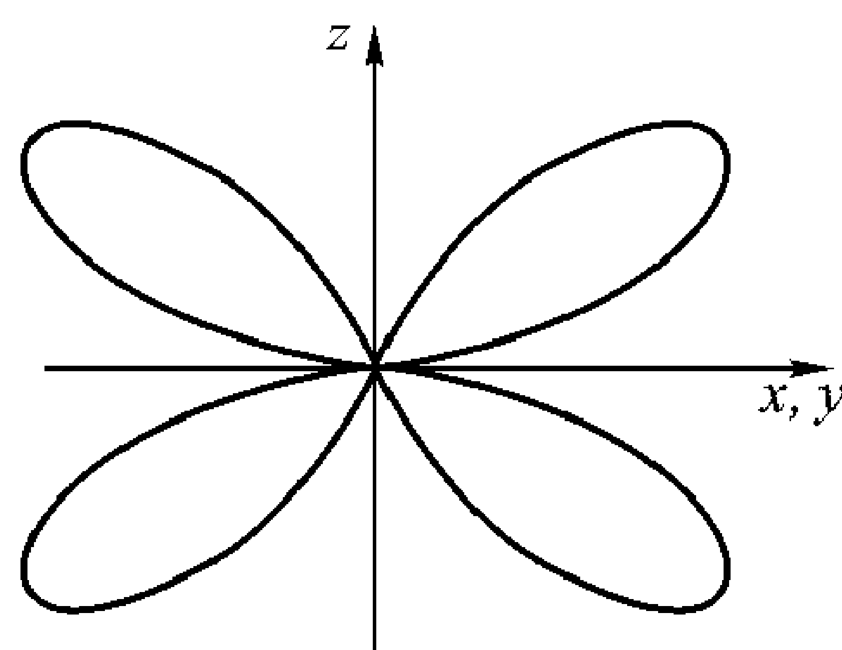


图 8-19　2λ 偶极天线辐射方向图

以上结果都是在正弦分布电流式(8.5.12)假定下得到的。更精确的电流分布及由此计算得到的辐射方向图见有关文献。

8.5.4　单极天线

实际使用的振子天线其激励方式不止一种。图 8-20 (a)所示的单极天线，将同轴线的外导体与接地面相连，内导体伸出接地面而成。

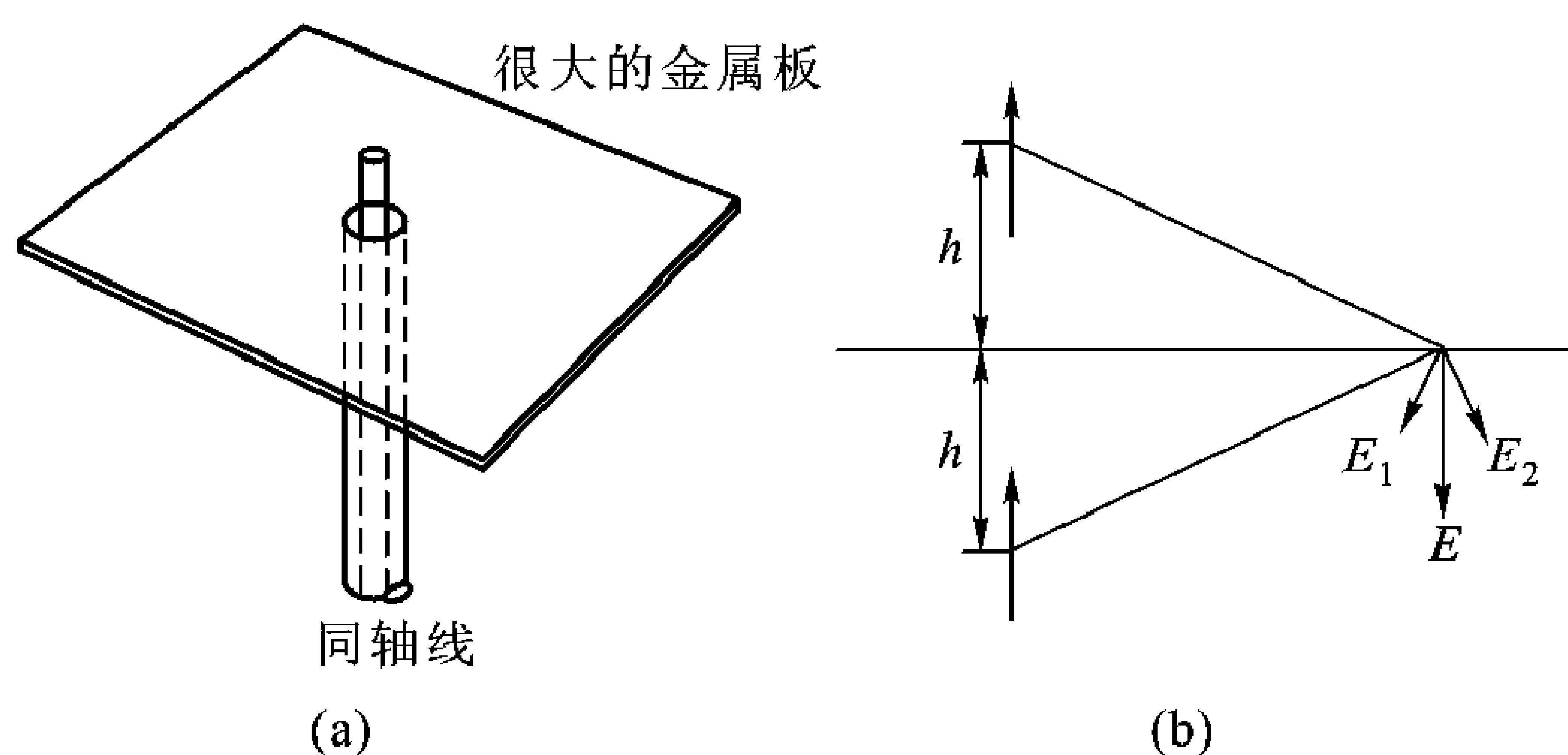


图 8-20　单极天线

(a) 同轴线馈电的单极天线　(b) 镜像

对单极天线的分析，应用电流元的镜像原理就很方便。现在考虑如图 8-20 (b)所示相距为 $2h$，大小相等的两个电流元在中间平面上的电场。可以证明，在这种情况下，当两电流元取向一致，并且相位相同时，中间平面上总电场切向分量为零。这一结论可以由图 8-20 (b)看出。由于两个电流元的大小相同，到中间平面上任一点距离相等，其位置具有对称性，两电场切向分量刚好抵消，合成电场与中间平面垂直。根据时变电磁场惟一性定理，两电流元在中间平面以上区域辐射的场，与无限大理想导电平面上方一电流元在导电平面

上辐射的场相同，因为它们满足相同的边界条件。根据这一原理，内导体伸出接地面 h 的单极天线辐射场与中心激励的高度为 $2h$ 的振子天线辐射场相似，如果接地面为无限大的完纯导电面，单极天线场与中心激励的偶极子天线场完全一样，但是单极天线的输入阻抗(定义为中心激励点的电压与电流之比)只有中心激励偶极子天线输入阻抗的一半。

例 8 - 5　假设商用广播覆盖地域，最小讯号场强为 25 mV/m。假定广播用天线为 $\lambda/4$ 单极天线，最大覆盖地域离发射天线 15 km，计算天线最小的辐射总功率。

解： 由式(8.5.9)得到

$$U(90°) = \frac{2I_0}{k}$$

将 $U(90°)$ 代入式(8.5.4)得到

$$|E(90°)| = \frac{2\eta_0 I_0}{4\pi \times 15\ 000}$$

要使 $|E(90°)| \geqslant 25$ mV/m，得到 $I_0 \geqslant 6.25$ A。然后将 I_0 代入式(8.5.11)，考虑到单极天线，乘一因子 0.5，可得

$$P_t \geqslant 714 \text{ W}$$

8.6　列阵天线

列阵天线一般由许多相同的辐射单元组成，这些单元按一定方式排列、激励以得到所需的辐射方向图。本节讨论最简单的列阵天线，组成列阵天线的辐射单元都相同，都按 z 方向指向且沿 y 轴均匀排列，如图 8 - 21。分析时还进一步假定每一辐射单元激励电流的幅值相同，而相邻两辐射单元激励电流的相位相差 ψ，即第一个辐射单元的激励电流为 $I(z)$，第二个单元为 $I(z)e^{j\psi}$，第三个单元为 $I(z)e^{j2\psi}$，等等。这种列阵天线叫做均匀列阵天线。

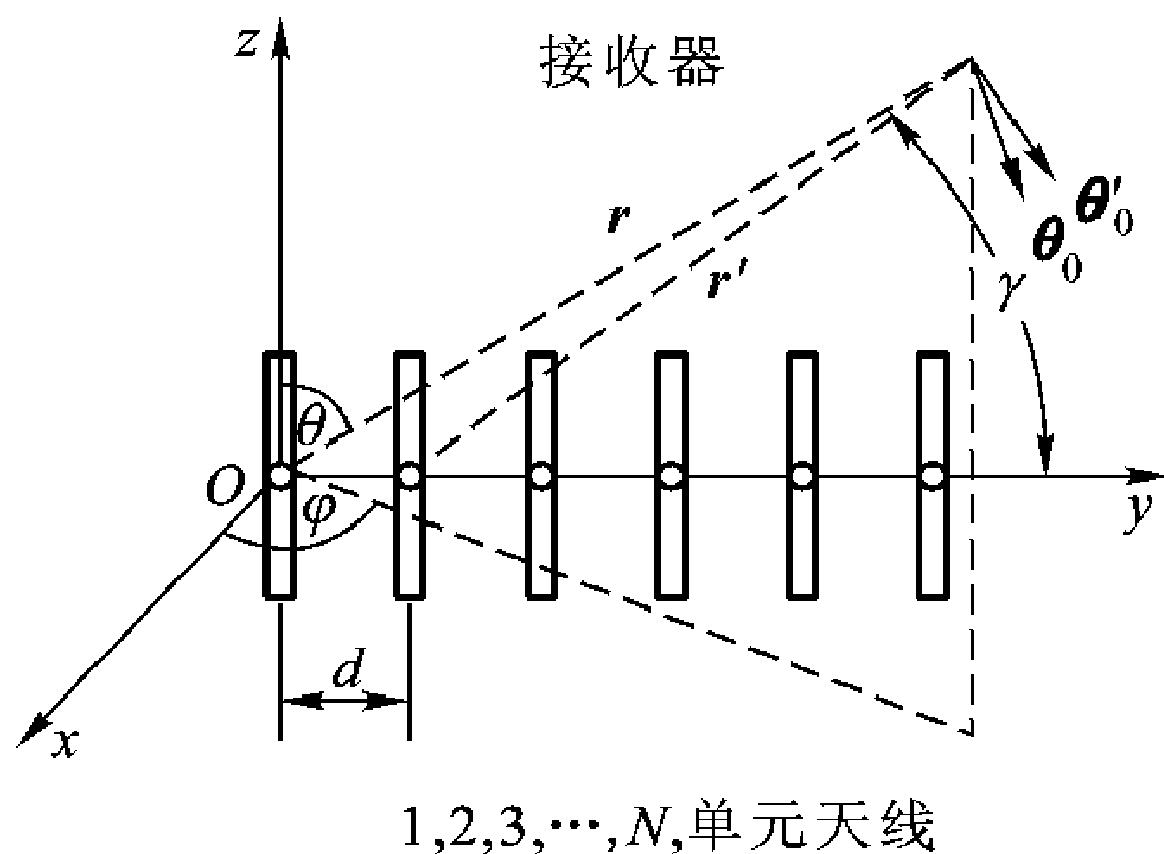


图 8 - 21　均匀列阵天线

应用叠加原理，列阵天线辐射的场是每个辐射单元辐射场的总和。第一个辐射单元辐射场按式(8.5.4)为

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{\theta}_0 \frac{jk\eta_0 e^{-jkr}}{4\pi r} \sin\theta U(\theta) \tag{8.6.1}$$

同样，从第二个单元辐射的场为

$$\boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{\theta}_0 \frac{\mathrm{j}k\eta_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr'}}{4\pi r'} \sin\theta' \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} U(\theta') \tag{8.6.2}$$

因为在远区，r 和 r' 近似相等。以下的近似条件在后面的分析中可以应用：

$$\theta' = \theta$$

$$r' = r - \mathrm{d}(\boldsymbol{y}_0 \cdot \boldsymbol{r}) = r - d\cos\gamma = r - d\sin\theta\sin\varphi \tag{8.6.3}$$

式中 γ 是 r 与 y 轴夹角。将式(8.6.3)代入式(8.6.2)的分子，而式(8.6.2)分母中 r' 用 r 近似，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_2 &= \boldsymbol{\theta}_0 \frac{\mathrm{j}k\eta_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r} \mathrm{e}^{\mathrm{j}kd\sin\theta\sin\varphi} \sin\theta \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} U(\theta) \\ &= \boldsymbol{E}_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(kd\sin\theta\sin\varphi + \psi)}\end{aligned} \tag{8.6.4}$$

所以 $\boldsymbol{E}_2$ 与 $\boldsymbol{E}_1$ 差别仅是一个相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(kd\sin\theta\sin\varphi+\psi)}$。相位因子第一项源于电磁波从列阵天线第二个辐射单元到所研究场点比第一个辐射单元少走 $d\sin\theta\sin\varphi$ 产生的相位差，第二项表示辐射单元 1 和 2 激励电流的相位移。

如此类推，具有 n 个单元构成的均匀列阵天线总的辐射场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{\theta}_0 \frac{\mathrm{j}k\eta_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r} \sin\theta U(\theta) [1 + \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi + kd\cos\gamma)} + \cdots \\ + \mathrm{e}^{\mathrm{j}[(N-1)(\psi + kd\cos\gamma)]}]\end{aligned} \tag{8.6.5}$$

式中

$$\cos\gamma = \sin\theta\sin\varphi$$

$$U(\theta) = \int_{-h}^{h} I(z) \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz\cos\theta} \mathrm{d}z$$

式(8.6.5)括号中的项取如下和的形式

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^n = \frac{1 - x^N}{1 - x}$$

其中 $x = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi + kd\cos\gamma)}$。所以列阵天线总的辐射场可分解为两项的乘积

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} = [\boldsymbol{E}_{\mathrm{e}}(\theta)][F(\theta, \varphi)] \tag{8.6.6}$$

式(8.6.6)中第一项为中心激励偶极子产生的场，可用式(8.5.13)或式(8.6.1)计算，第二项叫做阵因子，有

$$F(\theta, \varphi) = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}[N(\psi + kd\cos\gamma)]}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}[\psi + kd\cos\gamma]}} \tag{8.6.7}$$

阵因子是各辐射单元辐射电场的相位之和，也出现在总的辐射磁场表达式中。总的辐射电场的模为

$$|E_\theta| = |E_{\mathrm{e}}||F|$$

式中

$$|F| = \left| \frac{1 - e^{j[N(kd\cos\gamma + \psi)]}}{1 - e^{j(kd\cos\gamma + \psi)}} \right|$$

因为

$$|1 - e^{jx}| = \left|2j\sin\frac{x}{2}e^{jx/2}\right| = 2\sin\frac{x}{2}$$

所以

$$|F| = \left| \frac{\sin N\left(\frac{kd\cos\gamma + \psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kd\cos\gamma + \psi}{2}\right)} \right| \tag{8.6.8}$$

当 $kd\cos\gamma + \psi = 0$，$2\pi\cdots$，$|F|$具有最大值 N。而当 $N\dfrac{kd\cos\gamma}{2} = m\pi$（$m \neq 0$，$N, 2N\cdots$），$|F|$为零。

由此可见，列阵天线辐射的场 $\boldsymbol{E}_t$，等于线天线辐射的场 $\boldsymbol{E}_e(\theta)$乘上一修正因子——阵因子 $F(\theta, \varphi)$即可。线天线辐射的场只与 θ 有关，与 φ 无关，而列阵天线辐射的场，不仅与 θ 有关，还与方位角 φ 有关。所以要得到在角向有方向性的天线，列阵天线可以选择。

例 8-6　考察被间距为 d 的两个偶极子辐射单元构成的天线阵在 $\theta = \pi/2$ 平面内辐射方向图。

解：【情况 1】$d = \lambda/2$，$kd = \pi$，$\psi = 0$，即两个辐射单元同相激励，所以

$$|E_\theta| \sim \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi\right) \right|$$

其辐射方向图示于图 8-22，在远区，其波前类似平面波。在 x 方向两辐射单元辐射的场同相，合成场为两者相加；在 y 方向，两辐射单元辐射场反相，合成场为零。

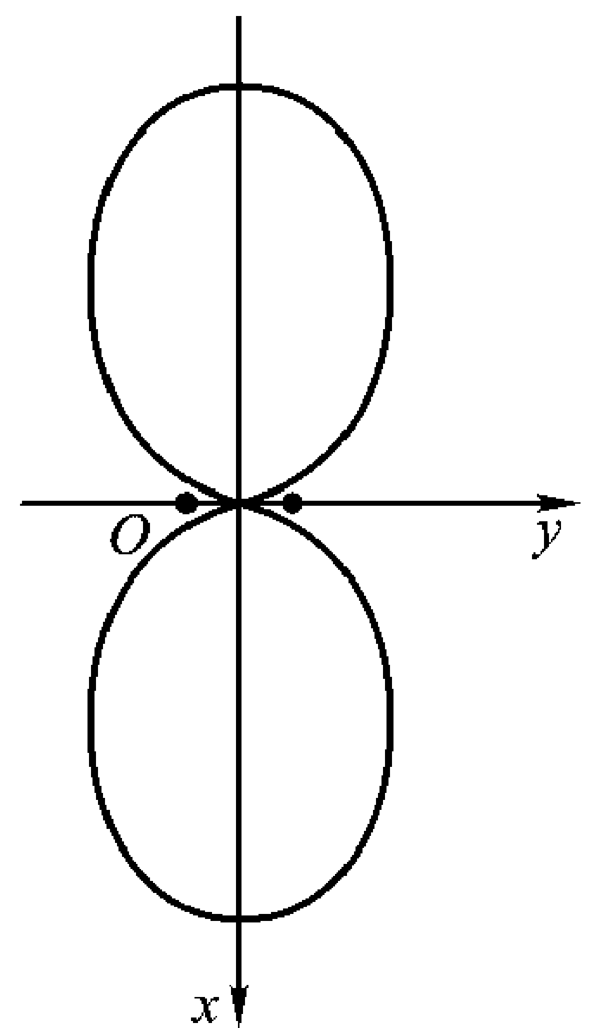


图 8-22　辐射方向图，两个辐射单元，$d = \lambda/2$，$\psi = 0$

【情况 2】$d = \lambda/2$，$\psi = \pi$，有

$$|E_\theta| \sim \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right|$$

其辐射方向图示于图 8-23。

【情况 3】$d = \lambda/2$，$\psi = \pi/2$，有

$$|E_\theta| \sim \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right|$$

其辐射方向图如图 8-24 所示。

由图 8-22～8-24 可见，只要改变列阵天线各辐射单元之间激励电流相位差 ψ 即可改变天线方向图。

【情况 4】$d = \lambda$，$\psi = 0$，有

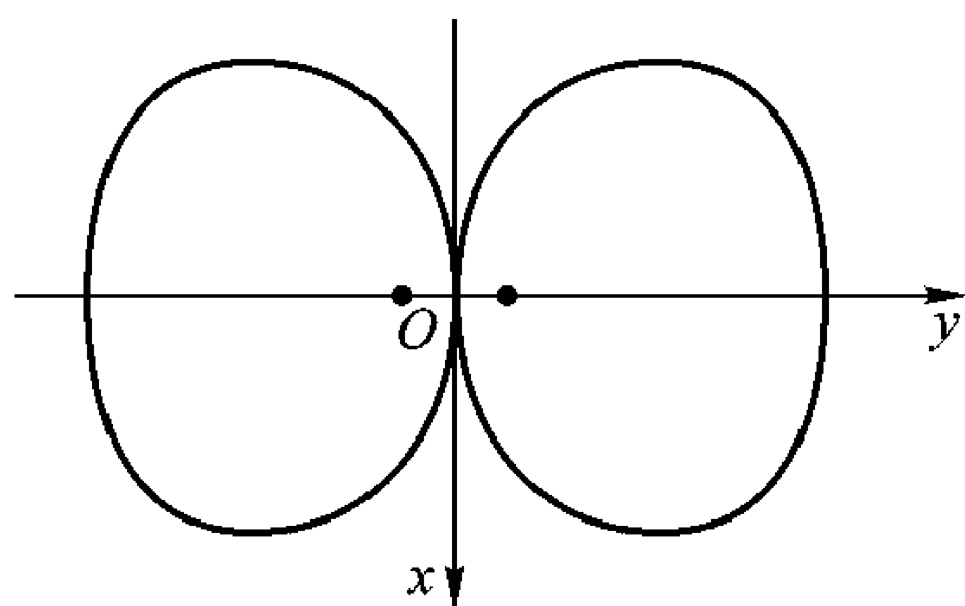


图 8－23 辐射方向图，两个辐射单元，$d=\lambda/2$，$\psi=\pi$

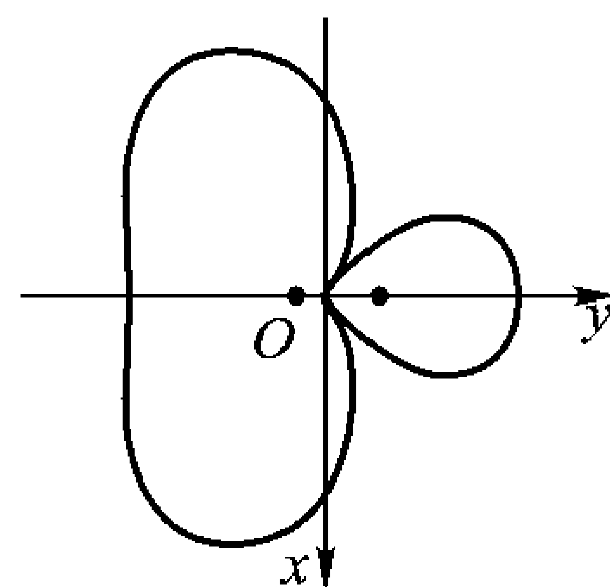


图 8－24 辐射方向图，两个辐射单元，$d=\lambda/2$，$\psi=\pi/2$

$$|E_0| \sim |\cos(\pi\sin\varphi)|$$

辐射方向图见图 8－25。

【情况 5】 $d=\lambda$，$\psi=\pi$，有

$$|E_\theta| \sim \left|\cos\left(\pi\sin\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

辐射方向图见图 8－26。

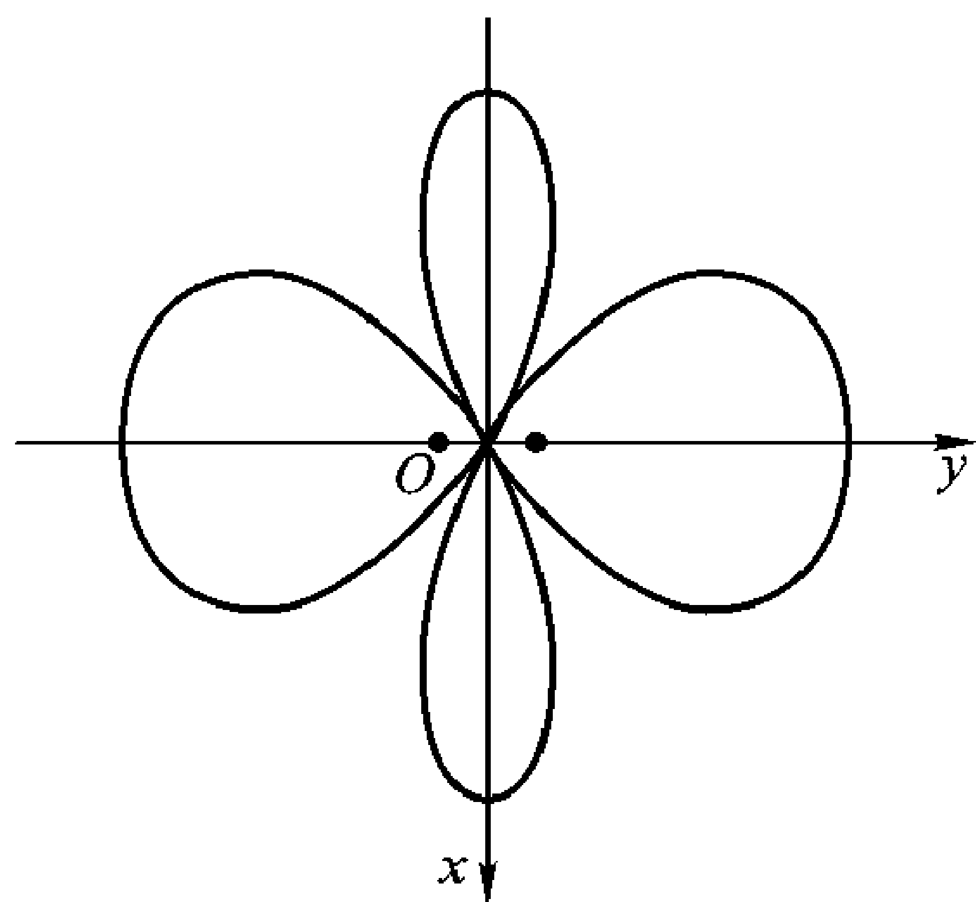


图 8－25 辐射方向图，两个辐射单元，$d=\lambda$，$\psi=0$

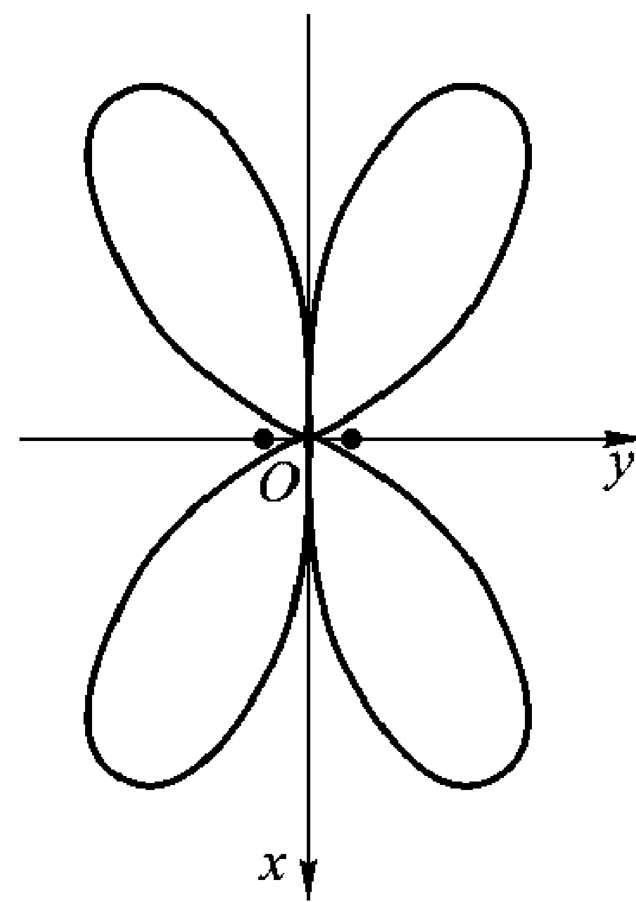


图 8－26 辐射方向图，两个辐射单元，$d=\lambda$，$\psi=\pi$

相控阵天线

相控阵天线（图 8－27）的每一个辐射单元的相位可以用电子方法控制，因而其辐射方向图也可用电子方法改变。通常相控阵天线方向图主瓣，或辐射主波束的方向可以在一个很大的角度范围内用电子方法实现扫描。为了说明相控阵天线的基本工作原理，以均匀列阵天线为例进行讨论。为简单起见，只考虑 $\theta=90°$平面的方向图，因为在与振子垂直的平面内，振子天线没有方向性。在 $\theta=90°$平面内，方向图由阵因子决定，根据式（8.6.8），最大辐射总是发生在

$$\psi+kd\sin\varphi_{\max}=0，\ 2\pi，\ \cdots$$

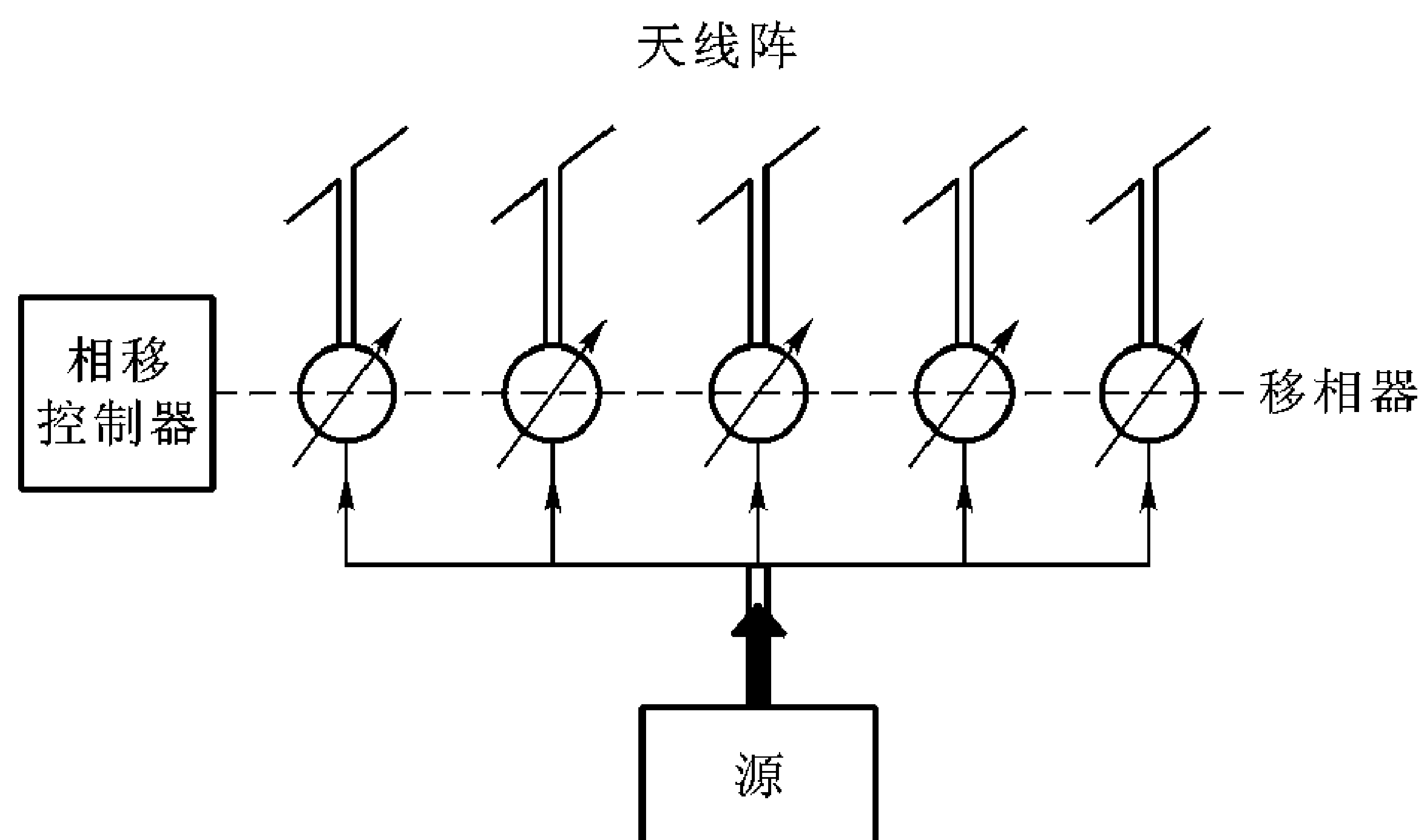


图 8－27 相控阵天线

式中 φ_{max}是主瓣的坐标角，假定 $kd=\pi$，则可得如表 8－1 所示关系：

表 8－1

ψ	180°	120°	90°	30°	0°
φ_{max}	90°	222°	210°	190°	180°
	－90°	－42°	－30°	－10°	0°

因此，当相移 ψ 用电子方法改变时，天线阵主瓣方向可以很快地在大范围内扫描。图 8－28 表示由 6 个偶极子单元组成的天线阵当 ψ 由 180°变到 0°时

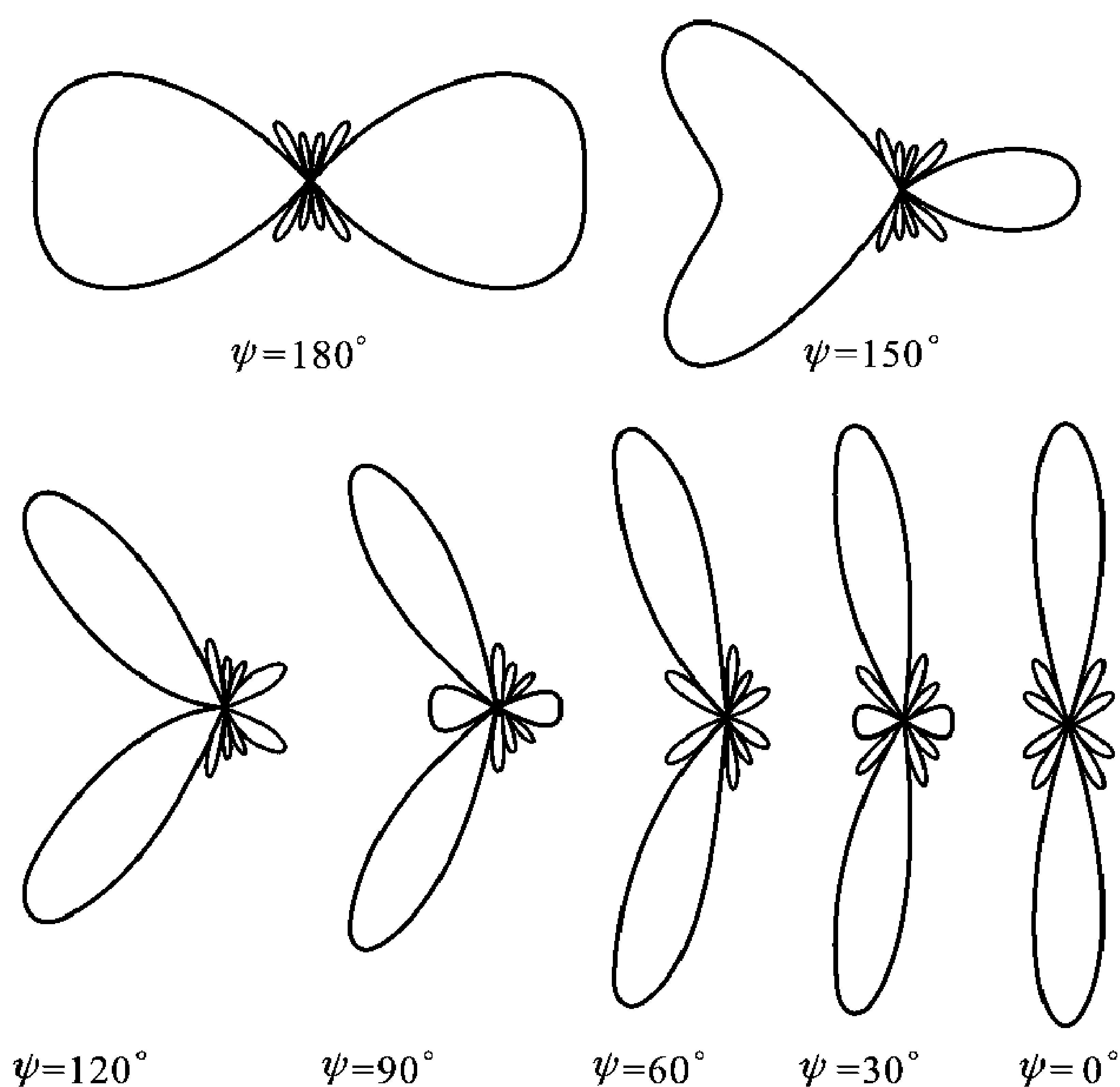


图 8－28 6 个单元天线阵的辐射方向图，$d=\lambda/2$，相位可控

其辐射方向图的变化。只要把图 8–28 方向图旋转 180°就得到从 0°到 –180°的辐射方向图。

如果用二维天线阵列，基本辐射单元不只排列在 y 轴上，而是排列为 $x-y$ 平面上，就有可能实现一个很窄的波束在三维空间的精确扫描。相控阵天线在军事上有特别的应用价值。图 8–29 是一个很大的相控阵天线的照片，它有两个天线列阵面，每一个面有 2677 个基本辐射单元，占地 72.5 英尺(直径)，峰值发射功率为 585 kW，平均功率为 145 kW。一般几千个发射单元的相控阵天线，波束宽度只有几度，作用距离可到几千公里。



图 8–29 两面阵相控天线(80 年代建设时的照片)，每一面阵有 2 677 个偶极子

例 8–7 如图 8–30 (a)，发射天线位于离城市 15 km 海边，求：

(1) 采用 $\lambda/4$ 的单极天线，保证城内场强大于 25 mV/m，天线的辐射功率至少要多大?

(2) 由两个 $\lambda/4$ 单极天线构成天线阵，在保证城内同样场强下，辐射功率要多大?

解：第一个问题已在例 8–5 讨论过，总的辐射功率为 714 W，激励点的电流为 6.25 A，因为单极天线在地平面没有方向性，向大海辐射功率是浪费的。

利用列阵天线可使大部分功率向城区辐射。假定两单元天线间距为 $\lambda/4$，激励电流相位 B 单元比 A 单元延迟 90°，因为 A、B 两单元间距 $\lambda/4$，单元 A 辐射的波到达 B 单元延迟 $T/4$ (T 为周期)，而 B 单元的相位比 A 单元也延迟

90°(从时间看也延迟 $T/4$),所以在 B 单元处 A 单元和 B 单元向城区辐射的波(y 方向)同相,两者相加,得到增强。而由 B 单元辐射到 A 单元的波与 A 单元的波相比相位相差 180°,两者相互抵消,因而向大海方向($-y$ 方向)辐射功率就减小,这样就提高了向城区辐射的功率的比例。

根据电振子的平均辐射功率流[见式(8.5.10)]及阵因子[见式(8.6.8)],该天线阵的时间平均辐射功率流为

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{I_0^2 \eta_0 \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\cos\theta\right) \cdot \sin^2\left[\frac{1}{2}\pi(-1+\sin\theta\sin\varphi)\right]}{8\pi^2 r^2 \sin^2\theta \cdot \sin^2\left[\frac{1}{4}\pi(-1+\sin\theta\sin\varphi)\right]} \boldsymbol{r}_0$$

图 8-30(b)给出 $\theta=90°$平面归一化的天线辐射方向图,在 $\theta=\varphi=90°$方向,阵因子为 2,因此维持相同的辐射场强,二元列阵天线的驱动电流只需单偶极天线的一半,即 $I_0=3.13$ A。总的辐射功率为

$$P_t = r^2\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,[\langle \boldsymbol{S}\rangle \cdot \boldsymbol{r}_0]$$

因为

$$|F(\theta,\varphi|^2 = 4\cos^2\left[\frac{1}{4}\pi(1-\sin\theta\sin\varphi)\right] = 2\left\{1+\sin\left[\frac{1}{2}(\pi\sin\theta\sin\varphi)\right]\right\}$$

所以

$$\int_0^{2\pi} |F(\theta,\varphi)|^2\mathrm{d}\varphi = 4\pi$$

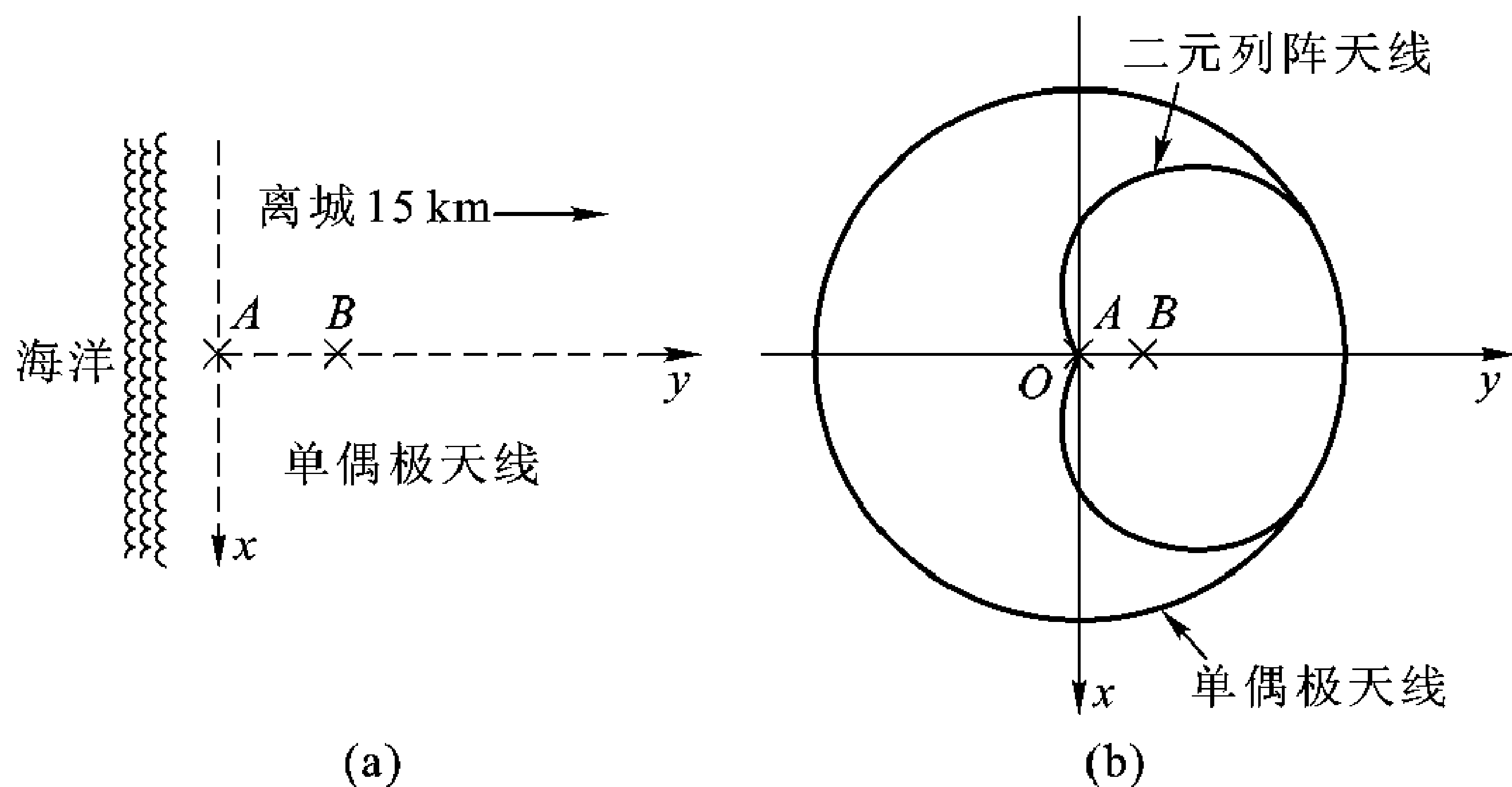


图 8-30 例 8-7 图

(a)两单元列阵天线,其功率向城区辐射

(b)单偶极天线和二单元列阵天线归一化方向图($\theta=90°$平面)

对于单极天线,$F=1$,对 φ 的积分为 2π,对 θ 的积分无论是单极天线还是二元天线阵,两种情况基本相似,因为二元天线阵的激励电流只有单极天线

的一半，所以总的辐射功率也只有单极天线的一半，即 $P_t = 357$ W，但二元天线阵方向性比单极天线好得多，有 3 dB 的改善。

引向天线

引向天线又称八木天线，它由一个有源振子及若干个无源振子组成，其结构如图 8－31。在无源振子中较长的一个为反射器，其余均为引向器，它广泛地应用于米波、分米波波段的通信、雷达、电视及其他无线电系统中。其工作原理如下：

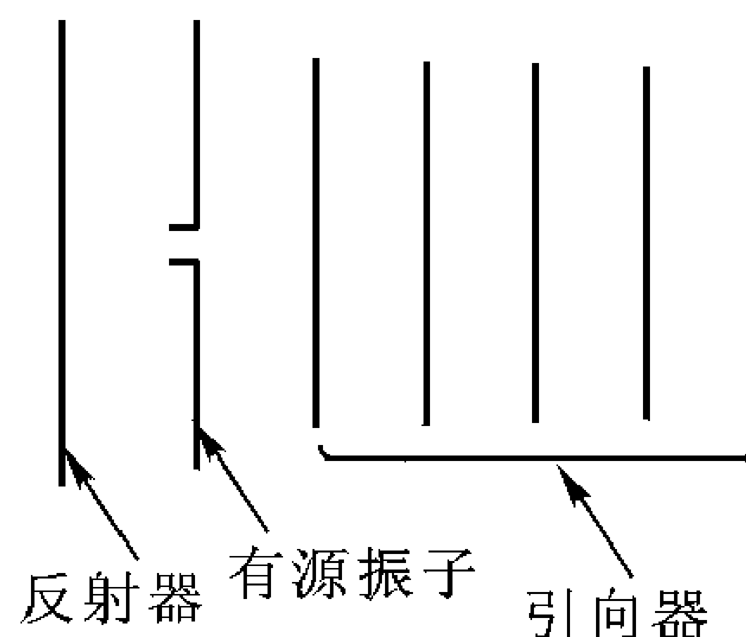
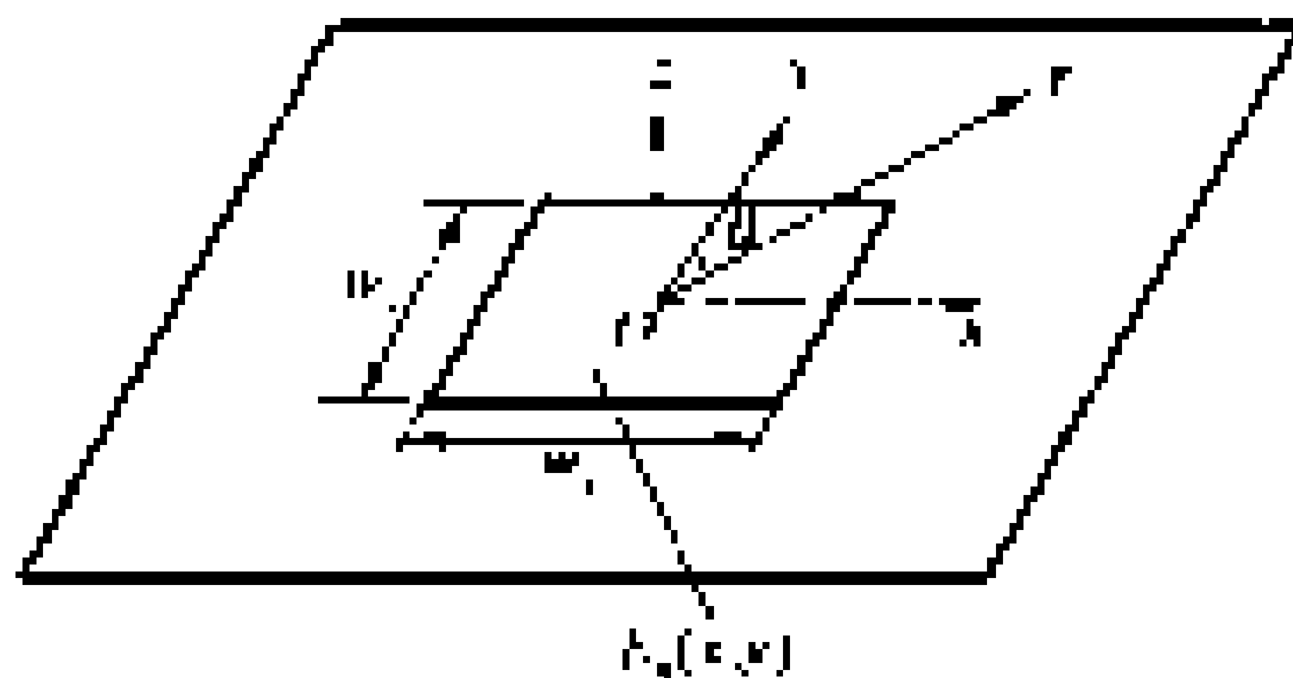


图 8－31 引向天线

由前面天线阵理论可知，列阵可以增强天线的方向性，而改变各单元天线的电流分配比可以改变方向图的形状，以获得所要的方向性。引向天线实际上也是一个天线阵，与前述天线阵相比，不同的是：只对其中的一个振子馈电，其余振子则是靠与馈电振子之间的近场耦合所产生的感应电流来激励的；而感应电流的大小取决于各振子的长度及其间距，因此调整各振子的长度及间距可以改变各振子之间的电流分配比，从而达到控制天线方向性的目的。如前所述，分析天线的方向性，必须首先求出各振子的电流分配比，即振子上的电流分布，但对于多元引向天线，要计算各振子上的电流分布是相当繁琐的。

8.7 口径天线

被平面波照射的开有方孔的屏（图 8－32）就是最简单的口径天线。这种结构能辐射电磁波可以这样理解：当平面波从图 8－32 左边照射到吸收屏时，因为除了方孔外，电磁波都被屏吸收。按照惠更斯原理，右边的场可以由方孔处场 E_a 激励。口径天线常用在无线电频谱的高频端，特别是微波波段。与线天线不同，口径天线所载电流或磁流是沿天线体表面分布的，且天线的口径远大于工作波长。


图 8－32 口径天线示意图

根据 3.7 节所述对偶原理，对作为磁基本振子的裂缝天线的分析可借用作为电基本振子的线天线的分析结果。有鉴于此，本节对口径天线的分析为将口

径天线看成是无限多磁振子组成的天线阵，并当相邻振子间距趋于零时的极限。而磁振子天线又可用电振子天线等效，所以可用前面电振子天线阵的有关公式求解口径天线问题。

先把图8－32所示的口径天线看成沿 x 轴排列的 N 个长度为 w_y 的线天线单元组成的天线阵。设相邻单元天线间距为 d，则该列阵天线总宽度 $w_x=(N-1)d$，当 N 很大时，近似等于 Nd。因为该口径天线口面上场是平面波一部分，场的幅度、相位处处相同。所以等效天线阵的组成单元，即每一个线天线，激励电流 I 沿 y 轴没有变化，对坐标 y 而言是常数，同时相邻单天线激励电流的相位差也等于零，即 $\psi=0$。根据列阵天线辐射场公式(8.6.6)，总的辐射场 $\boldsymbol{E}_t$ 等于列阵天线组成单元(线天线)辐射的场 $\boldsymbol{E}_e$ 再乘上阵因子 $F(\theta,\varphi)$，而 $\boldsymbol{E}_e(\theta)$ 等于短偶极子天线辐射场再乘修正因子 $U_e(\theta)$。注意这里 θ 是矢径 $\boldsymbol{r}$ 与 y 轴的夹角。现在考虑辐射的远区场，$\theta=90°$ 附近的一个很小的区域(见图8－32)。对于这个很小的区域，$\sin\theta$ 近似为1，$\boldsymbol{E}_e(\theta)$ 可以认为与 θ 无关，场分布主要由阵因子 $F(\theta,\varphi)$ 决定，这里 φ 是 r 在 $x-z$ 平面的投影与 z 轴夹角。因为相邻单元天线相位差 $\psi=0$，如果只研究 $\theta=90°$ 平面上的场，那么 $\cos\gamma=\sin\theta\sin\varphi=\sin\varphi$。所以阵因子表达式(8.6.8)中三角函数的宗量就简化为

$$\frac{kd\cos\gamma+\psi}{2}=\frac{kd\sin\varphi}{2}$$

阵因子 $F(\theta,\varphi)\Big|_{\theta=90°}$ 以 N 归一化的模为

$$|F(\varphi)|=\frac{1}{N}\left|\frac{\sin\dfrac{Nkd\sin\varphi}{2}}{\sin\dfrac{kd\sin\varphi}{2}}\right| \tag{8.7.1}$$

当 φ 很小而 N 很大时

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ d\to 0}}|F(\varphi)|=\left|\frac{\sin\dfrac{Nkd\sin\varphi}{2}}{\dfrac{Nkd\sin\varphi}{2}}\right|=\left|\frac{\sin\dfrac{\pi w_x\sin\varphi}{\lambda}}{\dfrac{\pi w_x\sin\varphi}{\lambda}}\right| \tag{8.7.2}$$

定义 $s'=\sin\varphi/\lambda$，并引用辛格函数(sinc 函数)上式成为

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ d\to 0}}|F(\varphi)|=\left|\frac{\sin\pi s'w_x}{\pi s'w_x}\right|=|\operatorname{sinc} w_x s'| \tag{8.7.3}$$

这里辛格函数的定义是 $\operatorname{sinc}t=(\sin\pi t)/(\pi t)$。注意，辛格函数是矩形脉冲的傅里叶变换，这就是说口径天线远区辐射场就是口面上场的傅里叶变换，因为假定口面上的场是均匀分布的。

图8－33就是 $|F(\varphi)|^2$ ($\theta=90°$时)与 $w_x s'$ 关系，它表示归一化坡印廷功率流在 $x-z$ 平面辐射方向图。第一个旁瓣比主瓣低13.2 dB。主瓣功率跌落3 dB

(即半功率点)宽度或波束宽度 $\varphi_{B_{xz}}$ 在图中也标出。

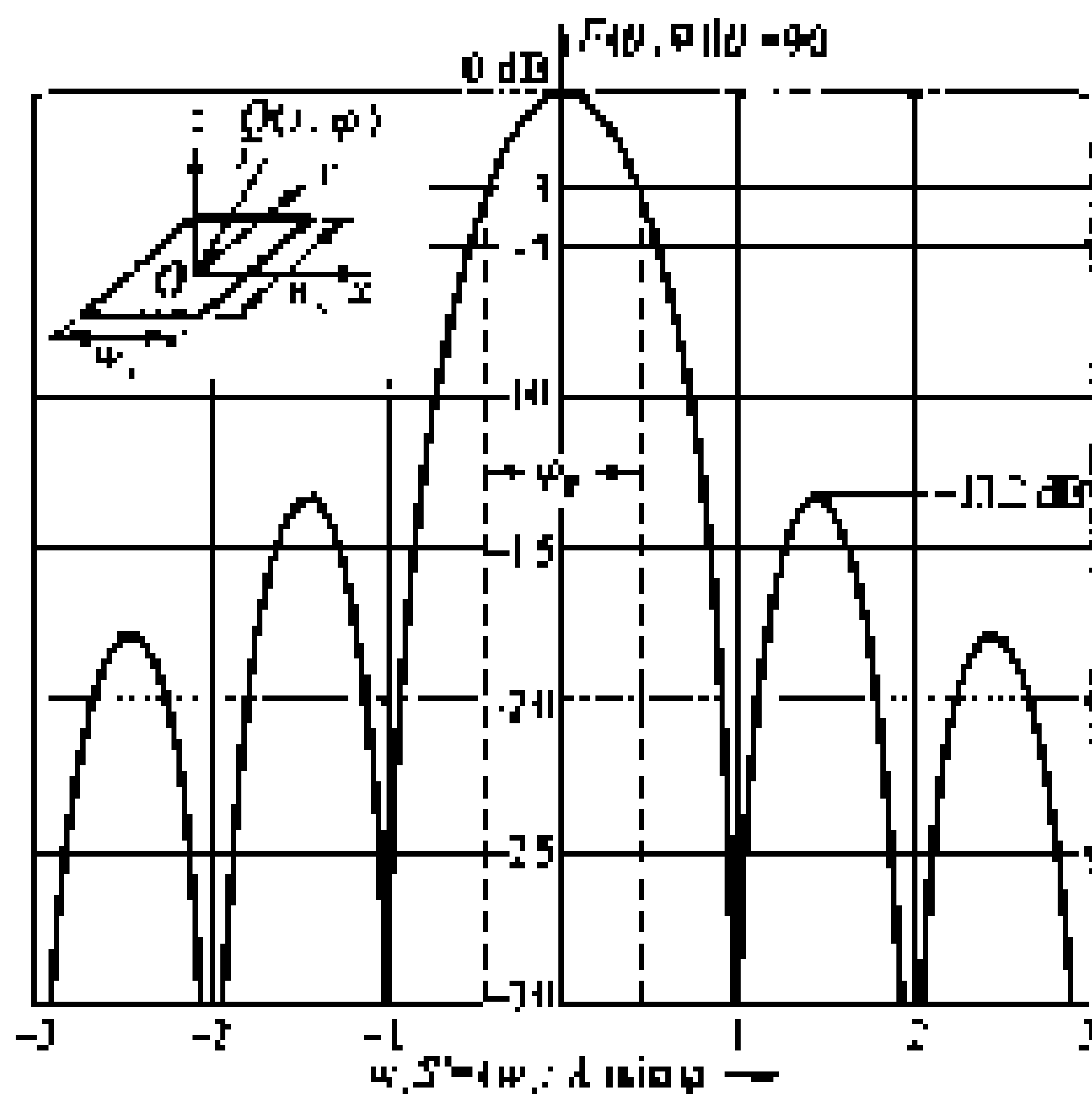


图 8-33 口径天线 $x-z$ 平面辐射方向图

(φ 为 r 在 $x-z$ 平面投影与 z 轴的夹角)

从辛格函数(sinc 函数)可以决定口径天线波束宽度。在主瓣半功率点或 $\varphi=\dfrac{1}{2}\varphi_{B_{xz}}$ 点,

$$\left|F\left(\frac{\varphi_{B_{xz}}}{2}\right)\right| = |\operatorname{sinc}(w_x s')| = 0.707$$

根据辛格函数表查得

$$w_x s' = \frac{w_x}{\lambda}\sin\frac{\varphi_{B_{xz}}}{2} = 0.443$$

或

$$\sin\frac{\varphi_{B_{xz}}}{2} = 0.443\frac{\lambda}{w_x} \tag{8.7.4}$$

假定 $N=80$, $d=\lambda/2$, $w_x=Nd=40\lambda$, 那么

$$\frac{40\lambda}{\lambda}\sin\frac{\varphi_{B_{xz}}}{2} = 0.443$$

$$\sin\frac{\varphi_{B_{xz}}}{2} = 0.011\ 1$$

$$\frac{\varphi_{B_{xz}}}{2} = 0.634\ 6°$$

$$\varphi_{B_{xz}} = 1.269°$$

在 φ_B很小情况下，根据式(8.7.4)波束宽度 $\varphi_{B_{xz}}$可近似为

$$\varphi_{B_{xz}} = 2\sin\frac{\varphi_B}{2} = 2 \times 0.443\frac{\lambda}{w_x} = 0.886\frac{\lambda}{w_x} \tag{8.7.5}$$

$\varphi_{B_{xz}}$的单位为 rad。

如果把图 8－32 所示口径天线看成沿 y 轴排列的 n 个长度为 w_x 线天线单元组成的天线阵，同样可得在 $y-z$ 平面波束宽度

$$\varphi_{B_{yz}} = 0.886\frac{\lambda}{w_y} \tag{8.7.6}$$

有一点必须指出，实际口径天线口面上场很难做到均匀分布，如图 8－34 (a)所示[8－34(b)为其傅里叶变换]。如果适当选择口面场分布[如图 8－34(a)的渐变分布]，其辐射波束旁瓣比矩形分布(即均匀分布)小，但主瓣宽度比均匀分布的宽。也就是说口面场渐变分布时，波束宽度 $\varphi_{B_{xz}}$ 与 $\varphi_{B_{yz}}$ 与式(8.7.5)、(8.7.6)不同，要略作修正，并表示为

$$\varphi_{B_{xz}} = b_x\frac{\lambda}{w_x} \tag{8.7.7}$$

$$\varphi_{B_{yz}} = b_y\frac{\lambda}{w_y} \tag{8.7.8}$$

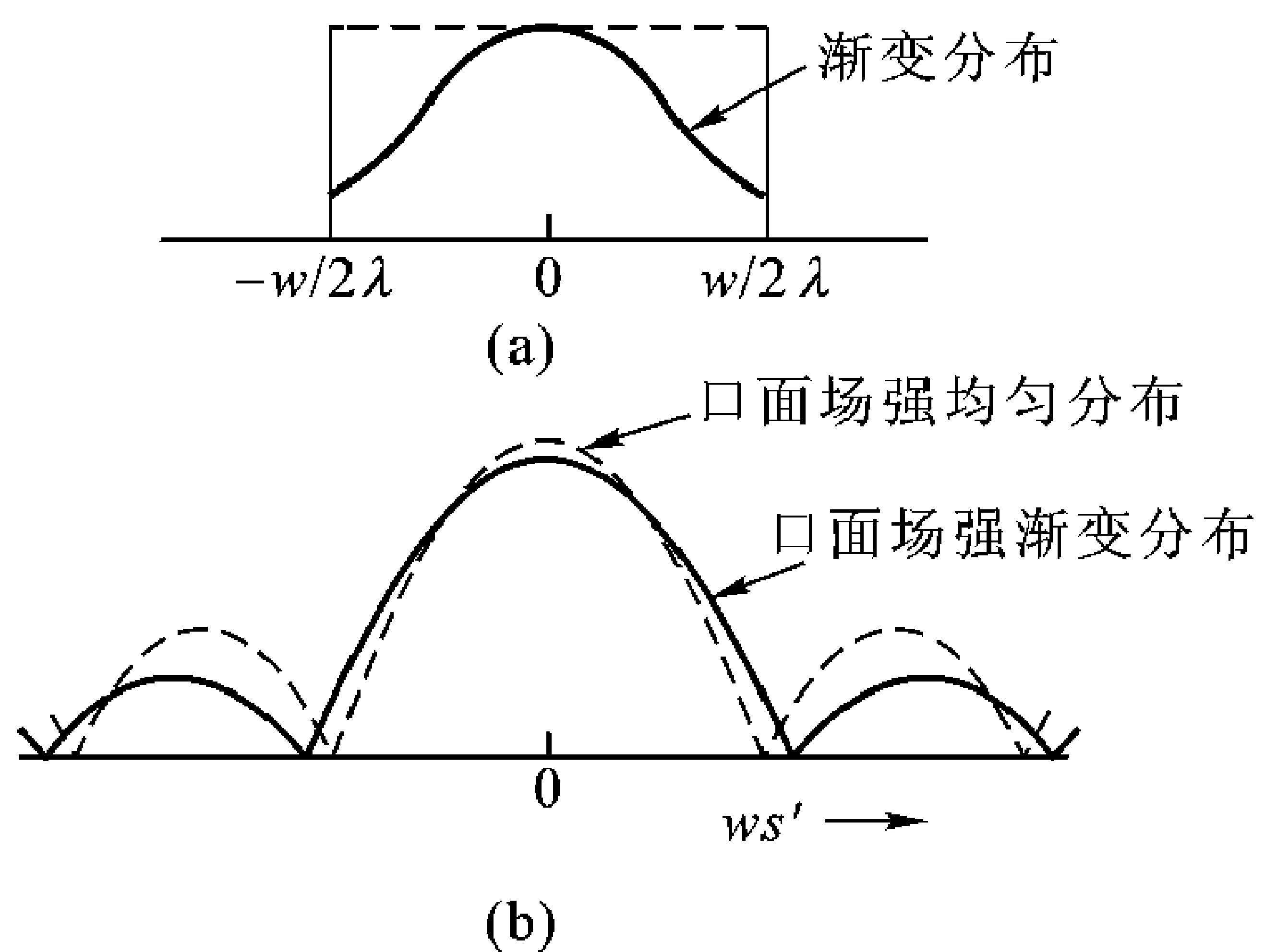


图 8－34　口面场渐变分布对天线辐射场的影响
(a) 口面场分布　(b) 远区辐射波束场分布
注：实线为渐变场分布；虚线为均匀场分布(矩形函数)

口面场均匀分布时，b_x、b_y 就是前面得出的系数 0.886，变化很大时，b_x、b_y 可以达到 2，典型情况下，$b_x \approx 1$，$b_y \approx 1$。

根据天线方向性的定义式(8.1.3)，有

$$G_D = \frac{4\pi}{\Omega_B}$$

这里 Ω_B表示天线的功率都在该立体角内辐射出去，且在 Ω_B内均匀分布，对于方向性很好的笔形波束[见后面图 8－35(d)]，Ω_B可近似为

$$\Omega_B \approx \varphi_{B_{xz}}\varphi_{B_{yz}} \tag{8.7.9}$$

所以

$$G_D = \frac{4\pi}{\Omega_B} \approx \frac{4\pi}{\varphi_{B_{xz}}\varphi_{B_{yz}}}$$

将式(8.7.7)~(8.7.9)代入得到

$$G_D \approx \frac{4\pi}{\lambda^2}\frac{w_x w_z}{b_x b_y} = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_e \tag{8.7.10}$$

所以有效面积

$$A_e = \frac{w_x w_z}{b_x b_y} = \frac{A_p}{b_x b_y}$$

由此可见，对于口径天线，天线有效面积 A_e与实际面积 $A_p(=w_x w_y)$相差不大。对于图 8-34 这种口面场分布，有效面积 A_e约为实际天线面积的 60%。

图 8-32 这种口径天线实际上很少得到应用。最常见的口径天线是抛物面天线，见图 8-35。频率较低时，用偶极子天线作馈源[图 8-35(a)]，馈源放在抛物面天线焦点。抛物面是用金属材料做的，对电磁波全反射。由于抛物面的几何性质，焦点处馈源辐射的电磁波经抛物面反射后其波矢是平行于抛物面轴线且波在与抛物面轴垂直的平面内相位一致[见图 8-35(b)]，这正好是图 8-32口径天线口面上的场。频率较高时(大于 2 GHz 时)，用喇叭天线作馈源，见图 8-35 (c)，抛物面天线三维辐射方向图见图 8-35 (d)。

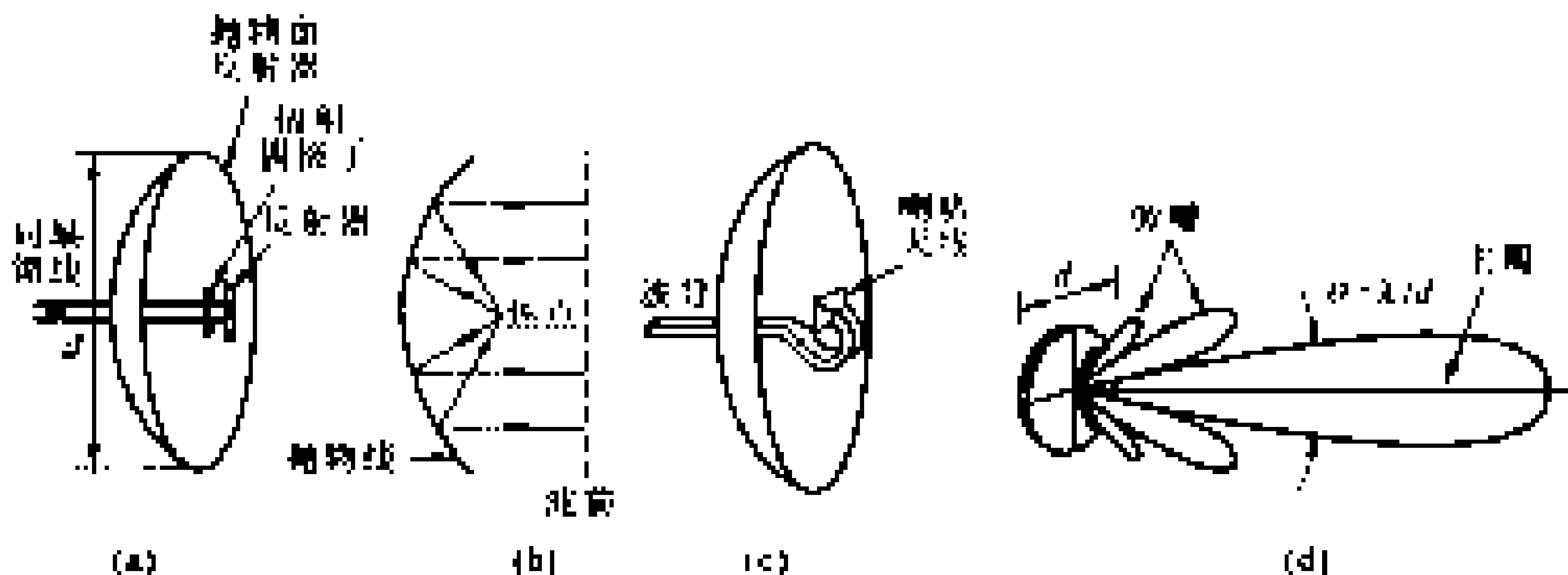


图 8-35 抛物面天线

(a) 偶极子天线作馈源 (b) 抛物线天线作为口径天线图示

(c) 喇叭天线作馈源 (d) 辐射方向图

无论用偶极子天线还是用喇叭天线作馈源，它们都有一定大小，不可能理想化为抛物面焦点上的一个点，辐射的场在各个方向也不均匀，所以实际抛物面天线口面上场不可能均匀分布。

图 8-36 这种天线是抛物面天线进一步发展而成的，叫做卡塞格伦天线。它有两个反射面，一个是主反射面，另一个是副反射面。馈源安放在主反射面中心，并对准副反射面。馈源辐射的电磁波先被副反射面反射，经副反射面反射回来的电磁波再次被主反射面反射，其口面上场与普通抛物面天线口面上场

相似。这种天线工作原理示于图 8-37。

卡塞格伦天线独特之处是其反射波的极化特性可以巧妙处置。假定馈源辐射场是水平极化的，副反射面由埋在玻璃纤维中的水平方向的金属栅丝组成，并假定玻璃纤维对电磁波透明。主反射面前 $\lambda/4$ 处也安放一个由金属栅丝组成的网，栅丝的方向相对于水平方向转过 45°，那么从主反射面反射的波其极化面将转过 90°，变为垂直极化波。极化面旋转的过程可结合图 8-37 说明。因为副反射面由水平方向的金属栅丝构成，馈源辐射的水平极化波经副反射面反射后其极化特性不会改变。该水平极化波到达主反射面前的栅网时，可分解成平行于栅丝方向的 E_{it} 与垂直于栅丝方向的 E_{in}（见图 8-37）。E_{it} 分量被栅网反射，其反射波中场 E_{rt} 相对于 E_{it} 有 180°相移。E_{in} 分量则穿过栅网到达主反射面，其反射波电场 E_{rn} 相对于 E_{in} 也有 180°相移。因为栅网与主反射面间距为 $\lambda/4$，所以 E_{rn} 返回到栅网时又经过 180°相移。这样 E_{rn}、E_{in} 在主反射面的栅网处同相。E_{rt}、E_{rn} 合成的反射波电场 E_r 将垂直指向（见图 8-37），即极化面转过 90°。

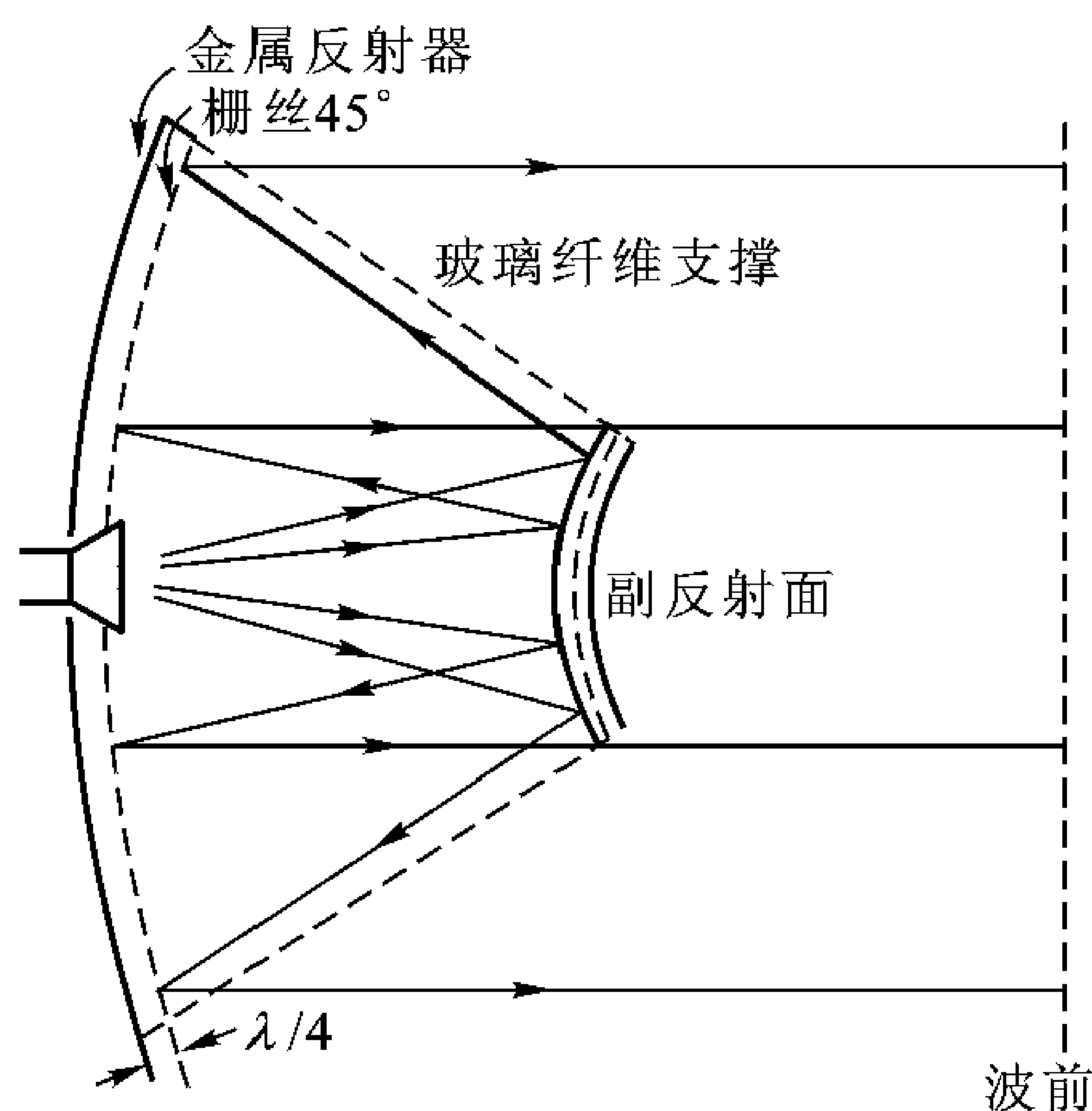


图 8-36　卡塞格伦天线

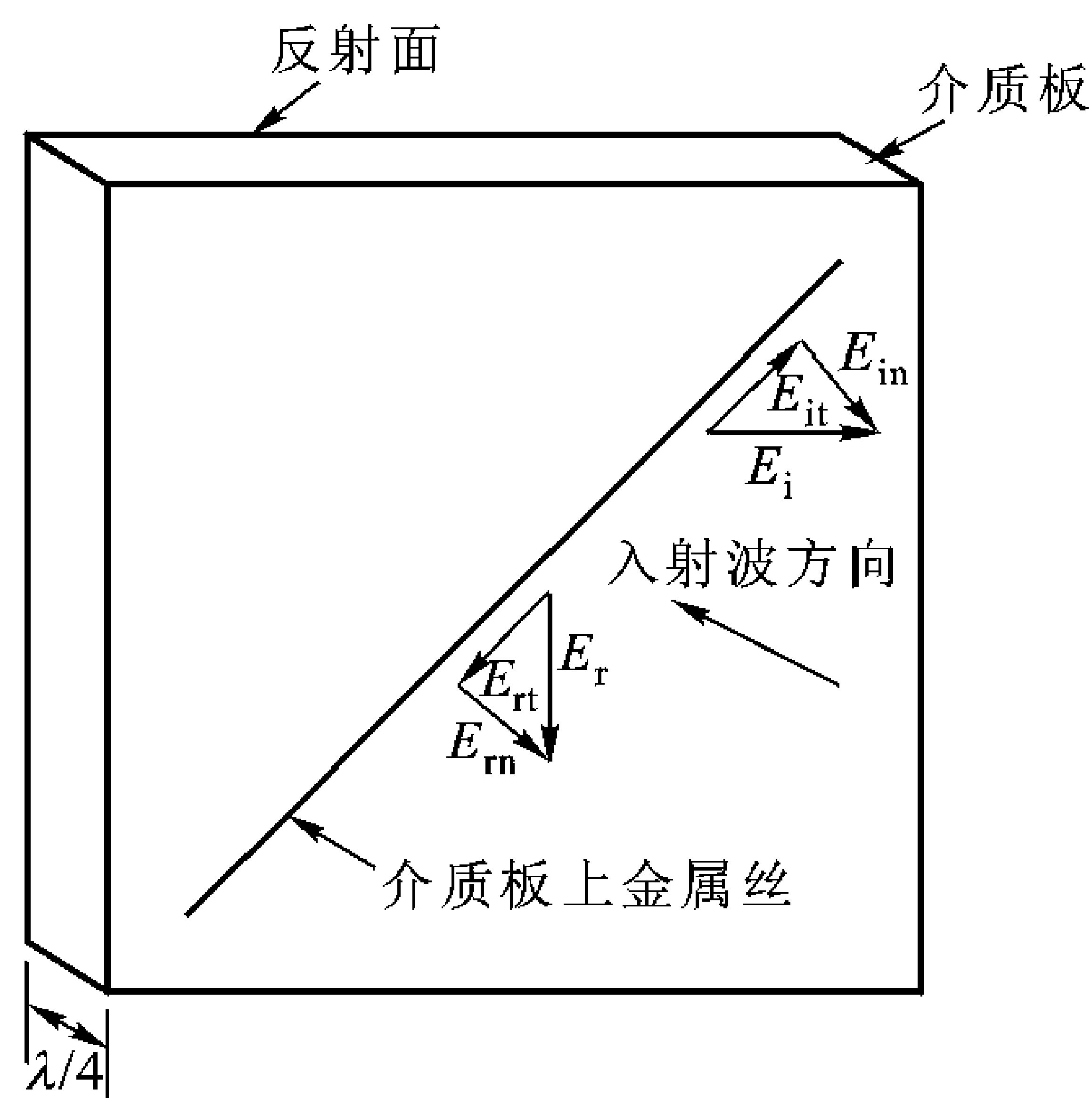


图 8-37　卡塞格伦天线极化面旋转原理

8.8　微带天线

自 20 世纪 70 年代以来微带天线引起了人们的广泛的重视，各种形状的微带天线已在卫星通信、多普勒雷达及其他雷达、导弹、遥测技术以及生物工程等领域得到了广泛应用，下面介绍微带天线的结构、特点及工作原理。

微带天线的结构及特点

微带天线是由一块厚度远小于波长的介质板（称为介质基片）和覆盖在它的

两面上的金属片(用印刷电路或微波集成技术制作的)构成的，其中完全覆盖介质板的一片称为接地板，而尺寸可以和波长相比拟的另一片称为辐射元，如图8-38。辐射元的形状可以是方形、矩形、圆形和椭圆形等等。

微带天线的馈电方式分为两种，如图8-39。一种是侧面馈电，也就是馈电网络与辐射元刻制在同一表面；另一种是底馈，就是以同轴线的外导体直接与接地板相接，内导体穿过接地板和介质基片与辐射元相接。

微带天线的主要特点有：体积小、重量轻、低剖面，因此容易做到与高速飞行器共形，且电性能多样化(如双频微带天线、圆极化天线等)，尤其是容易和有源器件、微波电路集成为统一组件，因而适合大规模生产。在现代通信中，微带天线广泛地应用于100 MHz到50 GHz的频率范围。

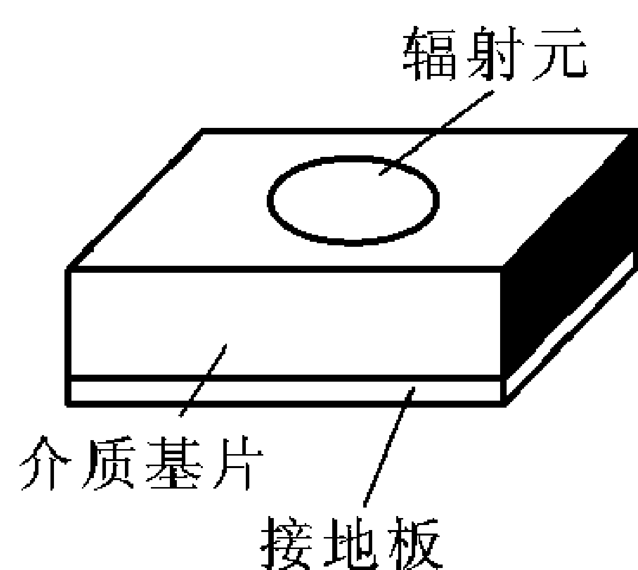


图8-38 微带天线的结构

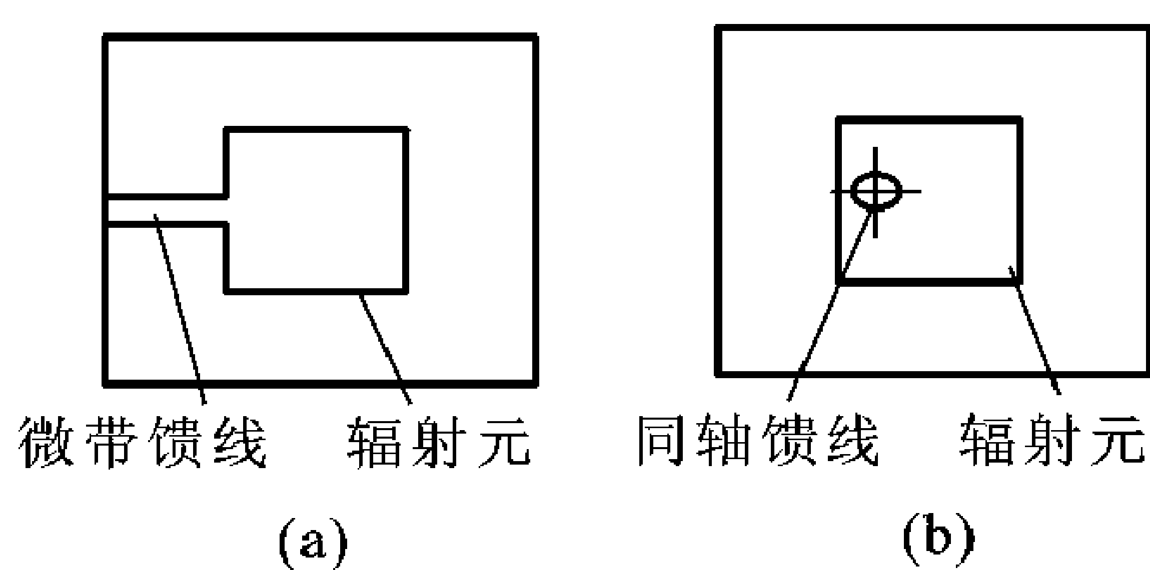


图8-39 微带天线的馈电
(a) 侧馈 (b) 底馈

微带天线的辐射原理

由于分析微带天线的方法不同，对它的辐射原理有不同的说法。为了简单起见，以矩形微带天线为例，用传输线模分析法介绍它的辐射原理。

设辐射元的长为 l，宽为 w，介质基片的厚度为 h，现将辐射元、介质基片和接地板视为一段长为 l 的微带传输线，在传输线的两端断开形成开路，如图8-40。

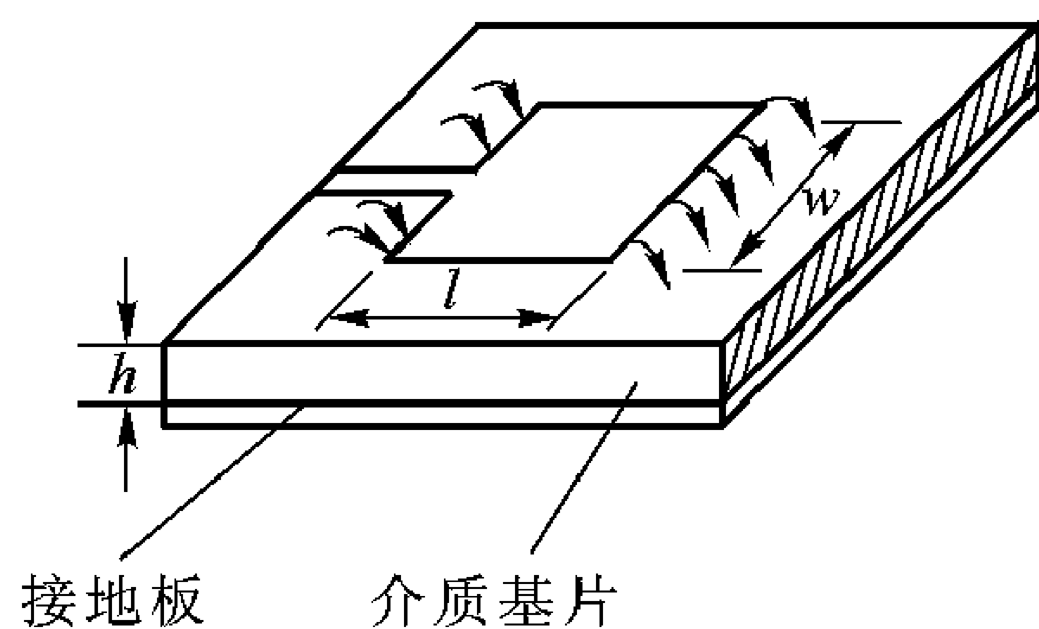


图8-40 矩形微带天线开路端电场结构

根据微带传输线理论，由于基片厚度 $h \ll \lambda$，场沿 h 方向均匀分布。在最简单的情况下，场沿宽度 w 方向也没有变化，而仅在长度方向($l \approx \lambda/2$)有变化，其场分布如图8-41所示。

由图8-41可见，在两开路端的电场均可以分解为相对于接地板的垂直分量和水平分量，两垂直分量方向相反，水平分量方向相同，因而在垂直于接地板的方向，两水平分量电场所产生的远区场

同相叠加，而两垂直分量所产生的场反相相消。因此，两开路端的水平分量可以等效为无限大平面上同相激励的两个缝隙，如图 8 – 42 所示，缝的电场方向与长边垂直，并沿长边 w 均匀分布。缝的宽度为 $\Delta l \approx h$，长度为 w，两缝间距为 $l \approx \lambda/2$。这就是说，微带天线的辐射可以等效为由两个缝隙所组成的二元阵列。

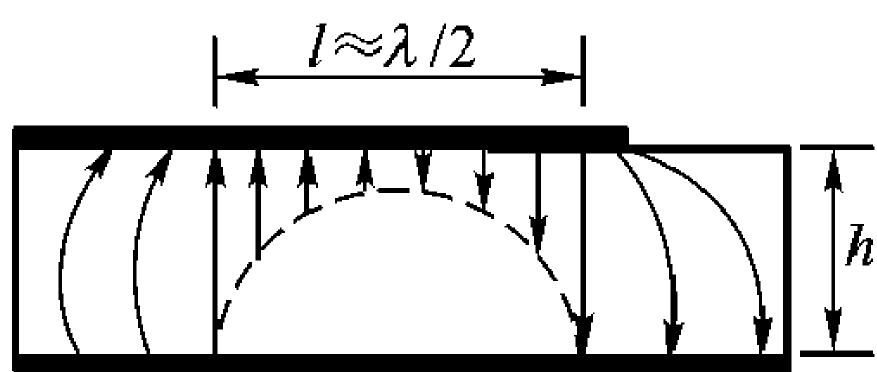


图 8 – 41　场分布侧视图

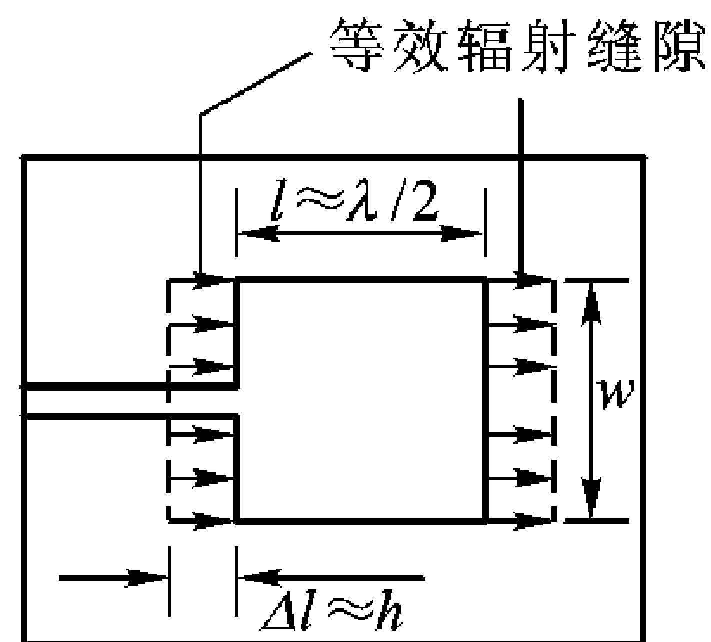


图 8 – 42　等效辐射缝隙

辐射场及方向函数

建立如图 8 – 43 所示的坐标，设缝隙上电压为 V，缝的切向电场沿 x 轴均匀分布，$E_x = V/h$，并可以等效为沿 z 方向的磁流密度，为

$$J_m = V/h$$

考虑到理想接地板上磁流的镜像，缝隙的等效磁流密度要乘 2，故 z 方向等效磁流为

$$i_m = 2J_m h = 2V \tag{8.8.1}$$

再设磁流沿 z 方向也是均匀的，并注意到 $h \ll \lambda$，则单缝辐射的远区场为

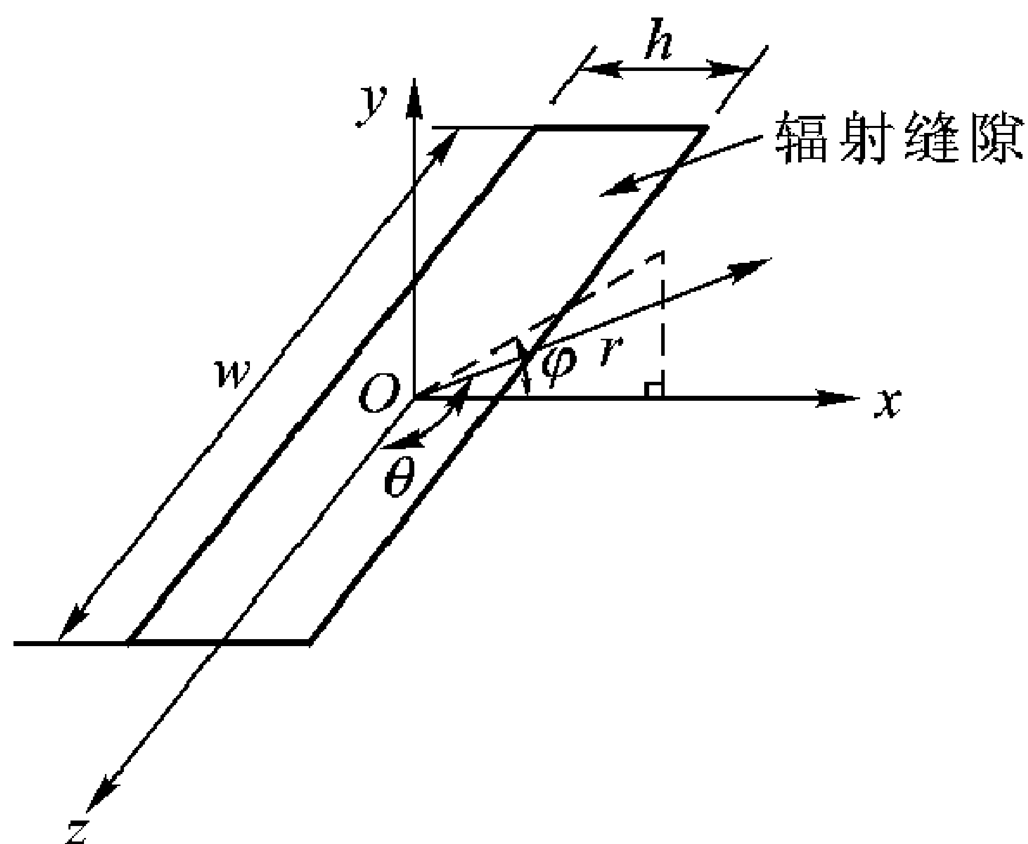


图 8 – 43　缝隙的辐射

$$E_\varphi = -\mathrm{j}2Vkw\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{4\pi r}\frac{\sin\left(\dfrac{kw}{2}\cos\theta\right)}{\dfrac{kw}{2}\cos\theta}\sin\theta \tag{8.8.2}$$

对于间距为 l 的两个隙缝组成的二元阵，因其间距 $l \approx \lambda/2$，又同相激励，并注意到在图 8 – 43 所示坐标系下两阵元间相移为 $kl\sin\theta\cos\varphi$，故当 $\theta = \pi/2$ 时，其 E 面辐射方向性函数为

$$F_T(\varphi) = \cos\left(\frac{kl}{2}\cos\varphi\right) \tag{8.8.3}$$

按上式画出 E 面方向图如图 8 – 44 所示。

注意，矩形微带天线的 E 面方向图由于接地板的反射作用，使得辐射变成单方向的了。

从上面的分析可以看到，微带天线的波瓣较宽，方向系数较低，这正是微带天线的缺点之一。除此之外，微带天线的缺点还有频带窄、损耗大、交叉极化大、单个微带天线的功率容量小等。

尽管如此，由于微带制作阵元的一致性很好，且易于集成，故很多场合将其设计成微带天线阵，而得到了广泛的应用。随着通信和新材料及集成技术的发展，微带天线必将在越来越多的领域发挥它的作用。

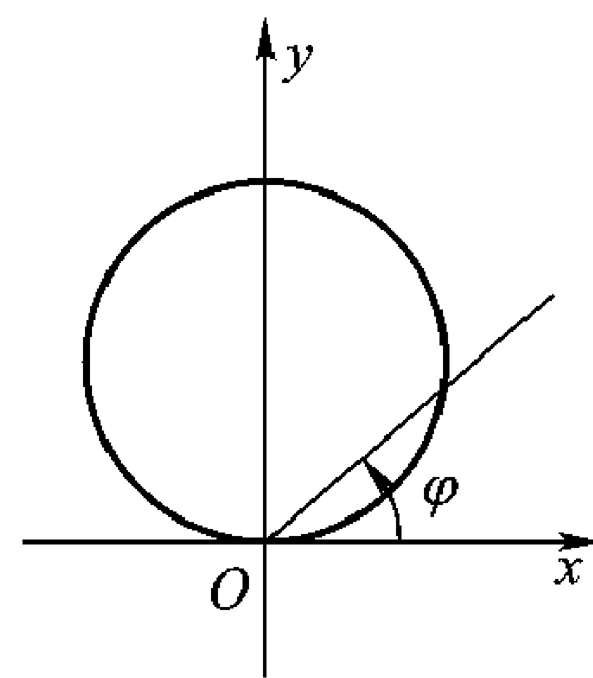


图 8-44 微带天线方向图

8.9 传输方程与雷达方程

8.9.1 传输方程

研究图 8-45 所示无线电通信线路的功率传输关系。

设发射机传输给发射天线的功率为 P_t，发射天线的增益为 G_t，其最大辐射方向指向相距为 r 的接收端，则它在接收天线处产生的功率密度为

$$P_{trans} = \frac{P_t G_t}{4\pi r^2} \tag{8.9.1}$$

设接收天线增益为 G_r，或者有效面积为 A_{er}，其最大接收方向指向发射端，在此情况下，它能接收到的最大功率为

$$P_{Rmax} = A_{er} P_{trans} = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 P_t G_t G_r \tag{8.9.2}$$

式(8.9.2)称为弗里斯(Friis)传输方程。

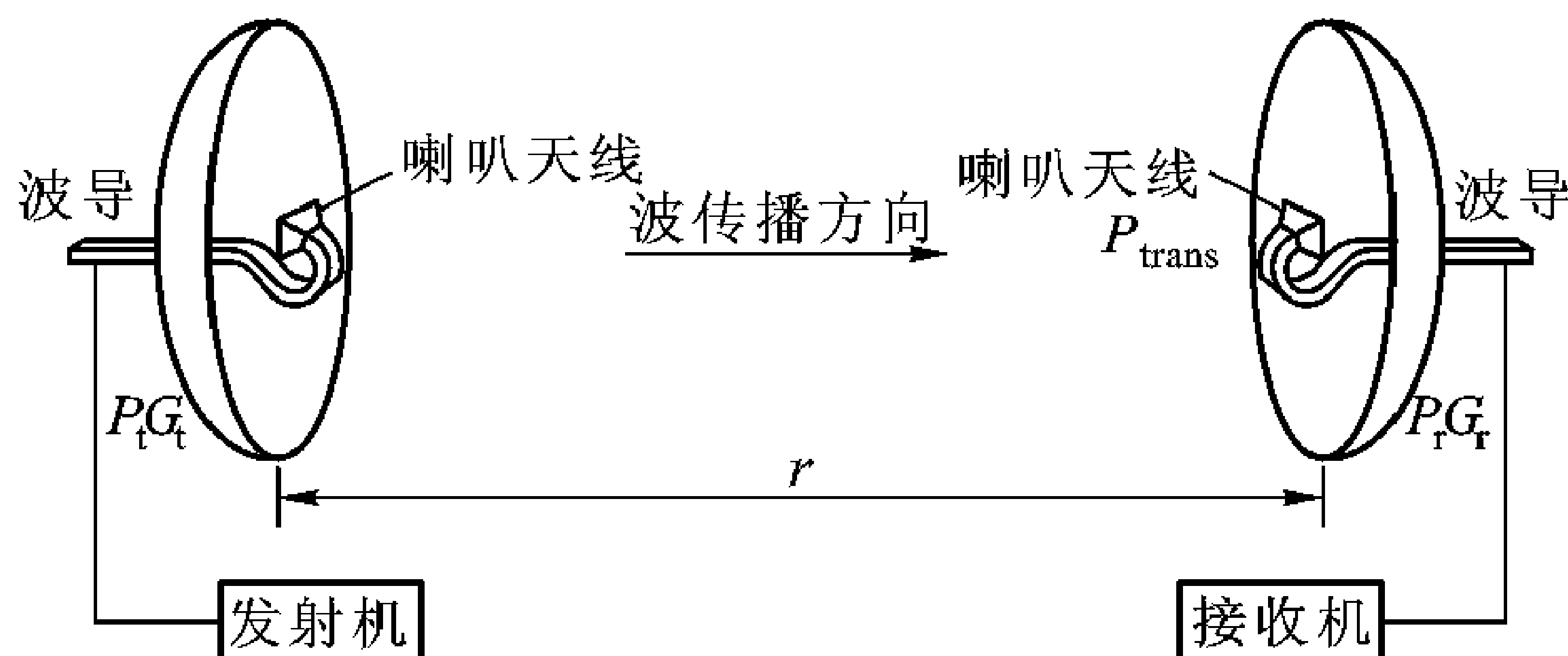


图 8-45 无线电通信线路示意图

作为弗里斯传输方程的具体应用，我们研究一下卫星通信中宇宙站(卫星)

与地球站之间的信号传输方程。参看图 8-46 所示卫星通信的上行线路与下行线路。对于下行线路，信号从卫星上的发射天线发出，经空间传播由地球站的接收天线接收。根据弗里斯方程，接收机输入端的载波信号最大功率由式(8.9.2)表示。

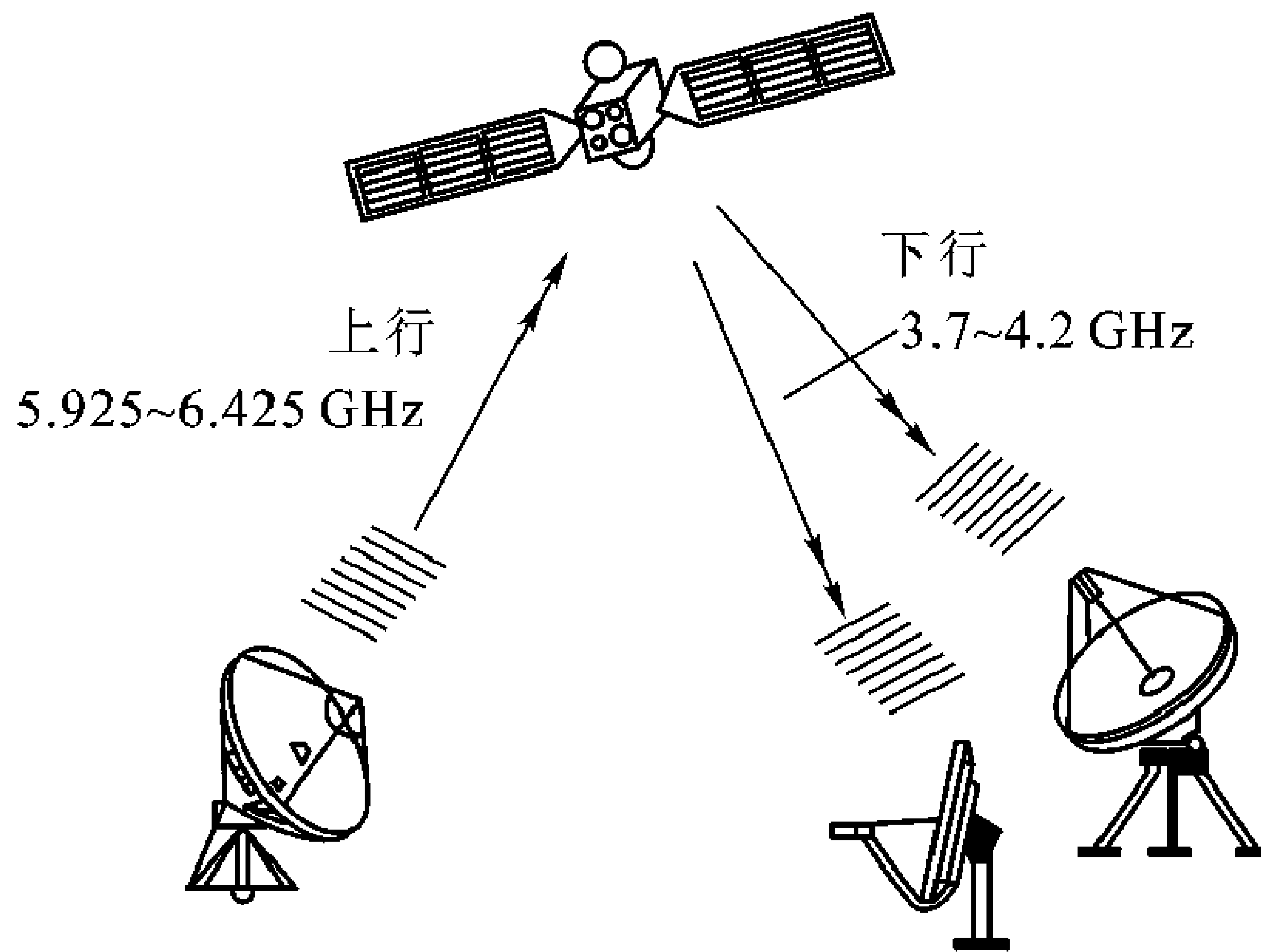


图 8-46　卫星通信的上行与下行线路

实际上，卫星转发器对地面不同方向的辐射效率也不同。定义卫星转发器对地面某一方向的等效全向辐射功率为 *EIRP*。沿最大辐射方向有：$EIRP = P_t G_t$，则地球上某地面站接收机输入端的载波功率为

$$P_R = \left(\frac{\lambda}{4\pi r}\right)^2 \frac{G_r}{L} EIRP = \frac{EIRP}{L_P}\frac{G_r}{L} \tag{8.9.3}$$

式中

$$L_P = \left(\frac{4\pi r}{\lambda}\right)^2 \tag{8.9.4}$$

称为自由空间传播损失；L 为附加的其他损失，如降雨损失，空气吸收损失及馈线损失等。例如，亚洲一号卫星北部波束对上海地区的 *EIRP* 为 36 dBW，对新疆的阿勒泰地区为 34 dBW，而对黑龙江的漠河地区只有 31 dBW。

卫星接收系统的接收质量取决于载波功率 P_R与噪声功率 P_N之比。设 T_{sys}为接收系统的等效噪声温度，则总噪声功率为

$$P_N = kT_{sys}B \tag{8.9.5}$$

式中 k 是波尔茨曼常数(1.38×10^{-23}J/K)，B 为接收系统带宽，T_{sys}的单位为 K。

于是，接收系统的信噪比为

$$\frac{C}{N} = \frac{P_R}{P_N} = (EIRP)\frac{G_r}{kT_{sys}BL_PL} \tag{8.9.6}$$

式(8.9.6)也称为下行传输方程。式中 G_r/T_{sys}称为接收系统的品质因数。

8.9.2 雷达方程

图 8-47 是雷达系统示意图。该系统微波功率的发送和目标回波信号的接收共用一个天线，这个功能是通过天线开关实现的。雷达发射微波功率时，天线开关使雷达接收系统与天线隔离，微波功率不会串扰到接收部分，而在接收目标回波信号时，天线开关又使雷达发射系统与天线断开，因而回波信号只进入接收机。

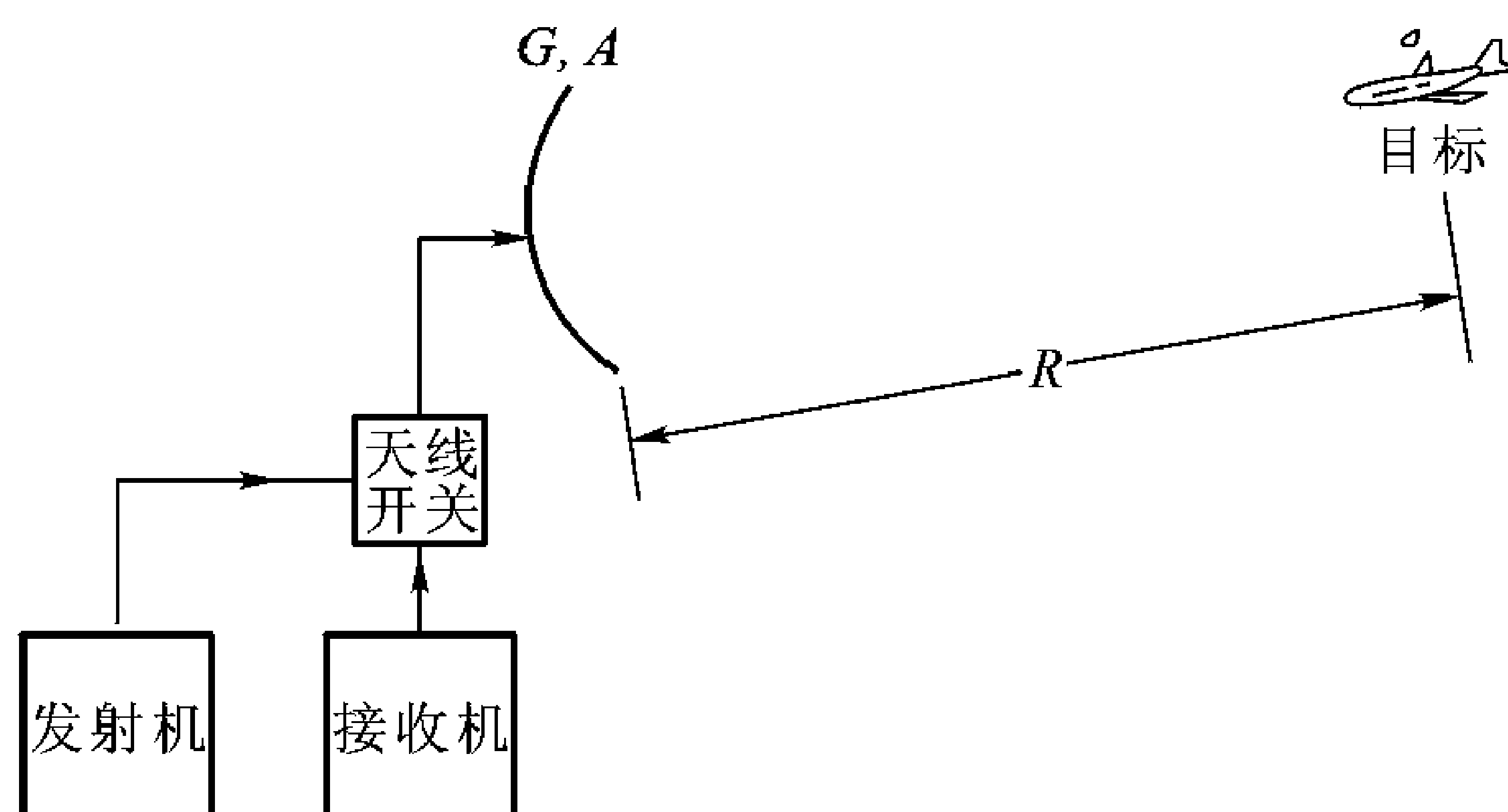


图 8-47 基本雷达系统

设 G 为天线增益，距天线 r 处由天线辐射来的脉冲功率密度为

$$P_{trans}=\frac{P_t G}{4\pi r^2} \tag{8.9.7}$$

如目标离开天线距离为 R，则目标处功率密度为

$$P_{target}=\frac{P_t G}{4\pi R^2} \tag{8.9.8}$$

式中 P_t为天线发送功率。

目标雷达截面 σ 既是目标接收面积的度量，也反映目标的辐射特性。给定方向的目标散射截面定义为某一指定方向散射波强度乘 $4\pi r^2$ 与极化方向给定的入射平面波单位面积功率之比。此处 r 是以目标为起始点，下一章结合瑞利散射进一步讨论。对于直径 a 远大于波长的金属球，雷达截面为$(\pi a^2)/4$，对于与雷达辐射波束垂直的平板，雷达截面为

$$\sigma_{平板}=\frac{4\pi A_\sigma^2}{\lambda^2} \tag{8.9.9}$$

式中 A_σ 为平板的面积。由目标反射并到达天线的功率密度为

$$P_{rec}=\frac{P_t G}{4\pi R^2}\left(\frac{\sigma}{4\pi R^2}\right) \tag{8.9.10}$$

接收机接收到的功率为

$$P_R = P_{rec}A_e = P_{rec}\frac{\lambda^2 G}{4\pi}$$

或

$$P_R = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4} \tag{8.9.11}$$

将 $G = 4\pi A_e/\lambda^2$ 代入式(8.9.11)，得到 P_R的两种表达式

$$P_R = \frac{P_t G A_e \sigma}{(4\pi)^2 R^4} \tag{8.9.12}$$

或

$$P_R = \frac{P_t {A_e}^2 \sigma}{4\pi \lambda^2 R^4} \tag{8.9.13}$$

粗看式(8.9.11)～(8.9.13)，看不出 P_R与波长或频率有相同的依赖关系。式(8.9.13)提供的关系最清楚，当天线大小与目标雷达载面相同时，接收功率与频率平方成比例。

如果定义 P_{Rmin}是接收机最小可检测功率，则由式(8.9.11)得到雷达作用最大距离为

$$R_{max} = \left[\frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 P_{Rmin}}\right]^{1/4} \tag{8.9.14}$$

实际目标是相当复杂的，其表面构成既有平面又有曲面，不仅曲率半径不一致，辐射特性也不一样。所以目标雷达截面要凭经验估计或通过缩尺模型的实测得到。即使对于同一目标，其雷达截面从不同的角度测量也可能相差数十分贝，如正对飞机飞行方向，飞机雷达截面只有 1 m^2，而在其侧面方向，雷达截面可达 100 m^2。有关目标雷达截面 σ 及天线有效面积 A_e本章不再深入讨论。

本章要点

- 只有根据应用要求能定向且有效发射和接收特定极化电磁波的装置才能叫天线。天线的方向性可用方向性函数或方向图表示，描述方向性的参数有天线增益 G 或方向性 G_D，波束宽度、旁瓣电平等。为了能有效发送和接收电磁波，天线的输入阻抗要与馈线的阻抗匹配。
- 天线的互易性使同一天线既可作发送用又可作接收用，但并不是所有天线都是互易的。
- 引入矢量位 $\boldsymbol{A}$ 和标量位 Φ 后，天线辐射的电磁场问题的求解转化为先求 $\boldsymbol{A}$ 和 Φ，因为 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{E} = -j\omega\boldsymbol{A} - \nabla\Phi$，所以可由 $\boldsymbol{A}$ 和 Φ 求$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$。
- 矢量位 A 和 Φ 满足亥姆霍兹方程$(\nabla^2 \times k^2)\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{J}$，$(\nabla^2 + k^2)\Phi = -\rho_v/\varepsilon$，

其解在无界均匀介质中十分简单，有

$$A = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J(r')\,e^{-jk|r-r'|}}{|r - r'|}dV'$$

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V \frac{\rho_v(r')\,e^{-jk|r-r'|}}{|r - r'|}dV'$$

- 电基本振子、磁基本振子是最基本的单元天线，更复杂的天线可看成基本振子天线的组合。
- 电基本振子(赫兹电偶极子)辐射场为

$$H = \frac{1}{\mu}\nabla \times A = \varphi_0 \frac{jkI\Delta l e^{-jkr}}{4\pi r}\left(1 + \frac{1}{jkr}\right)\sin\theta$$

$$E = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla \times H = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{jkI\Delta l e^{-jkr}}{4\pi r}\left\{r_0\left[\frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2}\right]2\cos\theta + \theta_0\left[1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2}\right]\sin\theta\right\}$$

磁场只有 φ 分量，电场有 r、θ 两个分量。场在 φ 方向没有方向性，在电矩 $\boldsymbol{p}$ 的方向没有辐射，与电矩 $\boldsymbol{p}$ 垂直的方向辐射最强。
- 线天线辐射的场可由电基本振子辐射的场乘上 $U(\theta)$得到，线天线阵的辐射的场可由线天线辐射的场乘上阵因子 $F(\theta, \varphi)$得到。
- 利用电与磁的对偶原理，可以从电基本振子辐射的场得到磁基本振子辐射的场，可以从线天线辐射的场得到裂缝天线辐射的场，也可以从线阵天线得到口径天线辐射的场。
- 相控阵天线用电子方法控制各单元天线激励电流的相位实现所要求的方向性以及波束扫描。
- 微带天线可视为一段长为 l（一般为 $\lambda/2$）、宽为 w、基片厚度为 h 的两端断开的微带传输线。两开路端电场垂直分量方向相反，在远区产生的场反相相消，而水平分量方向相同，远区产生的场同相叠加。因此两开路端可视为同相激励的两个隙缝天线。
- 传输方程给出无线通信系统功率传输关系。雷达方程有多种表达式，在天线大小与雷达目标截面相同的情况下，雷达接收功率与频率平方成正比。

习题

8.1　假定波束宽度分别为 1.5°、3°，问以分贝表示的天线增益为多少？

8.2　已知长为 l（$l = \lambda/2$）的直导线，在其上给予振幅以某种形式分布的交变电流，它在空间产生的磁矢位 A 为：$A = A_z z_0 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi k r_0}\sin\frac{kl}{2}\frac{\cos\left(\frac{kl}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}e^{-jkr_0}z_0$，试求与其相应的辐射场 E 与 H。

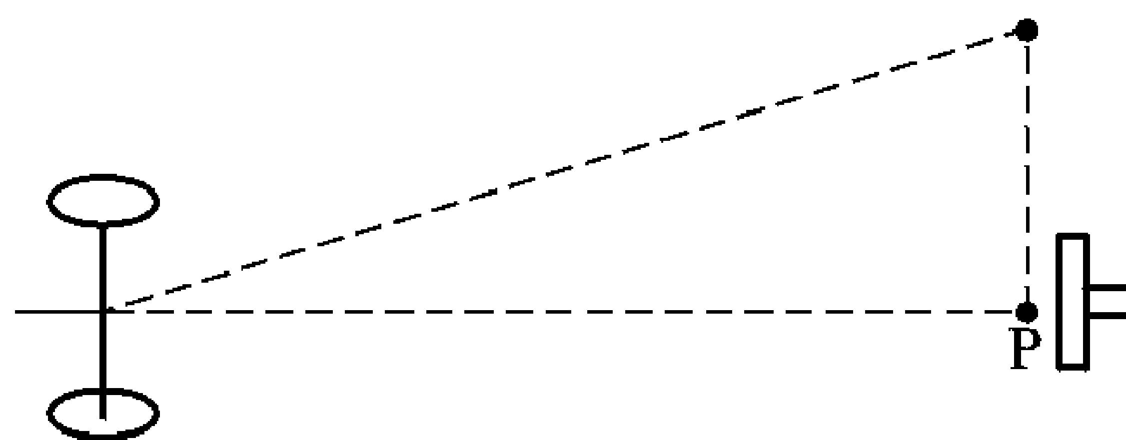
8.3 天线发射功率为 5 kW，方向性为 36 dB，问距离天线 25 km 处，功率密度是多少？

8.4 已知某天线的辐射功率为 100 W，方向性系数 $G_D=3$，问：

(1) $r=10$ km 处，最大辐射方向的电磁强度振幅为多少？

(2) 若保持辐射功率不变，要使 $r=20$ km 处的场强等于原来 $r=10$ km 处的场强，应选取方向性系数 G_D 等于多少的天线？

8.5 如题图 8.5，远离垂直放置的电容平板天线 15 km 处 P 点有一垂直放置偶极子接收天线，测得 P 点电场为 10 mV/m，问该天线由 P 点垂直上移 3 km 测得的最大场强是多少？



题图 8.5

8.6 根据某一应用要求远离天线 1 km 处场强 $\boldsymbol{E}=1$ V/m，求以下三种情况下天线发射功率：

(1) 各向同性天线；

(2) 短偶极子天线；

(3) 半波振子天线。

8.7 两个半波偶极子天线平行放置相距 500 km，一个作发送，一个作接收，两天线之间连线与偶极子垂直，即 $\theta=90°$，发射天线发射功率 1 kW，频率 200 MHz，接收天线能接收到多少功率？

8.8 如果上例接收天线不是对准入射波，即 θ 不是 90°，而是倾斜一个角度，比如 $\theta=60°$，求上例接收天线接收到的功率。

8.9 在相距为 1.5 km 的两个站之间进行通信，每站均以半波振子为天线，工作频率为 300 MHz。若一个站发射功率为 100 W，则另一站的匹配负载中能收到多少功率？

8.10 一架设在地面上的水平振子天线，工作波长 $\lambda=40$ m，若要在垂直于天线的平面内获得最大辐射仰角 $\Delta=30°$，试计算该天线应架设多高？

8.11 两等幅馈电的半波振子沿 z 排列，且

(1) $d=\lambda/4$，$\varphi=\pi/2$

(2) $d=\lambda/4$，$\varphi=-\pi/2$

它们的辐射功率都为 1 W，计算上述两种情况在 $x-y$ 平面内 $\varphi=30°$、$r=1$ km 处场强值。

8.12 无限大理想导体平面上方距平面 h 处垂直放置一半波振子天线，求远区辐射场及方向因子。

8.13 由两同相激励的偶极子天线组成的天线阵，间距 $d=1.5\lambda$，求 $\theta=\pi/2$ 平面内的辐射方向图。

8.14 一线天线阵共有 40 个单元，每单元相距 $\lambda/2$，各单位激励电流大小相等且同相，计算波束宽度及第一个零点位置。

8.15 假设有一位于 $x-y$ 平面内尺寸为 $a\times b$ 的矩形口径，口径内场为均匀相位和余弦振幅分布：$f(x)=\cos(\pi x/a)$，并沿 y 方向线极化，试求：

(1) $x-z$ 平面内方向性函数；

(2) 主瓣的半功率波瓣宽度；

(3) 第一个零点的位置；

(4) 第一旁瓣电平。

8.16 假定由于口面场非均匀分布，抛物面天线有效面积只是实际面积的 60%，如要得到 45 dB 增益，计算以下两种情况的抛物面天线直径：

(1) 500 MHz;

(2) 40 GHz。

8.17 大小分别为 $I_1 l_1$、$I_2 S_2$ 的电基本振子和磁基本振子同频率、同方向、并放置在同一点，求辐射电场。

8.18 假设坐标原点上有一电矩为 $\boldsymbol{p}=z_0 p$ 的电基本振子和磁矩为 $\boldsymbol{m}=z_0 m$ 磁基本振子，问在什么条件下两天线辐射的电磁波在远区相叠加为一圆极化电磁波。

8.19 利用互易定理证明紧靠理想导体表面上的切向电流无辐射场。

8.20 如果雷达基本参数是：$P_T=1$ MW，$f=5$ GHz，$G=45$ dB，$P_{Rmin}=-115$ dBm（dBm 是相对于 1 mW 的 dB 数），目标雷达截面 $\sigma=1\ m^2$，计算雷达最大作用距离。

8.21 编一个计算程序，计算相控阵天线的方向图，天线单元数为 10，间距 $d=\lambda/4$。

第9章　波动专题*

麦克斯韦方程揭示的交变电磁场的运动规律极其丰富，前面几章讨论的只是其最基础的部分，也不全面。本章将选择有关电磁波的其他一些重要专题作简要介绍，以供有兴趣的读者选读。本章 9.1 节利用天线理论解释瑞利散射；9.2 节介绍傅里叶光学和全息；9.3 节给出比平面波更复杂的高斯光束的传播特点；9.4 节分析多普勒效应；9.5、9.6 节给出电各向异性介质与磁各向异性介质中平面波的传播及其应用。

9.1　瑞利散射

电磁波传播过程中碰到障碍物将发生散射，散射过程及其所表现的特性与障碍物的大小有强烈的依赖关系。很多情况下，障碍物可视为球体。当障碍物为介质球且其直径比波长小得多时，介质球对电磁波的散射叫瑞利散射。而当介质球直径可与波长比拟时，介质球对电磁波的散射就叫做 Mie 散射。

本节讨论瑞利散射。设介质球的半径为 a，介电常数为 ε，入射波为均匀平面波。散射的基本机理是，当均匀平面波照射介质小球时，将在介质小球内感应出电偶极子，这个偶极子按入射平面波频率振荡，这个振荡偶极子相当于一个偶极子天线向空间各个方向辐射电磁能量，即所谓散射场。根据这一机理，介质小球的散射场可用式(8.3.6)、(8.3.7)表示，则有

$$H_\varphi = \frac{A\sin\theta}{\eta_0 r^3}[(\mathrm{j}kr) + (\mathrm{j}kr)^2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{9.1.1a}$$

$$E_r = \frac{2A\cos\theta}{r^3}(1+\mathrm{j}kr)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{9.1.1b}$$

$$E_\theta = \frac{A\sin\theta}{r^3}[1 + (\mathrm{j}kr) + (\mathrm{j}kr)^2]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr} \tag{9.1.1c}$$

式中 A 是常数，$\eta_0=\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$为自由空间波阻抗。坐标原点选在球心，见图9－1。所以入射平面波可表示为

$$\boldsymbol{E} = E_0\ (\boldsymbol{r}_0\cos\theta - \boldsymbol{\theta}_0\sin\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{9.1.2}$$

因为介质球相对于波长很小很小，介质球附近，$kr \ll 1$ 成立，所以介质球附

---

* 本章 9.1～9.4 节主要参考 Liang Chi Shen，Jin Au Kong“Applied Electromagnetism”。

近场，按式(9.1.1b和c)可得

$$\boldsymbol{E}_s=\frac{A}{r^3}(\boldsymbol{r}_0 2\cos\theta+\boldsymbol{\theta}_0\sin\theta) \tag{9.1.3}$$

在介质球内部被激励的电场与入射波平行，其幅度设为 B，可表示为

$$E_i=B(\boldsymbol{r}_0\cos\theta-\boldsymbol{\theta}_0\sin\theta) \tag{9.1.4}$$

在 $r=a$ 的介质球面上，电场 $\boldsymbol{E}$ 切向分量，电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 的法向分量必须连续，由此可得

$$-E_0+\frac{A}{a^3}=-B$$

$$E_0+\frac{2A}{a^3}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}B$$

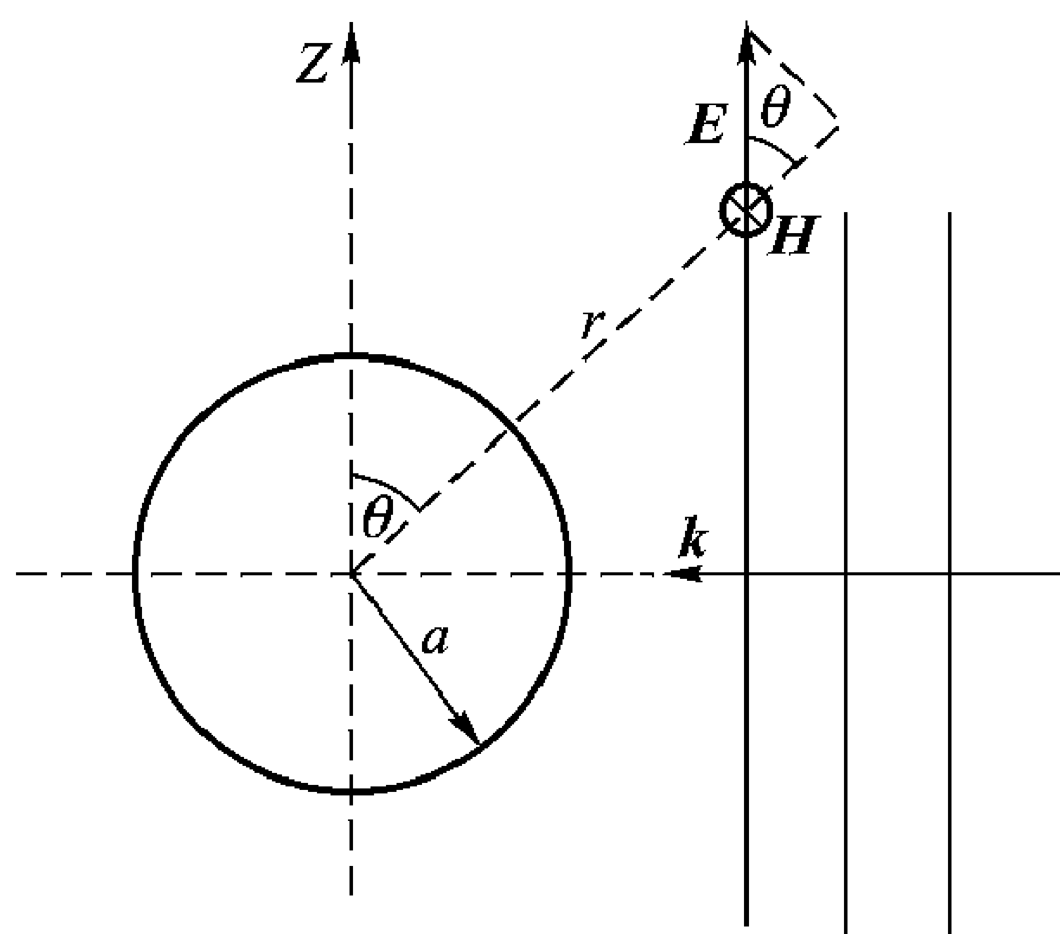


图 9-1 均匀平面波照射介质球

在介质球面上，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=ka<<1$，所以 $e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\approx 1$。解上面两式可得

$$A=\left(\frac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon+2\varepsilon_0}\right)a^3E_0 \tag{9.1.5}$$

将式(9.1.5)代入式(9.1.1)即得到瑞利散射场具体表达式。

现在考虑瑞利散射远区场。在远区满足 $kr>>1$ 条件，根据式(9.1.1)可得

$$H_\varphi=-\frac{E_0(\varepsilon-\varepsilon_0)k^2a^3}{\eta_0(\varepsilon+2\varepsilon_0)r}\sin\theta e^{-jkr}=\frac{1}{\eta_0}E_\theta \tag{9.1.6}$$

图 9-2 为式(9.1.6)表示的 E_θ 的图解，叫做介质小球散射波方向图。注意，散射波在各个方向不均匀，在前向和后向($\theta=90°$，$-90°$)，散射最强。从图 9-2 还可看出，当入射平面波 z 方向极化时，散射波的极化方向随空间位置而变，图 9-2 中 OA、OB、OC 方向散射波沿图中箭头方向极化，其强度分别正比于 OA、OB、OC 的长度，所以对波起散射作用的小球对均匀入射平面波有“去极化”作用。

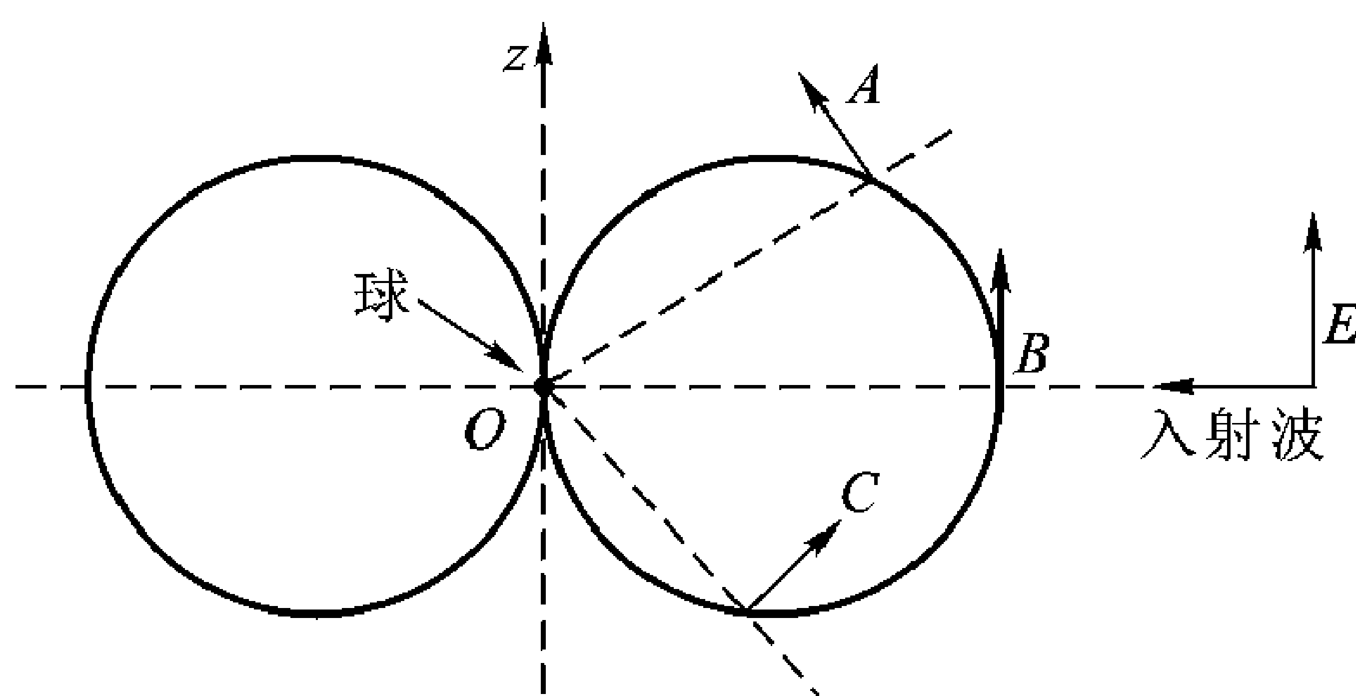


图 9-2 介质小球的散射场图形

总的散射截面

为了计算介质小球散射的总功率，在 $kr>>1$，式(9.1.6)成立的条件下，

对坡印廷矢量

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{E_0^2 (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 k^4 a^6}{2\eta_0 (\varepsilon + 2\varepsilon_0)^2 r^2} \sin^2\theta \boldsymbol{r}_0 \tag{9.1.7}$$

从 0 到 π 范围内对 θ 积分，可得总散射功率

$$P_{总} = \int_0^{\pi} [\langle \boldsymbol{S} \rangle \cdot \boldsymbol{r}_0] 2\pi r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 k^4 a^6 \left(\frac{E_0^2}{2\eta_0}\right) \tag{9.1.8}$$

定义总的散射功率 $P_{总}$ 与入射功率密度（$E_0^2/2\eta_0$）之比为总的散射截面 $\sigma_{总}$，有

$$\sigma_{总} = \frac{8}{3}\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 (k^4 a^4)(\pi a^2) \tag{9.1.9}$$

式(9.1.9)表示散射功率正比于频率的 4 次方，这个定律是著名物理学家瑞利发现的，为纪念他，就叫做瑞利散射。

例 9－1 假定雨滴为球形，直径 3 mm，求频率 $f = 10$ GHz 时总散射截面。（10 GHz 时水的 $\varepsilon = 61\varepsilon_0$。）

解： 波长 $\lambda = \frac{3\times10^8}{10\times10^9} = 0.03$ m，比雨滴半径大 20 倍，符合瑞利散射条件，根据式(9.1.9)得到

$$\frac{\sigma_{总}}{\pi a^2} = 0.024$$

因此总的散射截面只有球几何截面 πa^2 的 0.024 倍。

后向散射截面

总的散射截面对于雷达检测目标用处不大。雷达一般测量目标后向散射场，所以从雷达应用角度出发需要定义一个跟方向性有关的散射截面。

给定方向目标的散射截面定义为某一指定方向散射波辐射强度乘 $4\pi r^2$ 与极化方向给定的入射平面波单位面积功率之比。对于图 9－1 所示的 z 方向极化的平面波被介质小球散射的情况，散射截面 $\sigma(\theta)$为

$$\sigma(\theta) = \frac{4\pi r^2 \langle \boldsymbol{S} \rangle \cdot \boldsymbol{r}_0}{\frac{1}{2}(E_0^2/\eta_0)} = 4\pi\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}\right)^2 k^4 a^6 \sin^2\theta \tag{9.1.10}$$

由式(9.1.10)可见，散射功率密度在赤道面（$\theta = 90°$）最强，包括前向和后向两个方向，正对着目标方向的散射截面 σ 值叫做后向散射截面。当雷达波束照射到目标时，后向散射截面决定了雷达能检测到的总功率强度。

例 9－2 求例 9－1 中雨滴的后向散射截面。

解： 将有关数据代入式(9.1.10)得到

$$\frac{\sigma\ (\pi/2)}{\pi a^2}=0.035$$

所以雨滴的后向散射截面是它几何截面的 0.035 倍。

例 9－3 求 $f=10$ GHz 时 3 mm 直径冰球的后向散射截面。

解： $f=10$ GHz 冰球的介电系数为 $3.2\varepsilon_0$。所以

$$\frac{\sigma\ (\pi/2)}{\pi a^2}=0.007$$

因此同样大小的雨滴和冰滴，后向散射截面有 5 倍之差别。在 10 GHz 频率下，对平面波的散射，小水滴比冰滴更有效。

光的散射

光在非均匀媒质中传播遇到质点将会散射。当质点比光波长小得多时，瑞利散射适用。

作为光散射的例子，考察一透明的玻璃管，里面充满水，滴入一滴牛奶，使水混浊。光从右端照射透明玻璃管(见图 9－3)从透明玻璃管的侧面可观测到散射光。

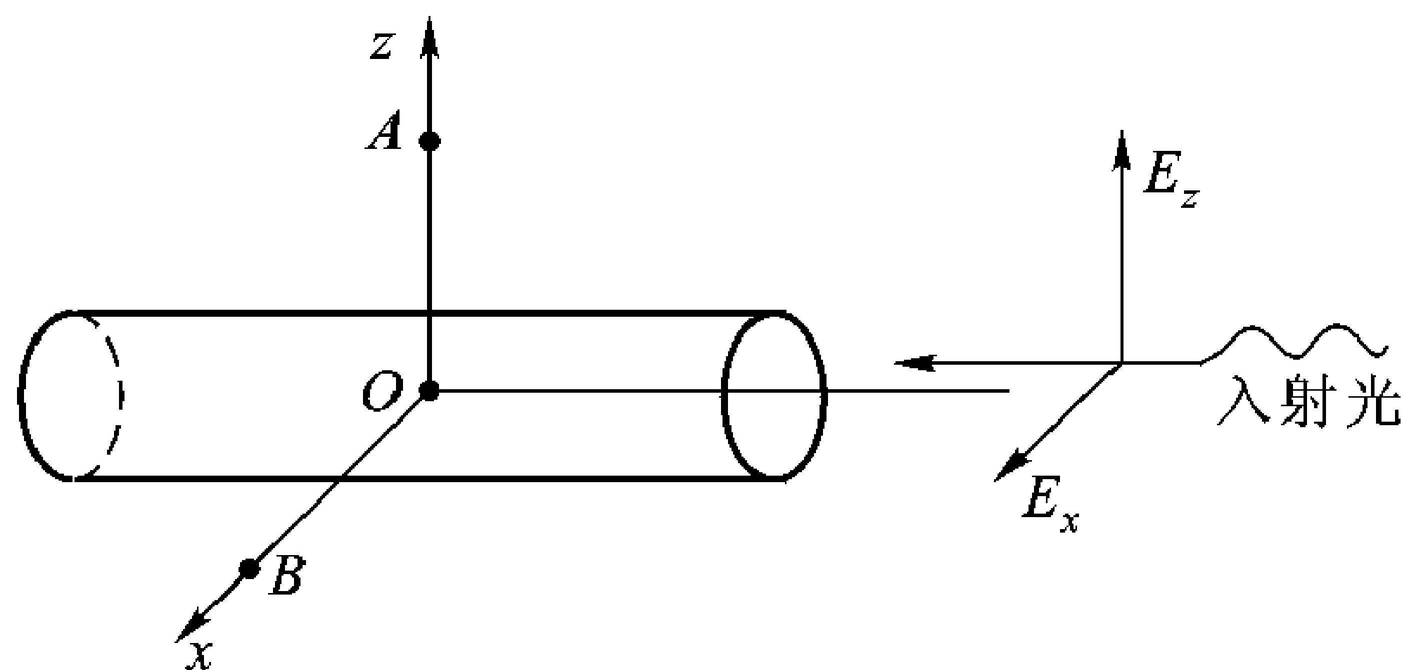


图 9－3 光被溶液中质点散射，从 A 点 B 点检测散射光，其强度与照射光的极化有关

假定入射光沿 z 方向极化，根据式(9.1.6)，对于 A 点的观察者，$\theta=0$，他所检测到的散射光强度比 B 点观察者($\theta=90°$)要弱得多。反之，如果入射光沿 x 方向极化，B 点观察者检测到的散射光比 A 点观察者检测到的散射光弱得多。这是因为式(9.1.6)中 θ 根据入射波极化方向定义。

如果入射光是非极化光，观察者 B 又戴了一副极化的太阳镜，其极化方向平行于 z 轴，他将会注意到，如果太阳镜转过 90°，透明玻璃管中发出的光将逐步消失。

天空为什么是蓝的

太阳光穿过大气层时将被散射，根据式(9.1.9)，质点对波谱中高频分量的散射比对低频分量的散射更有效，紫光的频率约 6.9×10^{14} Hz，而红光的频率约 4.6×10^{14} Hz，所以

$$\frac{\sigma_{总}(紫光)}{\sigma_{总}(红光)}=\left(\frac{6.9}{4.6}\right)^4=5.1$$

换句话说，大气质点对紫－蓝光的散射比对黄－红光的散射差不多要强5倍，所以天空的颜色主要成分是紫色和蓝色，伴有绿色和黄色，红色成分很少。因为人眼对紫色不灵敏，所以人眼的感觉，天空是蓝色的。

光纤的瑞利散射损耗

光纤的损耗一是源于OH根离子、金属离子的吸收损耗，二是源于瑞利散射。光纤的损耗在1.55 μm波长附近最低，已降至0.2 dB/km。

瑞利散射损耗与频率有关。如果波长为1 μm时，瑞利散射损耗为1 dB/km，那么当$\lambda=0.632\ 8\ \mu m$（氦－氖激光），光纤散射损耗为

$$\frac{瑞利散射损耗(\lambda=0.632\ 8\ \mu m)}{瑞利散射损耗(\lambda=1\ \mu m)}=\left(\frac{1}{0.632\ 8}\right)^4=6.24=7.9\ dB$$

所以瑞利散射损耗为7.9 dB/km。

9.2　傅里叶光学和全息

在电路和系统分析中，根据傅里叶理论，一个时变信号，例如电压和电流，可以看成是无数不同频率的时谐信号的叠加。傅里叶变换或傅里叶级数给出这些不同频率时谐信号的幅度。

类似于上面例子，随时间作简谐变化但幅值与空间位置有关的非均匀电磁波也可看成是无数个频率相同但波数（或空间频率）不同的均匀平面波的叠加。这里傅里叶变换是对空间坐标进行的而不是上例中对时间变量展开的。所谓傅里叶光学就是用对空间变量的傅里叶变换分析现代光学问题的理论与技术。

本节基于傅里叶光学证明，对于一个给定幅值分布的非均匀光束将按这样一种方式沿空间传播，即传播一定距离后成为又一非均匀平面波，其幅度恰好是原先那个光波幅度的傅里叶变换。请看下面光被长缝衍射的例子。图9－4给出长缝衍射的几何结构。作为衍射的长缝开在漆黑的屏上，屏放在线极化的光源前面。假定光源与屏的距离足够远，作为衍射的长缝被均匀平面波照射，长缝处的场是均匀的，其光场与入射平面波光场相等，而在漆黑的屏上除长缝外光场处处为零。所以

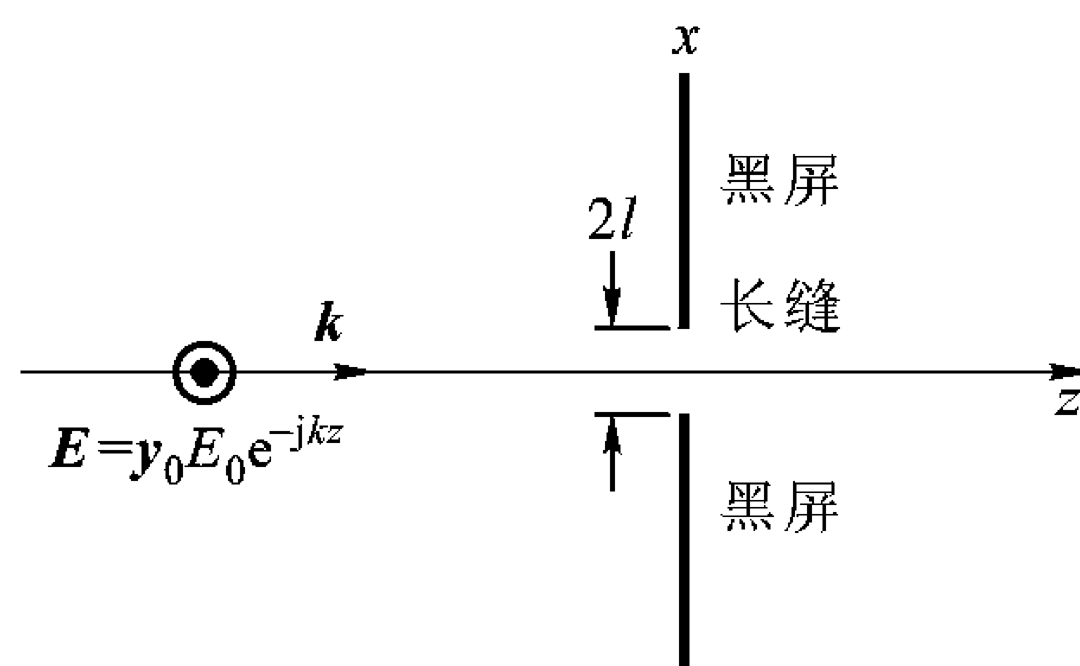


图9－4　波被长缝衍射，场强在$z=0$处是一个方波

正如图 9－5 (a)所示，在 $z=0$ 处，光波的强度分布是一个方波。

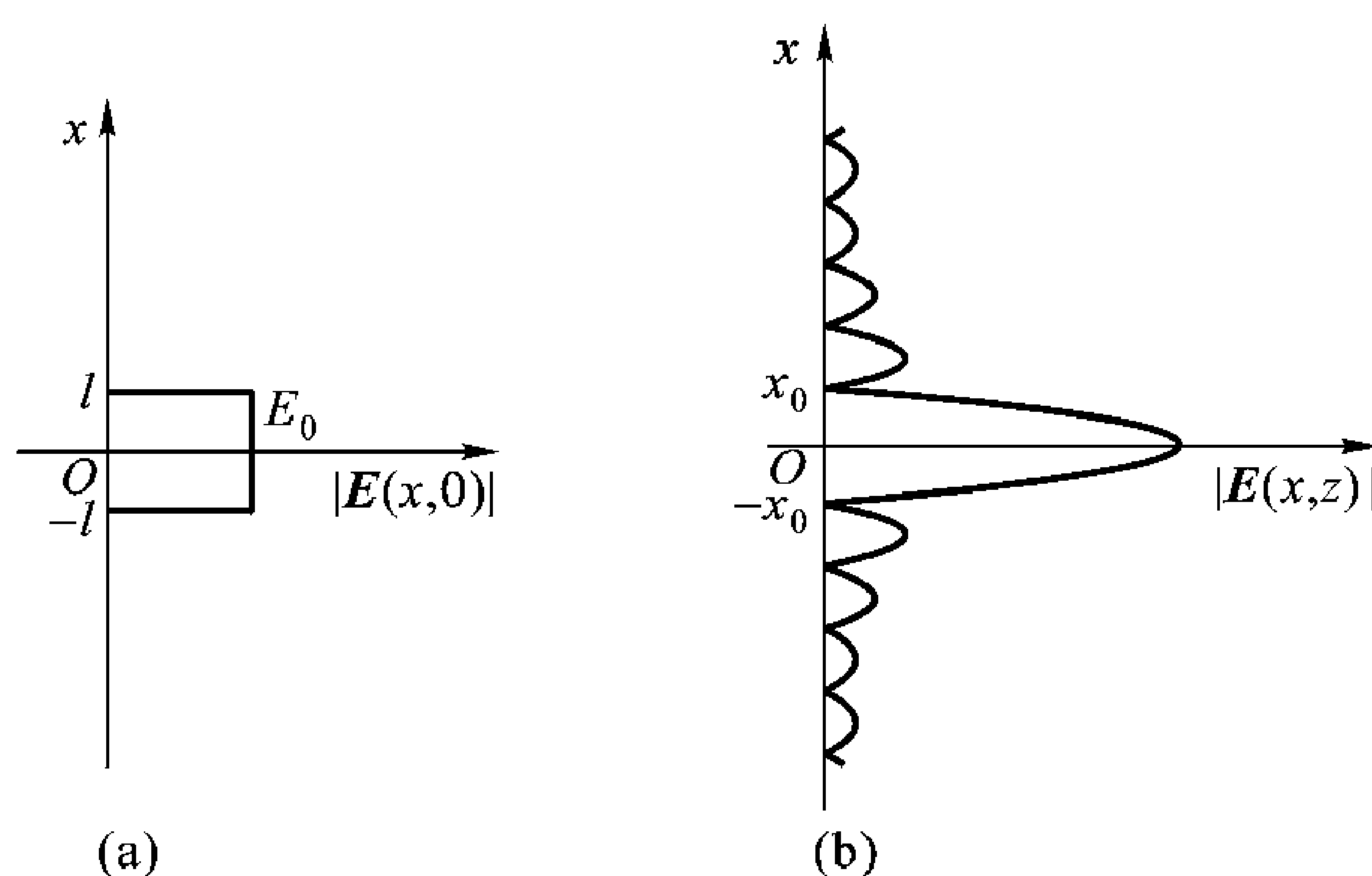


图 9－5　长缝衍射场分布

(a)光波幅度的初始分布　(b)传播一段距离 $x_0=\pi z/kl$ 后光波的幅度分布

我们将证明这个强度分布为方波的电磁波束将被长缝衍射，衍射波场场强在空间分布类似于$\dfrac{\sin x}{x}$分布。

参考图 9－5，可知在 $z=0$ 初始位置

$$\boldsymbol{E}(x,0)=\boldsymbol{y}_0E_0U(l-|x|) \tag{9.2.1}$$

式中 $U(\alpha)$是一个阶跃函数，即当 $\alpha<0$ 时，$U(\alpha)=0$，而当 $\alpha>0$ 时，$U(\alpha)=1$。可以设 $z>0$ 区域电磁波是无数平面波的叠加，有

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{y}_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_xA(k_x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_xx+k_zz)} \tag{9.2.2}$$

在 $z=0$ 处，式(9.2.1)、(9.2.2)相等，即

$$E_0U(l-|x|)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_xA(k_x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_xx} \tag{9.2.3}$$

上式积分就是 $A(k_x)$的傅里叶变换。对式(9.2.3)进行傅里叶反变换，得到 $A(k_x)$

$$\begin{aligned}A(k_x)&=\frac{E_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xU(l-|x|)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_xx}\\&=\frac{E_0l\sin k_xl}{\pi k_xl}\end{aligned} \tag{9.2.4}$$

将式(9.2.4)代回式(9.2.2)得到

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{y}_0\frac{E_0l}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k_x\frac{\sin k_xl}{k_xl}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_xx+k_zz)} \tag{9.2.5}$$

记住 $k_z=\sqrt{k_0^2-k_x^2}$，式(9.2.5)的积分可用数值方法进行近似计算得出。近似计算 $\boldsymbol{E}(x,z)$时，先将变量 k_x 变换为

$$k_x=k\alpha$$

以及

$$\mathrm{d}k_x = k\mathrm{d}\alpha$$

$$\boldsymbol{E}(x,z) = \boldsymbol{y}_0 \frac{E_0 kl}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha \frac{\sin kl\alpha}{kl\alpha} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kx\alpha + kz\sqrt{1-\alpha^2})} \tag{9.2.6}$$

假定 $kl \gg 1$。这个条件意味着图 9-4 中长缝的宽度至少有几个波长。在这一假定下式(9.2.6)积分的第一项只有当 α 很小时才比较重要。因为当 α 很小时，$\sqrt{1-\alpha^2} \approx 1-\alpha^2/2$，此时

$$\boldsymbol{E}(x,z) = \boldsymbol{y}_0 \frac{E_0 kl}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha \frac{\sin kl\alpha}{kl\alpha} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left[kx\alpha + kz\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)\right]}$$

将指数中的项重新排列，得到

$$\boldsymbol{E}(x,z) = \boldsymbol{y}_0 \frac{E_0 kl}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha \frac{\sin kl\alpha}{kl\alpha} \mathrm{e}^{\left[\frac{\mathrm{j}kz}{2}\left(\alpha-\frac{x}{z}\right)^2\right]} \mathrm{e}^{\left[-\mathrm{j}kz-\mathrm{j}\frac{kz}{2}\left(\frac{x}{z}\right)^2\right]}$$

第二个指数项与积分变量 α 无关。离开长缝几个波长，$kz \gg 1$，第一个指数项，除了 $\alpha = x/z$ 附近外，很快地振荡，所以 $\alpha = x/z$ 附近的积分对整个积分的贡献最大，同时 $\sin(kl\alpha)/(kl\alpha)$ 也可用 $(\sin klx/z)/(klx/z)$ 近似，并可移到积分号外，故有

$$\boldsymbol{E}(x,z) = \boldsymbol{y}_0 \frac{E_0 kl \sin(klx/z)}{\pi(klx/z)} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz\left(1+\frac{x^2}{2z^2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{kz}{2}\left(\alpha-\frac{x}{z}\right)^2}$$

上式右边积分可精确求解，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{kz}{2}\left(\alpha-\frac{x}{z}\right)^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{-\mathrm{j}kz}} = \sqrt{\frac{2\pi}{kz}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/4}$$

最后可得

$$\boldsymbol{E}(x,z) = \boldsymbol{y}_0 \frac{E_0 kl}{\pi}\sqrt{\frac{2\pi}{kz}} \frac{\sin klx/z}{klx/z} \mathrm{e}^{\left[-\mathrm{j}kz\left(1+\frac{x^2}{2z^2}\right)+\frac{\mathrm{j}\pi}{4}\right]} \tag{9.2.7}$$

式(9.2.7)是在 $kl \gg 1$，$kz \gg 1$ 的条件下近似得出的。图 9-5 是当波传播相当长的距离后其幅值分布的图解，由此可见，衍射长缝处波的幅值分布与其衍射场的幅值分布刚好构成傅里叶变换与反变换关系，第一个零点发生在

$$x_0 = \frac{\pi z}{kl}$$

这个值正是使式(9.2.7)中 $\sin A/A$ 取零的值。

如果把长缝看成口径天线，那么本节得到的结果与口径天线分析得到的结果是一致的。

全息

分析长缝衍射时，我们先设定长缝所在平面 $z=0$ 的光场分布。从这个场

出发可计算任何地方的场，换句话说在某一平面如果光场的幅值和相位分布指定后，即可求出空间任何地方的场。下面要讨论一种所谓图像的全息记录与显示就是根据上面所述的原理。

图 9－6 给出一个物体被光源照明的情形，显然，照射光会被所照射的物体散射，某些射散光被观察者检测到。观察者的双眼从略为不同的角度观察物体，人脑可以检测到从左眼、右眼来的信号的差别。观察者对物体三维图像的感觉就是根据这一差别得出的。

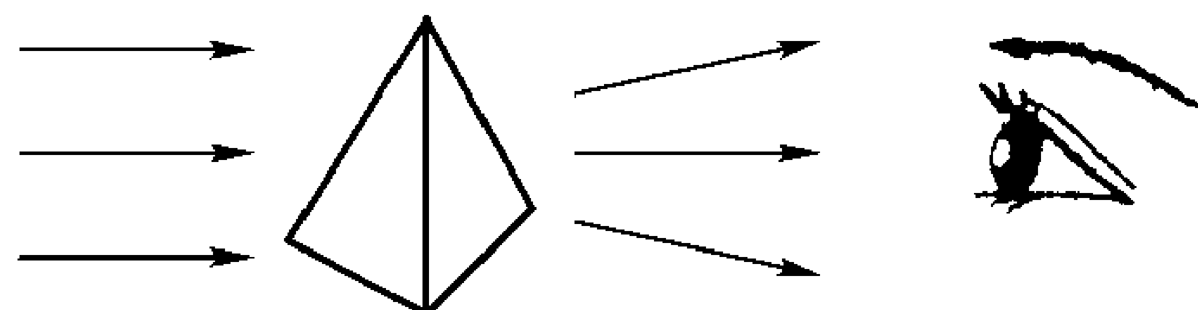


图 9－6　光照射物体并被散射，某些散射光被观察者检测到并聚焦到视网膜上成像

现在让我们在物体与观察者之间放一个虚构的屏（图 9－7），并假定在图像的记录模式中该虚构的屏能忠实地将屏所在平面光场的幅值和相位记录下来，而在图像的显示模式中该虚构的屏能重新恢复屏所在平面光场的幅值和相位。只要屏能不断地记录并恢复屏所在平面入射光场的幅值和相位，观察者就能继续见到这个三维物体。很遗憾，迄今还没有找到一个屏能同时记录入射光

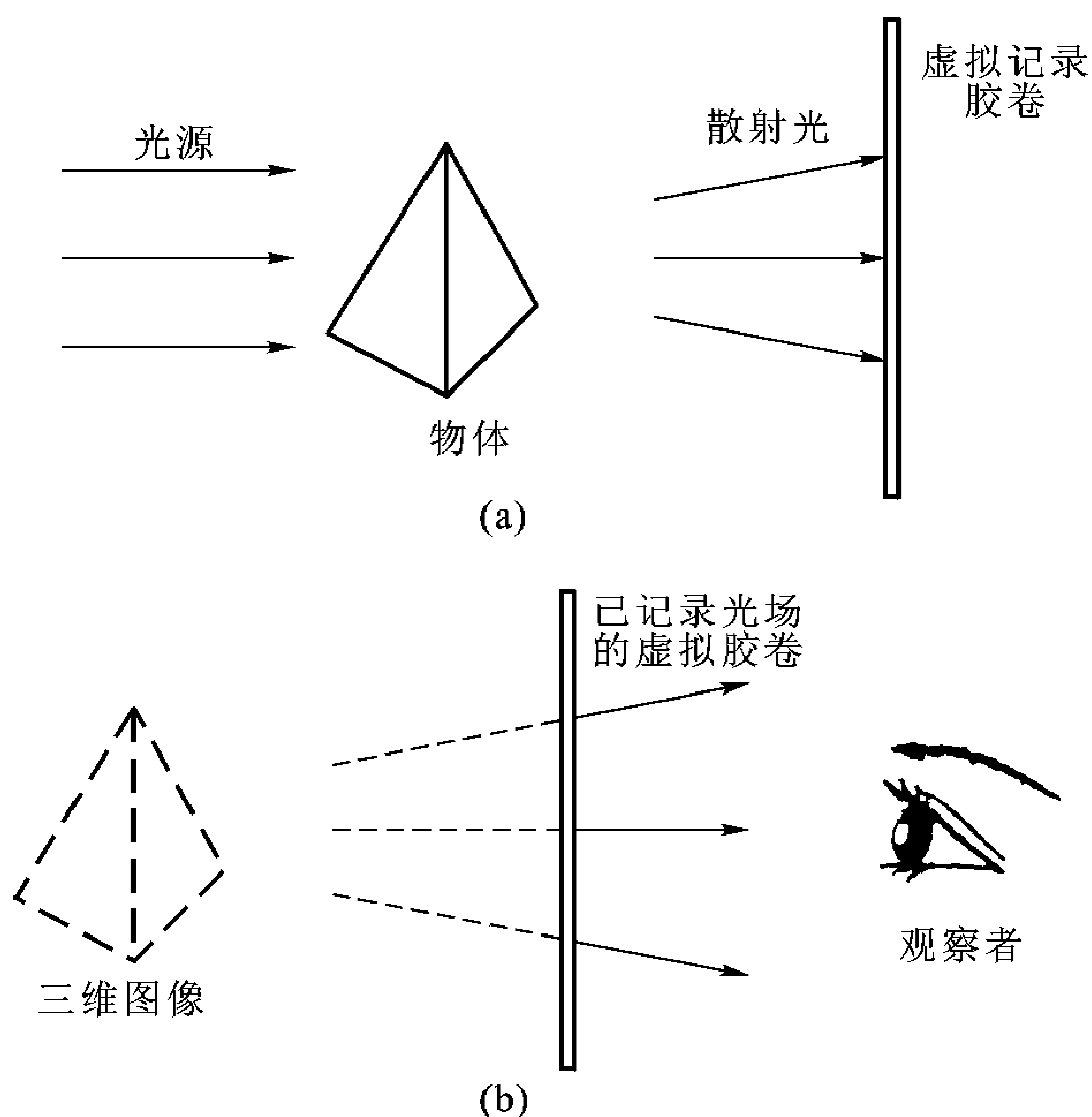


图 9－7　虚拟胶片的记录与显示

(a) 一个虚构的胶片能记录从一个物体来的光的幅值和相位

(b) 这个虚构的胶片又恢复所记录光的幅值和相位

场的幅值和相位。我们常用的胶片只能记录光场的幅度，不能记录光场的相位。所以用这种胶片只能得到二维图像。但是用所谓全息记录的巧妙方法，人们可在普通胶卷上既记录光场的幅值又记录光场的相位。当记录过程完成后，即使所观察的物体被移去，观察者仍能看到物体的三维图像。

记从物体散射出来并入射到屏的光（见图 9－8）为

$$S(x,y)=a_s(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_s(x,y)}$$

$a_s(x,y)$即光场的幅度，$\varphi_s(x,y)$即光场的相位。同时，从源发出的另一束

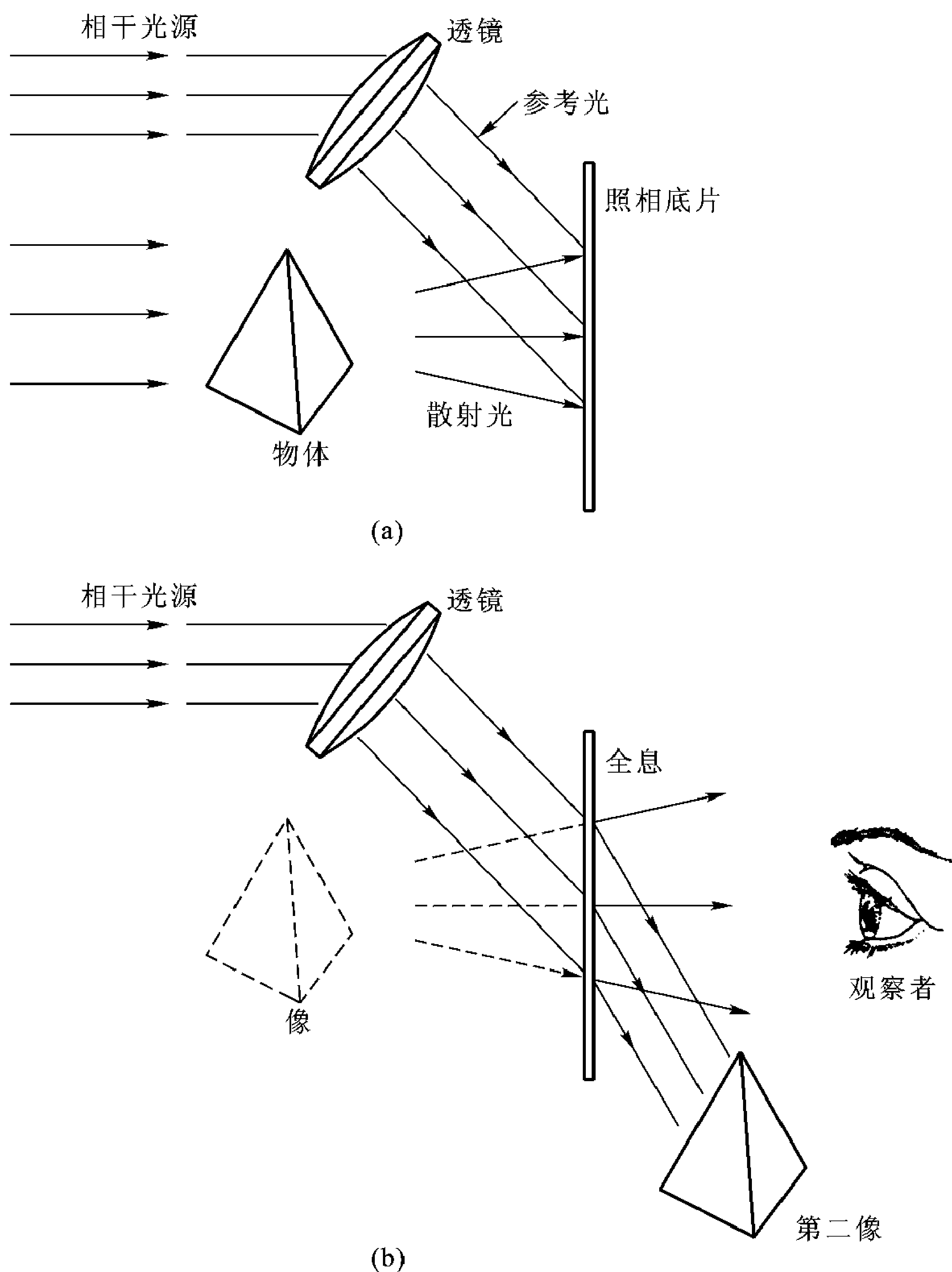


图 9－8 全息

(a) 得到全息图 (b) 显示三维图

光，叫做参考光，也照射该屏，参考光记为

$R(x, y) = a_r(x, y)e^{-j\varphi_r(x, y)}$所以在屏上总的光场为

$$T(x, y) = S(x, y) + R(x, y) \tag{9.2.8}$$

现在将通用的胶片放到屏上，它所记录到的是总场的场强$|T|^2$

$$\begin{aligned}|T|^2 &= (a_s e^{-j\varphi_s} + a_r e^{-j\varphi_r})(a_s e^{j\varphi_s} + a_r e^{j\varphi_r}) \\ &= a_s^2 + a_r^2 + a_s a_r\left[e^{-j(\varphi_s - \varphi_r)} + e^{j(\varphi_s - \varphi_r)}\right] \\ &= SS^* + RR^* + SR^* + S^* R\end{aligned} \tag{9.2.9}$$

当胶片记录完总场强$|T|^2$后，物体可以移去。记录了总场强$|T|^2$信息的胶片叫全息。注意全息记录的是式(9.2.9)右边4项之和。

在显示模式中，全息记录胶片被记录时用过的参考光照明。所以胶片后面光场正比于$|T|^2R(x, y)$或

$$|T|^2R = SS^*R + RR^*R + SR^*R + S^*RR \tag{9.2.10}$$

所以观察者看到的是4个光波的和。第三项$SR^*R = |R|^2S$，就是从被观察物体散射出来的初始光场S乘上一实常数$|R|^2$，即我们要求的三维图像。但是这个场和其他3个场混在一起。如果我们使参考光场比从物体来的散射光场大得多，那么第一项可忽略不计，即

$$R^*R >> SS^*$$

第二项$|R|^2R$只是一个均匀的背景光。

第三项已讨论过，即我们所希望图像。如果全息记录胶片被均匀平面波垂直照射，那么φ_r在屏上是一常数，第四项就是第三项图像的复共轭，只在相位上有差别，所以，正如图9-8所示，有两个图像将被显示出来。观察者只要选择一个合适的观察角度就只看到一个图像。

9.3 高斯光束

第3章讨论的均匀平面波有两个特点，其一，波的幅度在整个空间是常数，其二，等相位面是平行平面。

本节讨论更复杂的波，其特点是波的幅度不再均匀，波前不再是平面。激光束就属于这种波，其幅度在中心轴线上最强，离开轴线愈远光场愈弱。我们想知道，是否这种波束的截面可维持不变，以及等相位面是否为平面。

假定在$z=0$的平面，非均匀波的电场为

$$\boldsymbol{E}(x, z=0) = \boldsymbol{y}_0 E_0 e^{-x^2/w^2} \tag{9.3.1}$$

即电场在$\boldsymbol{y}_0$方向极化，其幅度随x变化(见图9-9)，为使数学分析简化，假定其幅度不随y而变。

如图9-9所示，波在中心($x=0$)最强，随离开中心距离的增加而很快减小，当 $x=w$ 时，场强由中心最大值减小到1/e或37%（或-8.7 dB），定义 w 叫波束宽度。选择函数 e^{-x^2/w^2}，一是基于实际激光束的光强近似这种分布，二是为了数学处理的方便。这种特殊的分布函数叫做高斯分布，以纪念伟大的数学家高斯。

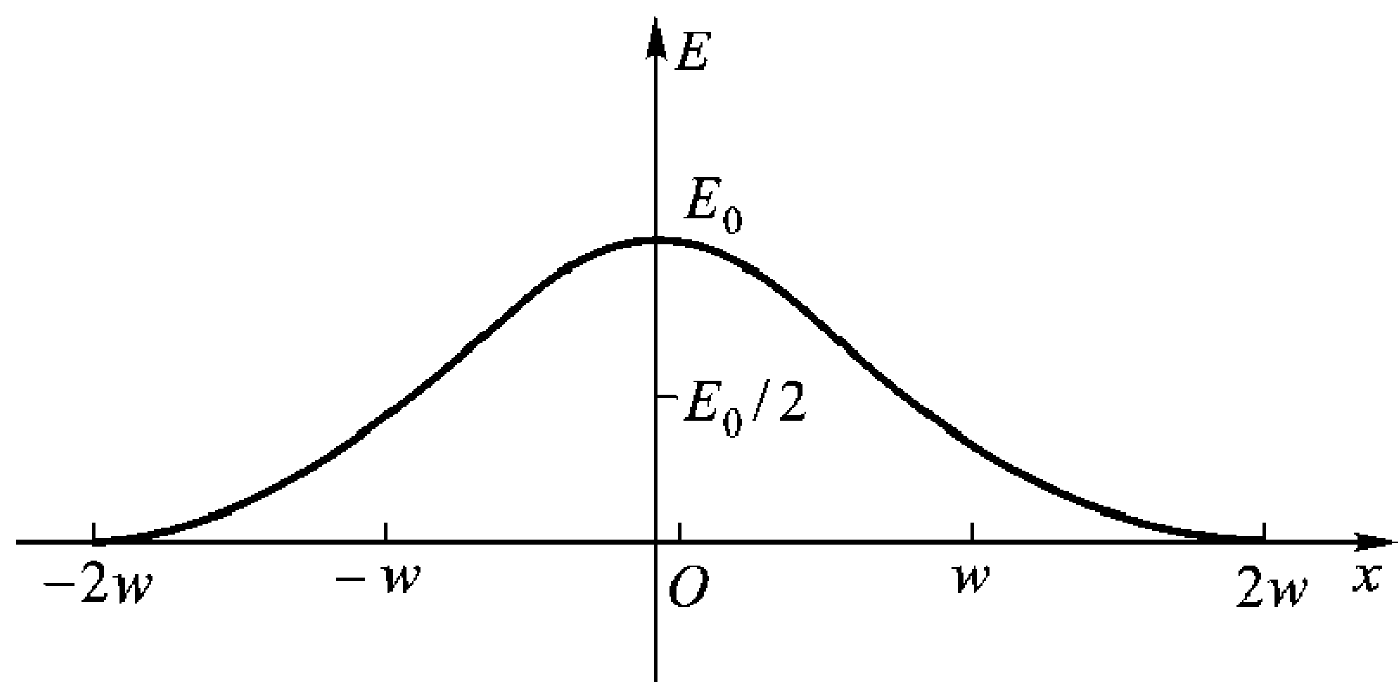


图9-9 高斯分布，非均匀波电场按 e^{-x^2/w^2} 变化

从第4章我们已知 $\boldsymbol{y}_0$ 方向极化的平面波可表示成

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{y}_0 A e^{-j(k_x x+k_z z)}$$

$$k_x^2+k_z^2=k^2, \qquad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

许多平面波的集合可表示成

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{y}_0\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_x A(k_x)\, e^{-j(k_x x+k_z z)} \tag{9.3.2}$$

式中 $k_z=\sqrt{k^2-k_x^2}$，量 $A(k_x)$ 可解释为 x 方向波数为 k_x 的平面波分量的幅值。$z=0$ 处式(9.3.1)、(9.3.2)表示的电场相等，由此可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_x A(k_x)\, e^{-jk_x} = E_0 e^{-x^2/w^2} \tag{9.3.3}$$

式(9.3.3)左边的积分就是 $A(k_x)$ 的傅里叶变换。对式(9.3.3)进行傅里叶反变换可得到 $A(k_x)$ 表达式

$$A(k_x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x E_0 e^{-x^2/w^2}\cdot e^{jk_x x} \tag{9.3.4}$$

式(9.3.4)右边积分可得解析结果，所以

$$A(k_x)=\frac{E_0 w}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{w^2 k_x^2}{4}} \tag{9.3.5}$$

到此，我们可以把式(9.3.1)表示的非均匀高斯波束看成无限多个均匀平面波的组合。这些平面波以其 x 方向不同的波数 k_x 表征。k_x 可以在一个相当大的范围内变化，对应每一个 k_x 平面波的幅度 $A(k_x)$ 由式(9.3.5)给出。将式(9.3.5)代入式(9.3.2)可得任意 z 处高斯光束的幅度

$$\boldsymbol{E}(x,z)=\boldsymbol{y}_0\frac{E_0 w}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_x e^{\frac{-w^2 k_x^2}{4}} e^{-j(k_x x+k_z z)} \tag{9.3.6}$$

式中 $k_z=\sqrt{k^2-k_x^2}$，当 $k_x>k$，$k_z=-j\sqrt{k_x^2-k^2}$ 是虚数，所以上述解当 $z\to\infty$

仍有界。进行变量替换，使 $k_x = ku$，以及 $\mathrm{d}k_x = k\mathrm{d}u$，式(9.3.6)成为

$$\boldsymbol{E}(x,z) = \boldsymbol{y}_0 \frac{E_0 kw}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\,\mathrm{e}^{\frac{-k^2w^2u^2}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kux+k\sqrt{1-u^2}z)} \tag{9.3.7}$$

对于大多数激光束，$kw >> 1$ 条件都满足，即光束直径比波长大得多，除非 u 比 1 小得多，上式第一个指数项可忽略。当 $u << 1$ 时第二项中 $\sqrt{1-u^2}\approx 1-\frac{u^2}{2}$，此时式(9.3.7)成为

$$\boldsymbol{E}(x,z) = \boldsymbol{y}_0 \frac{E_0 kw}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\,\mathrm{e}^{-(P^2u^2+qu+c)} \tag{9.3.8}$$

式中 $P^2 = \frac{1}{4}k^2w^2 - \frac{1}{2}\mathrm{j}kz$，$q = -\mathrm{j}kx$，$c = -\mathrm{j}kz$。此式与式(9.3.4)相似，其积分可得解析表达式，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x,z) &= \boldsymbol{y}_0 \frac{E_0 kw}{2P}\mathrm{e}^{q^2/4P^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\\ &= \boldsymbol{y}_0 E_0 \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{j}\frac{z}{z_f}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\mathrm{e}^{\left[\frac{-x^2}{w^2\left(1+\frac{z^2}{z_f^2}\right)}\left(1+\mathrm{j}\frac{z}{z_f}\right)\right]}\end{aligned} \tag{9.3.9}$$

式中 $z_f = kw^2/2$，由式(9.3.9)可见，当 $z >> z_f$，波的幅度和相位主要由第二个指数项决定。所以当光束传播相当一段距离后，在 z 处光束的宽度满足

$$\text{光束宽度} = \frac{wz}{z_f} \tag{9.3.10}$$

并且

$$\begin{aligned}\text{相位} &= -kz - \frac{x^2}{w^2}\frac{z_f}{z} + \frac{\pi}{4}\\ &= -k\left(z + \frac{x^2}{2z}\right) + \frac{\pi}{4}\\ &\approx -k\sqrt{z^2+x^2} + \frac{\pi}{4}\end{aligned} \tag{9.3.11}$$

图 9-10 给出光束宽度与等相位面随 z 的变化，当光束沿 z 轴传播相当一段距离后，高斯光束变得越来越宽，其宽度与 z 近似线性关系，而等相位面成为一个柱面，这种现象叫做高斯光束

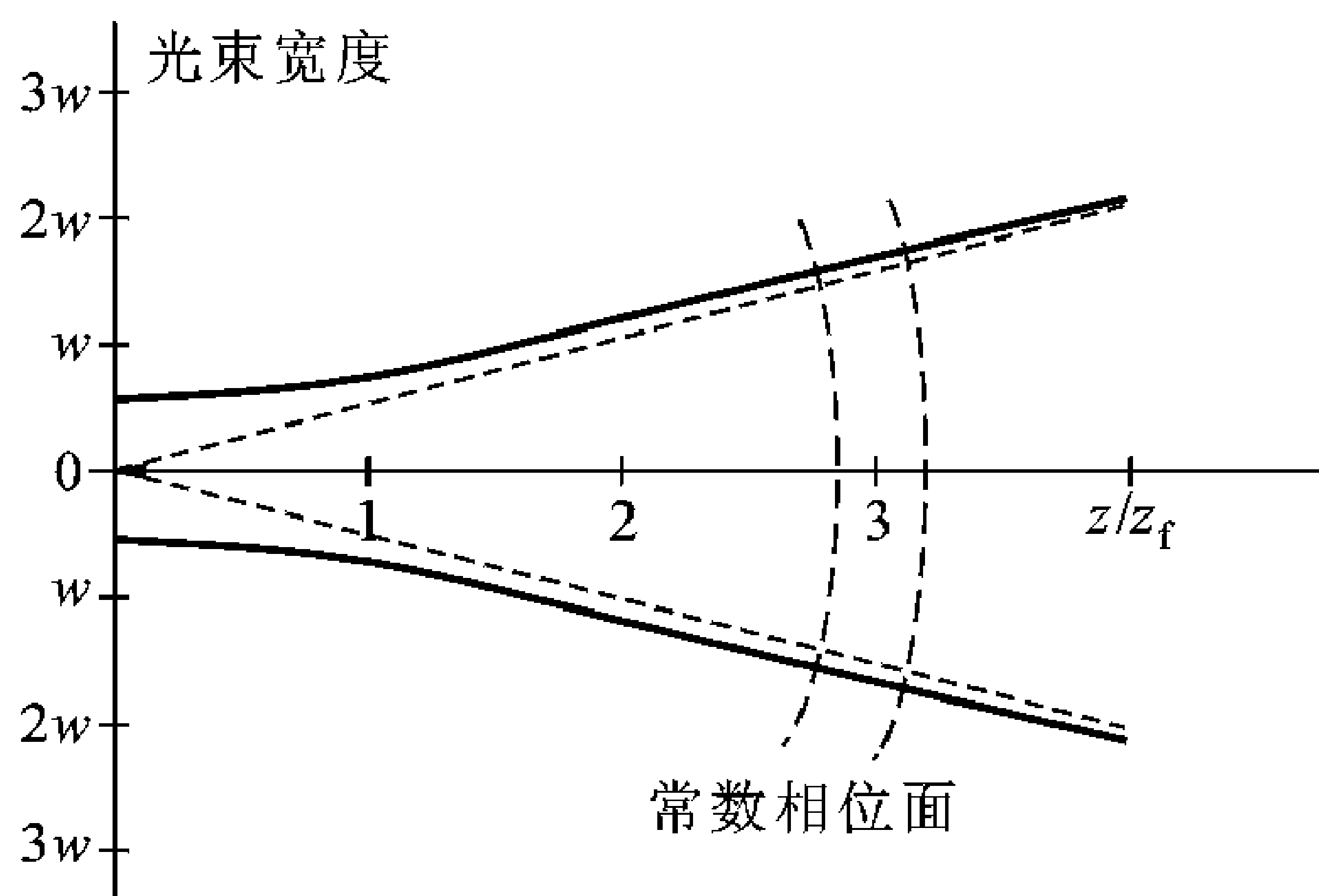


图 9-10 高斯光束的衍射，当 $z/z_f \to \infty$ 光束宽度与 z 成线性关系

衍射。

例9-4 假定在地球上 $\lambda = 6\ 328$ Å 激光束对准月球照射，初始光束宽度为 1 cm，根据式(9.3.10)估计激光束到达月球时宽度。

解： $z_f = 496$ m，地球与月球距离约为 3.8×10^8 m，所以 $w_z = 7.7$ km，即与月球直径相比，光斑还是很小的。

1969年阿波罗11号空间站在月球上安放了一个反射器，其反射光被地球接收，测量激光束从地球到月球再从月球到地球的时间延迟，科学家精确测得了地球与月球之间的距离。这种测量之所以成为可能是因为经过地球—月球这么长距离传输后，激光束的发散并不十分严重，以致地球上仍能检测到从月球安置的人工反射面反射回来的光。

激光球面镜

激光器中，原子被激发到较高的能级，当这些原子从较高能级跃迁回低能级时，将以光频电磁波形式释放从较高能级跃迁回较低能级的能量差。为使这些跃迁辐射同步以得到相干光，激光器都需要一个谐振器。这个谐振器由面对面放置的反射镜组成，如图9-11(a)。这两个反射镜使光在两镜面间来回反射。如果第一次反射回来的波与第二次反射回来的波同相，多次反射光将得到增强，即发生谐振，激光器中原子辐射的光，就被谐振器同步，因而得到持续的光输出。

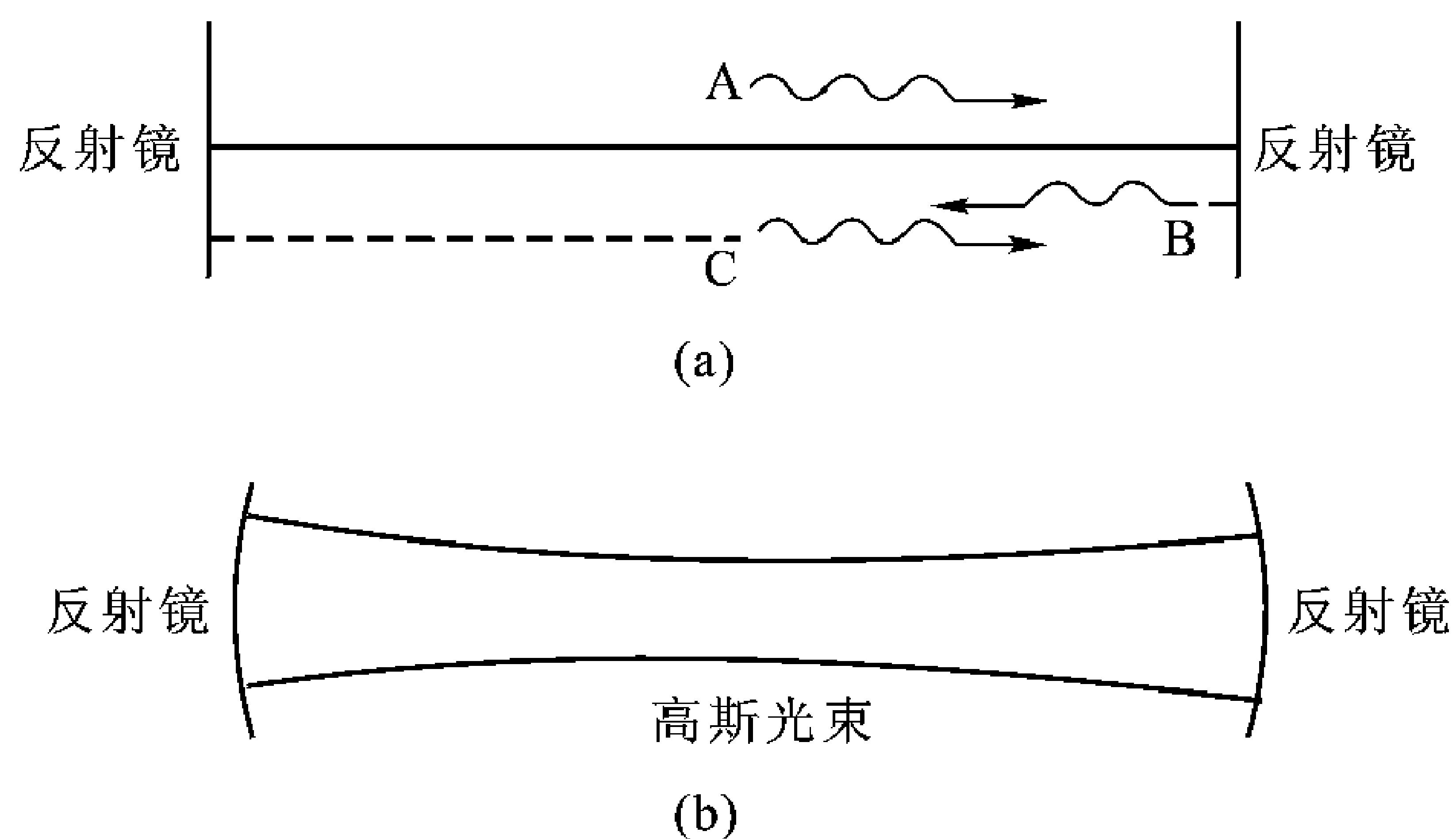


图9-11 激光器用反射镜
(a) 用平面镜作激光器反射镜 (b) 用球面镜作激光器反射镜与高斯波束等相位面更匹配

第一个激光谐振器用平行平面反射镜构成，如图9-11(a)，已在第8章讨论过。其后发现激光器中光束更接近高斯光束，所以激光谐振器反射镜做成球面的，称球面反射镜，使反射面与高斯光束等相位面更接近。

9.4　多普勒效应

当产生简谐波的振荡源对于观察者静止时，观察者检测到的波的频率与波源的频率是一致的，但是当波源与观察者有相对运动时，被观察者检测到的波的频率（为与波源频率区分，以后叫做外观频率）与实际波源频率有差别。波源发射频率与观察者接收到的频率之差取决于源和观察者相对运动速度。在声波与电磁波中均观察到这一现象。这个现象称为多普勒效应，以纪念 1842 年首先发现这一现象的科学家多普勒。

看图 9－12，假定 $t=t_0$ 时，波源以速度 v 并沿与 SR 线夹角 θ 方向运动，波源 S 在 $t=t_0$ 向四周辐射电磁波，且在 t' 到达观察者所在地 R，显然

$$t'=t_0+\frac{r_0}{c}$$

一个周期后，即 $t=t_0+T$，波源已移到 S'，如图 9－12（b），距离 SS' 等于 Tv m，在 $t=t_0+T$ 波源发出的波到达观察者所在地 R 的时刻为 t''，则

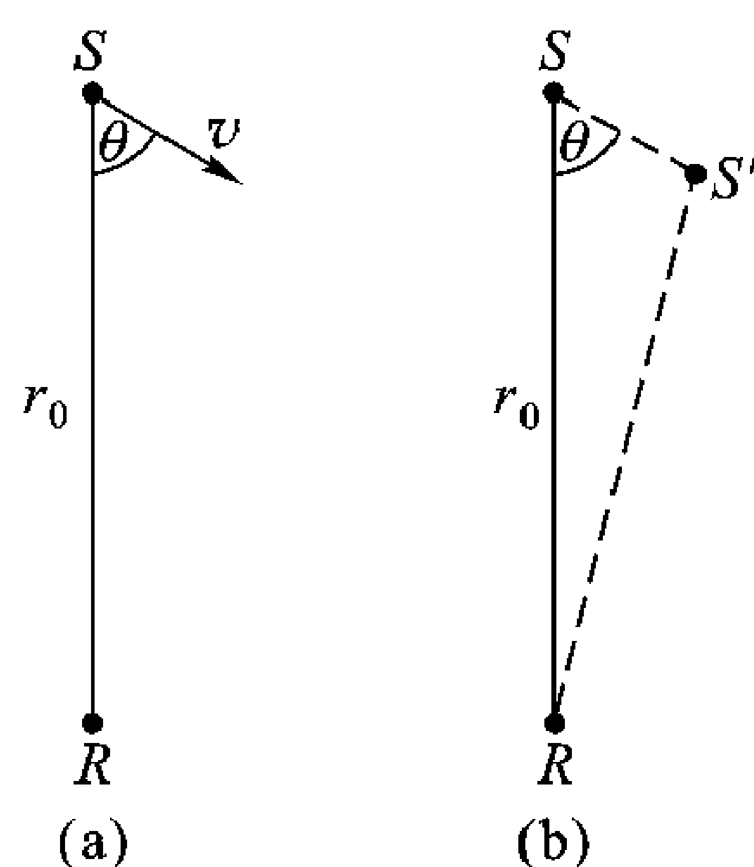


图 9－12　波源相对于静止观察者在运动

（a）源与观察者距离在 $t=t_0$ 时是 SR

（b）当 $t=t_0+T$，改变到 $S'R$

$$t''=t_0+T+\frac{1}{c}(S'R)$$

从三角关系，可得

$$S'R=(r_0^2-2r_0Tv\cos\theta+T^2v^2)^{1/2}$$

因此被观察者接收到的外观周期 T' 满足

$$T'=t''-t'$$

或

$$T'=T+\frac{1}{c}(r_0^2-2r_0Tv\cos\theta+T^2v^2)^{1/2}-\frac{1}{c}r_0$$

假定波源速度 v 及周期 T 都很小，以致 $Tv\ll r_0$，根号中的三项可只取前两项并利用二项式展开得到

$$T'=T\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\tag{9.4.1}$$

被观察者检测到的外观频率就是外观周期 T' 的倒数，为

$$f'\approx f\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta\right)\tag{9.4.2}$$

如果 $v\ll c$，而当波源对准观察者运动时，$\theta=0$，被观察者检测到的外观

频率比波源频率高，反之，当波源离开观察者运动时，观察者检测到的外观频率比波源频率低。

例9-5 解释火车进站和出站时站台上的旅客听到的汽笛声是不同的。

解： 假定火车汽笛发出的声音的频率是1 kHz，火车速度是22.4 m/s，声速是331 m/s。当火车朝站台上的旅客进站时，旅客听到汽笛声的外观频率是

$$f' = 1\,000\left(1 + \frac{v}{c}\right) = 1\,068 \text{ Hz}$$

而当火车离开站台时，旅客听到汽笛声的外观频率是

$$f'' = 1\,000\left(1 - \frac{v}{c}\right) = 932 \text{ Hz}$$

所以当火车进站时，旅客听到的汽笛声的频率与离站时的相比，相差136 Hz，所以旅客听到的汽笛声是不同的。

例9-6 喷气式飞机以1马赫速度(声音速度)飞行，机载天线发射的电磁波被前方地面观察者所带收音机检测，估计地面观察者检测到的多普勒频移。

解： 对1马赫的速度，1 MHz频率，多普勒频移近似为1.1 Hz。这个结果直接从式(9.4.2)得到。当飞机对着观察者飞行，频率升高，反之离开观察者飞行，频率降低。

红移

当遥远的星体离开地球运动时，其辐射光谱由于多普勒效应从地球上观测就向较低的频率端移动，即向红光移动，这种现象叫红移。

从银河系天体辐射出来的光谱的红移可以推断出该天体离开地球运动。迄今观察到的红移稳定地增长，并很可能随距离线性增加。

从运动目标反射回来的波的多普勒频移

式(9.4.2)给出了波源准对观察者运动从静止观察者处检测到的多普勒频移。在很多实际应用场合，如警察用的测速雷达，发射机天线对准运动目标发射电磁波，然后接收从运动目标反射回来的电磁信号，雷达主要检测天线辐射出的电磁波与接收回波的多普勒频移以确定目标的运动速度。

为了简化分析，假定目标是一个完纯导体板，运动速度为 u，$\boldsymbol{u}_0$ 的方向与导电板垂直且向外(见图9-13)。则入射波可表示为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{i}} = \boldsymbol{y}_0 E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(kz - \omega t)} \tag{9.4.3}$$

反射波可表示为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{y}_0 R E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k'z + \omega' t)} \tag{9.4.4}$$

因为入射波、反射波在同一媒质中传播，所以 k，k' 分别为

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{9.4.5}$$

$$k' = \omega'\sqrt{\mu\varepsilon}$$

导体面边界条件要求

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz_0)} + R\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega' t + k'z_0)} = 0$$

$$R = -\mathrm{e}^{[-\mathrm{j}(k'+k)z_0 + \mathrm{j}(\omega - \omega')t]}$$

所以反射波为

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{r}} = -\boldsymbol{y}_0 E_0 \mathrm{e}^{[-\mathrm{j}(k+k')ut + \mathrm{j}\omega t + \mathrm{j}k'z]}$$

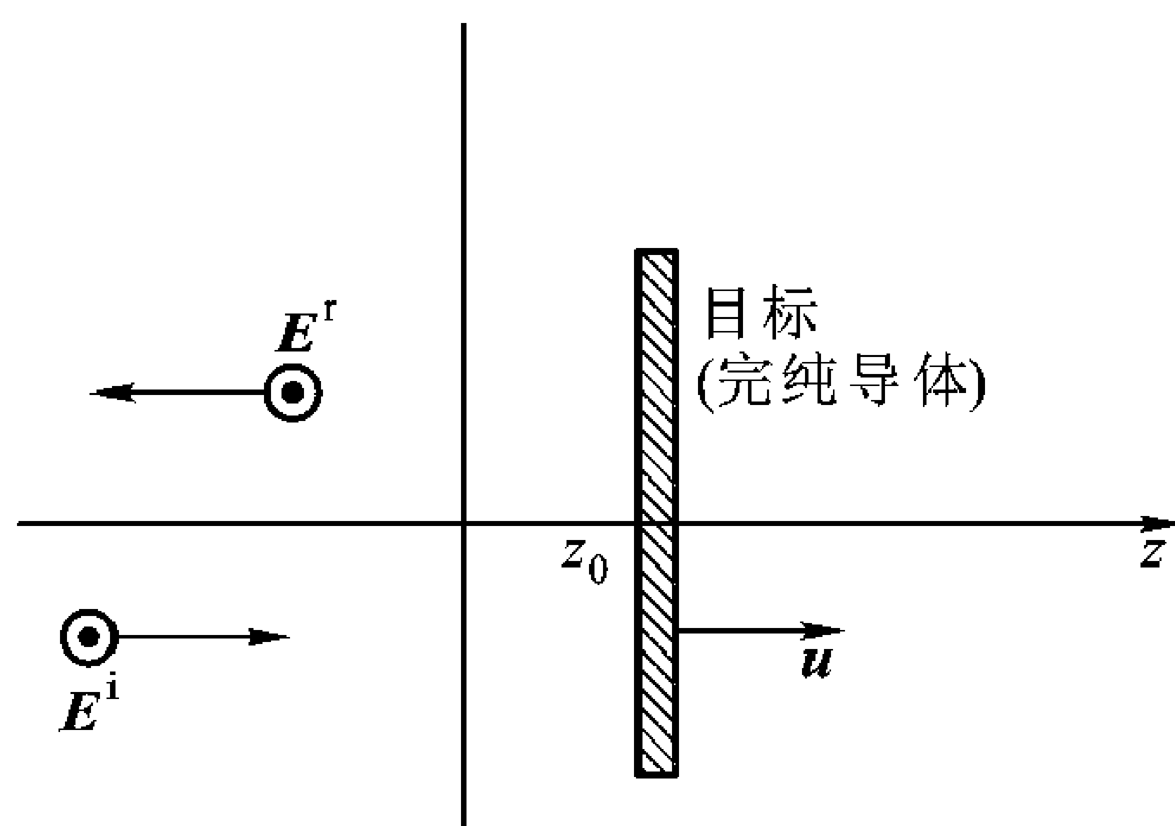


图 9－13　波照射运动目标，从目标反射回来的回波有一个多普勒频移

式中 $z_0 = ut$，与式(9.4.3)相比，显然有

$$\omega' = \omega - (k + k')u$$

或

$$\frac{\omega'}{\omega} = 1 - \frac{k}{\omega}\left(1 + \frac{k'}{k}\right)u$$

或

$$\frac{\omega'}{\omega} = 1 - \frac{u}{c}\left(1 + \frac{\omega'}{\omega}\right) \tag{9.4.6}$$

得出式(9.4.6)时应用了 $\omega/k = c$，$k'/k = \omega'/\omega$，式中 c 为媒质中光速，解式(9.4.6)得到

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{f'}{f} = \frac{1-(u/c)}{1+(u/c)} \tag{9.4.7}$$

或

$$\frac{f'}{f} \approx 1 - \frac{2u}{c} \quad \left(\text{如果}\frac{u}{c} \ll 1\right) \tag{9.4.8}$$

首先要指出，如果目标离开雷达，多普勒频移是负的。反之，如果目标运动朝向雷达，u 改变符号，多普勒频移是正的。这个结论与前面分析过的源相对于静止观察者运动时得出的结论相一致。但由运动目标反射回来的波对于静止源引起的多普勒频移，其数值比前面分析过的图 9－12 所示情况大一倍。

例 9－7　假定警用多普勒雷达辐射的电磁波频率为 9.525 GHz，当此雷达用于检测的目标运动速度在 0～100 英里/小时范围变化时，多普勒频移范围多大？

解： $u = \pm 100$ 英里/小时 $= \pm 44.7$ m/s

$$\Delta f = \frac{2u}{c}f = \pm 3\ 137\ \mathrm{Hz}$$

多普勒雷达

图9－14给出一个简化的多普勒雷达框图，振荡源的频率为 f_0，发射天线向周围空间辐射电磁信号，定向耦合器把一部分信号耦合到检测电路的混频器。从目标反射回来的回波被接收天线接收，到达雷达的回波频率与初始发射频率不同。回波经接收天线也送到混频器。频率为 f_0 的初始发射信号与频率为 $f' = f_0 + \Delta f$ 的回波信号在混频器中混频的结果产生一个差频为 Δf 的信号，这个差频信号再送到频率计数器读出 Δf 具体数值。根据式(9.4.8)，Δf 正比于 u。最后由显示器显示。

因为电磁波速度即光速，上述过程可在毫秒甚至微秒量级内完成。通常雷达有一个开关，并只用一个天线，在发射模式，开关将振荡器与天线连通，振荡器产生的微波功率通过天线辐射出去，然后开关将振荡源与天线断开，而将天线接到接收电路，在这种接收模式，天线作接收天线用。当接收到回波信号并测出多普勒频移后，开关又将振荡源与天线接通，如此不断重复下去。

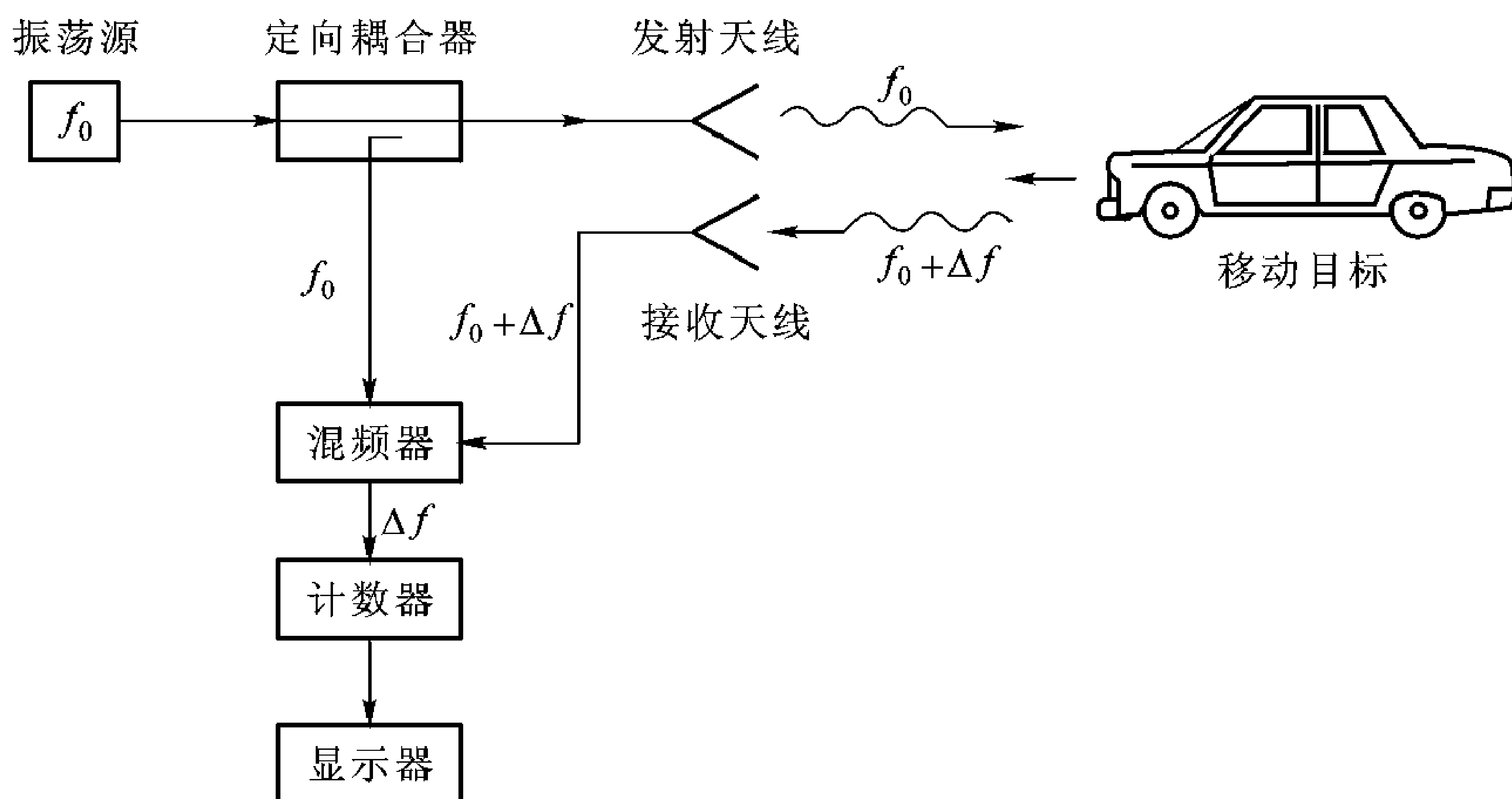


图9－14 多普勒雷达框图

频率调制连续波多普勒雷达

脉冲雷达可测量雷达与目标之间距离。如果在 t 时刻发送一个电磁脉冲，在 $t+t_0$ 时刻接收到目标回波脉冲，则目标与雷达之间距离为 $r=\dfrac{ct_0}{2}$，脉冲雷达不能直接测出目标运动的速度。

多普勒雷达可测出运动目标的速度。这种雷达发送出去的是频率为 f_0 的

连续波，如果目标回波频率为 $f_0+\Delta f$，那么目标的纵向速度 v 一定是 $v=(\Delta f/f_0)(c/2)$。

频率调制连续波（FM－CM）多普勒雷达将上述两种技术结合起来。这种雷达发送的也是连续波但频率随时间变化，如图 9－15。目标回波频率因此也随时间变化，所以目标回波中既包含目标距离的信息也包含速度的信息。

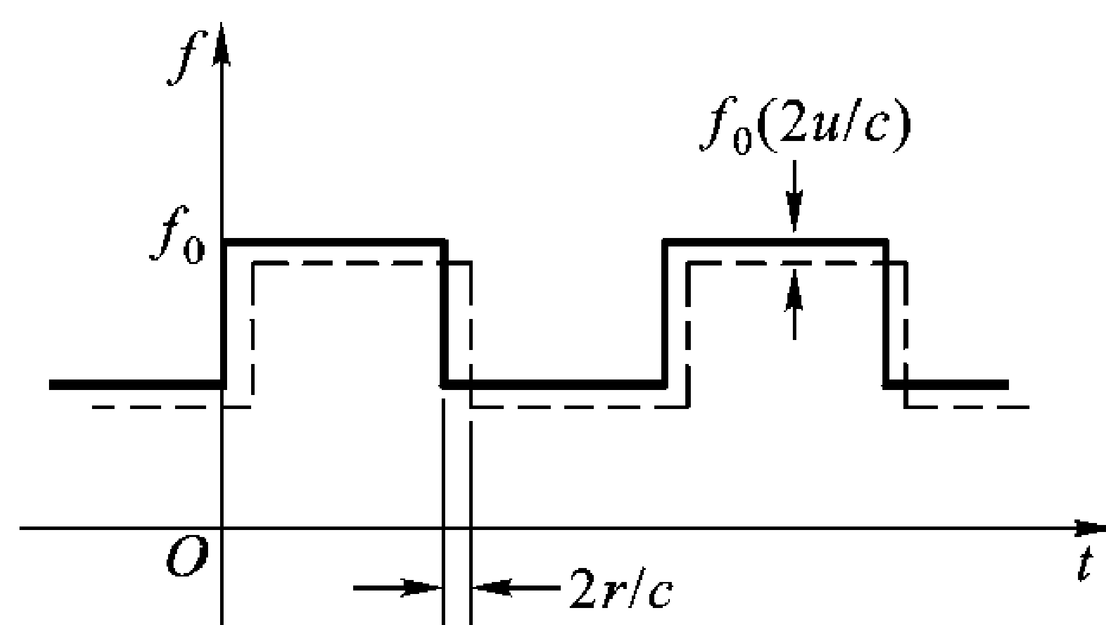


图 9－15　FM－CM 多普勒雷达
（实线波形为发送的 FM 信号，
虚线为回波信号）

参看图 9－15，回波频率偏移正比于目标运动速度，回波频谱的波形在时间轴上也有一定的延迟，这个时间延迟正比于目标与雷达之间的距离。

9.5　电各向异性介质中平面波

9.5.1　各向异性介质中 $\boldsymbol{\varepsilon}$、$\boldsymbol{\mu}$ 的并矢表示

各向异性介质中波传播特性与波传播的方向有关。各向异性介质有电各向异性介质与磁各向异性介质之分。在电各向异性介质中，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 不再平行，$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 一般的线性关系为

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{9.5.1}$$

而在磁各向异性介质中，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 不再平行，其关系为

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{9.5.2}$$

式（9.5.1）表示在电各向异性介质中，外加电场 E_x 分量可感应 D_x、D_y、D_z 3 个分量，而式（9.5.2）表示外加磁场 B_x 分量可感生 H_x、H_y、H_z 3 个分量。余类推。

如定义并矢 $\bar{\bar{\varepsilon}}$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0 & \varepsilon_{xy}\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0 & \varepsilon_{xz}\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{z}_0 \\ \varepsilon_{yx}\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}_0 & \varepsilon_{yy}\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}_0 & \varepsilon_{yz}\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0 \\ \varepsilon_{zx}\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0 & \varepsilon_{zy}\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{y}_0 & \varepsilon_{zz}\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{z}_0 \end{bmatrix} \tag{9.5.3}$$

而

$$\boldsymbol{D} = D_x\boldsymbol{x}_0 + D_y\boldsymbol{y}_0 + D_z\boldsymbol{z}_0$$

$$\boldsymbol{E} = E_x\boldsymbol{x}_0 + E_y\boldsymbol{y}_0 + E_z\boldsymbol{z}_0$$

按并矢一次点积的定义，式(9.5.1)可简写为

$$\boldsymbol{D} = \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E} \tag{9.5.4}$$

因为

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E} &= (\varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z)\boldsymbol{x}_0 \\ &\quad + (\varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z)\boldsymbol{y}_0 \\ &\quad + (\varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z)\boldsymbol{z}_0\end{aligned}$$

它的3个分量刚好是式(9.5.1)所表示的 D_x、D_y、D_z，所以并矢 $\bar{\bar{\varepsilon}}$ 的元素 ε_{ij} 表示 E_j 分量产生 D_i 分量的比例系数。

同样引入并矢 $\bar{\bar{\mu}}$

$$\bar{\bar{\mu}} = \begin{bmatrix} \mu_{xx}\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0 & \mu_{xy}\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{y}_0 & \mu_{xz}\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{z}_0 \\ \mu_{yx}\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{x}_0 & \mu_{yy}\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{y}_0 & \mu_{yz}\boldsymbol{y}_0\boldsymbol{z}_0 \\ \mu_{zx}\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{x}_0 & \mu_{zy}\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{y}_0 & \mu_{zz}\boldsymbol{z}_0\boldsymbol{z}_0 \end{bmatrix} \tag{9.5.5}$$

式(9.5.2)可记为

$$\boldsymbol{B} = \bar{\bar{\mu}} \cdot \boldsymbol{H} \tag{9.5.6}$$

9.5.2 电各向异性介质中的波方程及其平面波解

电各向异性介质中的介电系数用并矢 $\bar{\bar{\varepsilon}}$ 表示后，麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{9.5.7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\boldsymbol{D} = \mathrm{j}\omega\bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E} \tag{9.5.8}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \tag{9.5.9}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{9.5.10}$$

由此可导出电磁场满足的矢量波动方程

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} - \omega^2\mu\bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} - k_0^2\bar{\bar{\varepsilon}}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{9.5.11}$$

$$\nabla \times (\bar{\bar{\varepsilon}}_{\mathrm{r}}^{-1} \cdot \nabla \times \boldsymbol{H}) - k_0^2\boldsymbol{H} = 0 \tag{9.5.12}$$

其中 $k_0^2 = \omega^2\mu_0\varepsilon_0$，并矢 $\bar{\bar{\varepsilon}}_{\mathrm{r}}$ 定义为 $\bar{\bar{\varepsilon}}_{\mathrm{r}} = \bar{\bar{\varepsilon}}/\varepsilon_0$。

现在我们假定各向异性介质中波方程也取平面波形式的解，并研究其特性。为此将如下形式的平面波

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{9.5.13}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{9.5.14}$$

代入波动方程(9.5.11)和(9.5.12)，经过矢量运算后得

$$k^2\boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0) - k_0^2\bar{\bar{\varepsilon}}_{\mathrm{r}} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0 \tag{9.5.15a}$$

$$\boldsymbol{k}\times\bar{\bar{\varepsilon}}_{\mathrm{r}}^{-1}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_0)+k_0^2\boldsymbol{H}_0=0 \tag{9.5.15b}$$

这就是平面波复数振幅应当满足的矢量方程式，而每个矢量方程式可分解为3个直角坐标分量方程。矢量波动方程(9.5.15a)和(9.5.15b)的非零解条件所导致的方程式将用于确定平面波的波数 k 作为 ω 的函数，称为色散方程。下面针对单轴介质导出它们的色散方程。

在具体推导并求解色散方程之前，我们先看一下各向异性介质中平面波与各向同性介质中平面波有什么异同。为此将平面波解式(9.5.13)、(9.5.14)代入麦克斯韦方程中的两个散度方程(9.5.9)、(9.5.10)，得到

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D}=0 \tag{9.5.16}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H}=0 \tag{9.5.17}$$

式(9.5.16)、(9.5.17)表明 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{B}$（或 $\boldsymbol{H}$）均与波矢量垂直。再以平面波解代入 $\boldsymbol{H}$ 的旋度方程(9.5.8)，得

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}=-\omega\boldsymbol{D} \tag{9.5.18}$$

此式进一步说明 $\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$（$\boldsymbol{B}$）和 $\boldsymbol{k}$ 3个矢量是按右手螺旋关系互相垂直的，但由于介电常数 $\bar{\bar{\varepsilon}}$ 是张量，$\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 一般是不平行的。将式(9.5.13)表示的平面波解代入 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}$ 得到

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=k^2\left(\boldsymbol{E}-\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}}{k^2}\boldsymbol{k}\right)=k^2\boldsymbol{E}_{\perp} \tag{9.5.19}$$

这里 $\boldsymbol{E}_{\perp}$ 是电场垂直于波矢量 $\boldsymbol{k}$ 方向的分量。将式(9.5.19)与式(9.5.11)比较，可见

$$\boldsymbol{D}=\frac{k^2}{\omega^2\mu}\boldsymbol{E}_{\perp} \tag{9.5.20}$$

因此 $\boldsymbol{E}$ 的垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的分量 $\boldsymbol{E}_{\perp}$ 与矢量 $\boldsymbol{D}$ 平行，$\boldsymbol{E}$ 矢量处于 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 构成的平面内。电各向异性介质中平面波的电磁场矢量方向与波矢量方向之间的关系示于图9－16。

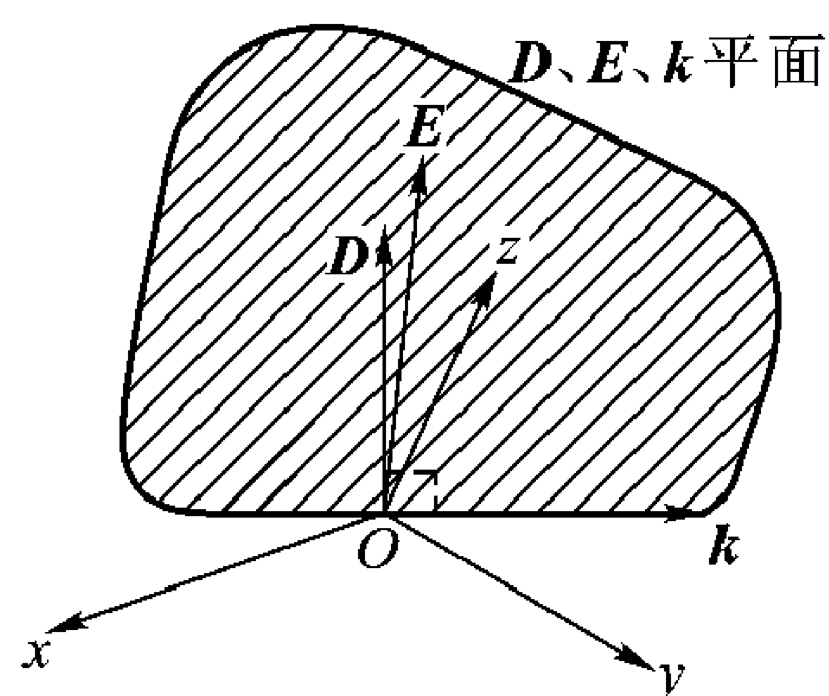


图9－16　电各向异性介质中平面波场矢量与波矢量的关系

所以，与各向同性介质中平面波相比，电各向异性介质中不是 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{k}$，而是 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{k}$ 三者构成右手螺旋关系，互相垂直。

下面具体讨论单轴介质中平面电磁波的特性。单轴介质的典型代表如石英、方解石，当取主对称轴(在光学中称为光轴)为 z 轴时，其主轴系统中的介电系数张量可写作

$$\bar{\bar{\varepsilon}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{\perp} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{/\!/}\end{bmatrix} \tag{9.5.21}$$

将上式代入式(9.5.16)，得到

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=\left(1-\frac{\varepsilon_{/\!/}}{\varepsilon_{\perp}}\right)k_zE_z \tag{9.5.22}$$

再将上式代入矢量波动方程(9.5.15a)，分解为直角坐标分量方程后(9.5.15a)可写成下面的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} k^2-\omega^2\mu\varepsilon_{\perp} & 0 & -\left(1-\frac{\varepsilon_{/\!/}}{\varepsilon_{\perp}}\right)k_xk_z \\ 0 & k^2-\omega^2\mu\varepsilon_{\perp} & -\left(1-\frac{\varepsilon_{/\!/}}{\varepsilon_{\perp}}\right)k_yk_z \\ 0 & 0 & k_x^2+k_y^2+\frac{\varepsilon_{/\!/}k_z^2}{\varepsilon_{\perp}}-\omega^2\mu\varepsilon_{/\!/} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z}\end{bmatrix}=0 \tag{9.5.23}$$

方程(9.5.23)有非零解的条件

$$\det\begin{bmatrix} k^2-\omega^2\mu\varepsilon_{\perp} & 0 & -\left(1-\frac{\varepsilon_{/\!/}}{\varepsilon_{\perp}}\right)k_xk_z \\ 0 & k^2-\omega^2\mu\varepsilon_{\perp} & -\left(1-\frac{\varepsilon_{/\!/}}{\varepsilon_{\perp}}\right)k_yk_z \\ 0 & 0 & k_x^2+k_y^2+\frac{\varepsilon_{/\!/}k_z^2}{\varepsilon_{\perp}}-\omega^2\mu\varepsilon_{/\!/} \end{bmatrix}=0 \tag{9.5.24}$$

称为色散方程，容易看出它有两个解

$$k^2=\omega^2\mu\varepsilon_{\perp} \tag{9.5.25}$$

和

$$k_x^2+k_y^2+\frac{\varepsilon_{/\!/}}{\varepsilon_{\perp}}k_z^2=\omega^2\mu\varepsilon_{/\!/} \tag{9.5.26a}$$

如果设 $\boldsymbol{k}$ 在 $y-z$ 平面内，θ 是波矢 $\boldsymbol{k}$ 与 z 轴的夹角，则 $k_x=0$，$k_y=k\sin\theta$，$k_z=k\cos\theta$，第二个解式(9.5.26a)可写成更方便的形式

$$k^2\left(\sin^2\theta+\frac{\varepsilon_{/\!/}}{\varepsilon_{\perp}}\cos^2\theta\right)=\omega^2\mu\varepsilon_{/\!/} \tag{9.5.26b}$$

式(9.5.25)和式(9.5.26b)表示在单轴介质中可能传播的两种平面波，它们具有不同的物理特征，分别称为寻常波和非寻常波。

9.5.3　寻常波与非寻常波

1. 寻常波

将解(9.5.25)代入矢量波动方程(9.5.23)后可以解出

$$E_z=0 \tag{9.5.27}$$

代入式(9.5.22)，得到

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}=0 \tag{9.5.28}$$

式(9.5.28)表明波的电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 没有平行于波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的分量，因此 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 的方向重合。由于 $E_z=0$，所以 $\boldsymbol{E}$（以及 $\boldsymbol{D}$）与光轴 z 方向垂直，因此 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{D}$ 垂直于 $\boldsymbol{k}$ 和 z 轴构成的平面。可见解(9.5.25)式表示的波是相对于传播方向 k 的横电磁波(TEM)，与各向同性介质中的平面波性质相同，所以称为寻常波。由式(9.5.25)容易求出寻常波的相速为

$$v_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon_{\perp}}} \tag{9.5.29}$$

2. 非寻常波

光轴 z 和波矢 $\boldsymbol{k}$ 构成的平面($y-z$ 平面)称为主截面。在如此选取的坐标系中 $k_x=0$。将非寻常波解(9.5.26)代入矢量波动方程(9.5.23)，得 $E_x=0$，所以电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 处于 $y-z$ 平面内，由式(9.5.20)电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 也在 $y-z$ 平面内。但现在 $\boldsymbol{E}$ 有沿波传播方向的分量，而 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{k}$ 总是垂直的，所以 $\boldsymbol{D}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 不再保持平行。波的这种特性是各向同性介质中的 TEM 波所不具备的，所以称为非寻常波。由式(9.5.26b)可求出波的相速

$$v_{\mathrm{p}}=\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\mu\varepsilon_{/\!/}}+\frac{\cos^2\theta}{\mu\varepsilon_{\perp}}} \tag{9.5.30}$$

可见波的相速与传播方向有关，这是非寻常波与寻常波的另一区别。寻常波与非寻常波的电磁场矢量与波传播方向的关系分别示于图 9－17 (a)和(b)。

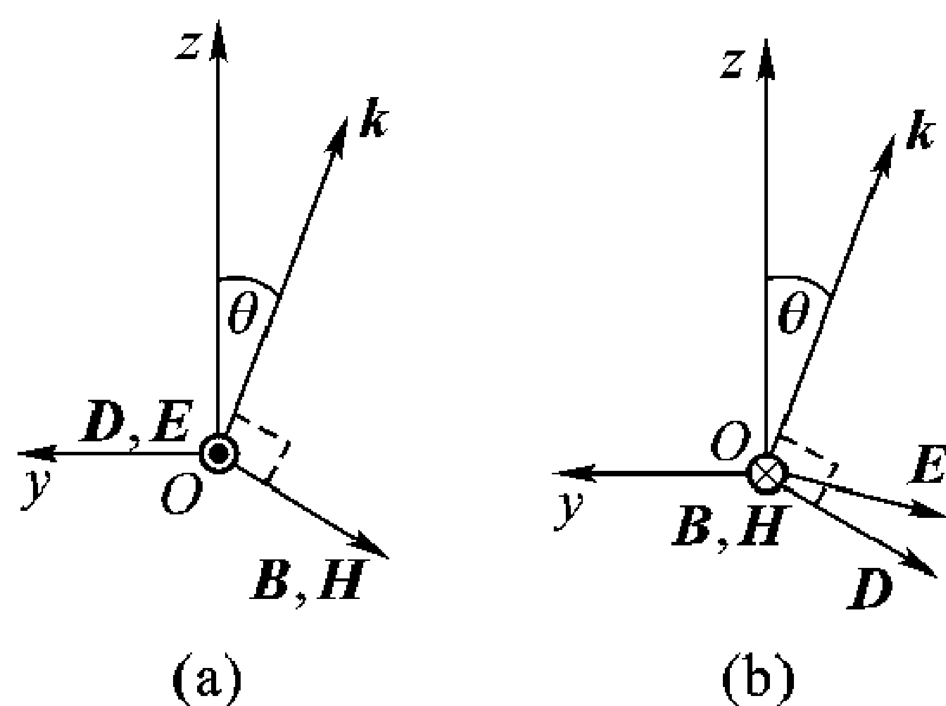


图 9－17　电磁场矢量与波矢量关系
(a) 寻常波　(b) 非寻常波

如果以电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的方向表示波的极化，我们可以看到寻常波与非寻常波都是线极化波，但图 9－17 表明这两个波的极化是正交的。当一极化方向任意的线极化波以 θ_{i} 角倾斜入射到单晶片上时，如果晶面与主光轴(z 轴)垂直，将分解为极化方向垂直于 $y-z$ 平面的寻常波和极化方向在 $y-z$ 平面内的非寻常波。由于两种波的 k 值不同，折射角不同，在晶片内这两个波的射线将分离，这就是双折射现象，见图 9－18。从晶片射出的这两个波用透镜合成后一般是椭圆极化波，调整晶片厚度及波的入射角便可获得所希望的极化。四分之波板就是利用这一原理得到圆极化光。

当电磁波垂直入射到斜切割的单轴晶体表面时，其透射波的波矢方向不变；等相位面仍为垂直于波矢方向的平面，寻常波的等幅面仍沿与波矢相同的方向前进，但非寻常波的等振幅面沿与波矢方向不同的功率流方向前进，这时

能速的方向与相速的方向不同，如图9-19。

例9-8　导电单轴媒质电参量

$$\bar{\bar{\varepsilon}}=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix},\quad \bar{\bar{\sigma}}=\begin{bmatrix}\sigma & 0 & 0\\ 0 & \sigma & 0\\ 0 & 0 & \sigma_z\end{bmatrix}$$

试求其中寻常波和非寻常波的色散关系。当$\sigma_z/\sigma \ll 1$时，说明任何极化波经过具有这种性质的媒质时将成为线极化波。

解：由麦克斯韦方程

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}&=\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}\\ &=\bar{\bar{\sigma}}\cdot\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{E}\\ &=\mathrm{j}\omega\left(\bar{\bar{\varepsilon}}-\frac{\mathrm{j}\bar{\bar{\sigma}}}{\omega}\right)\cdot\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

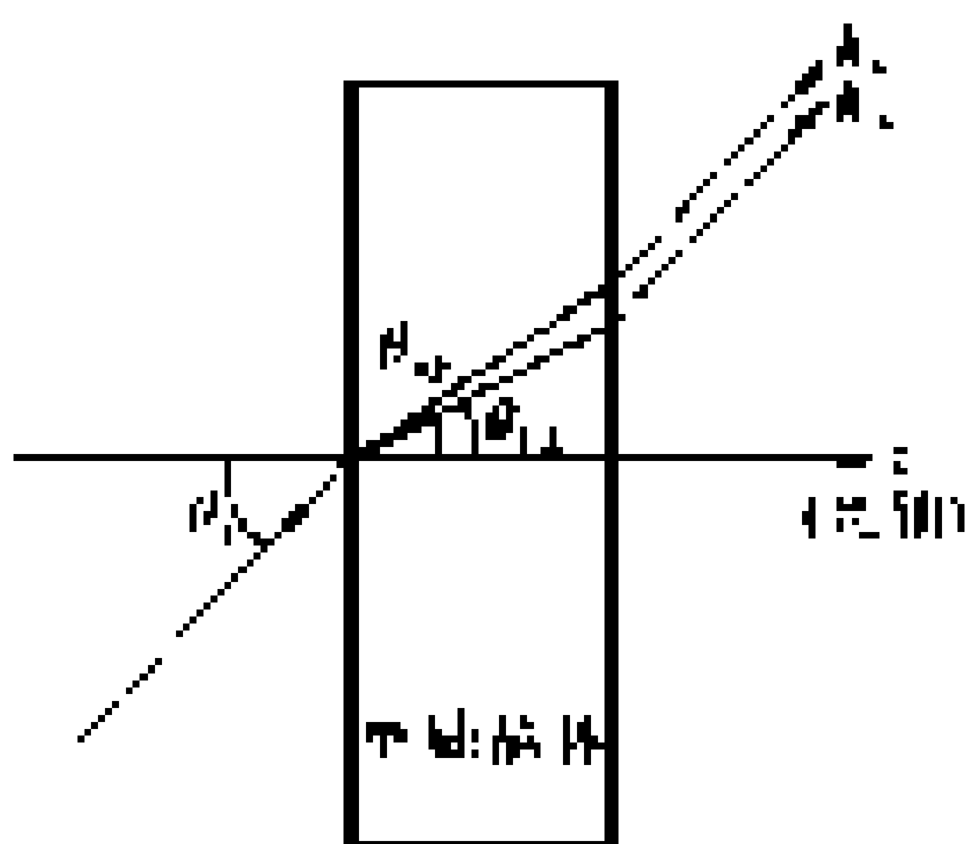


图9-18　单轴晶体中的双折射

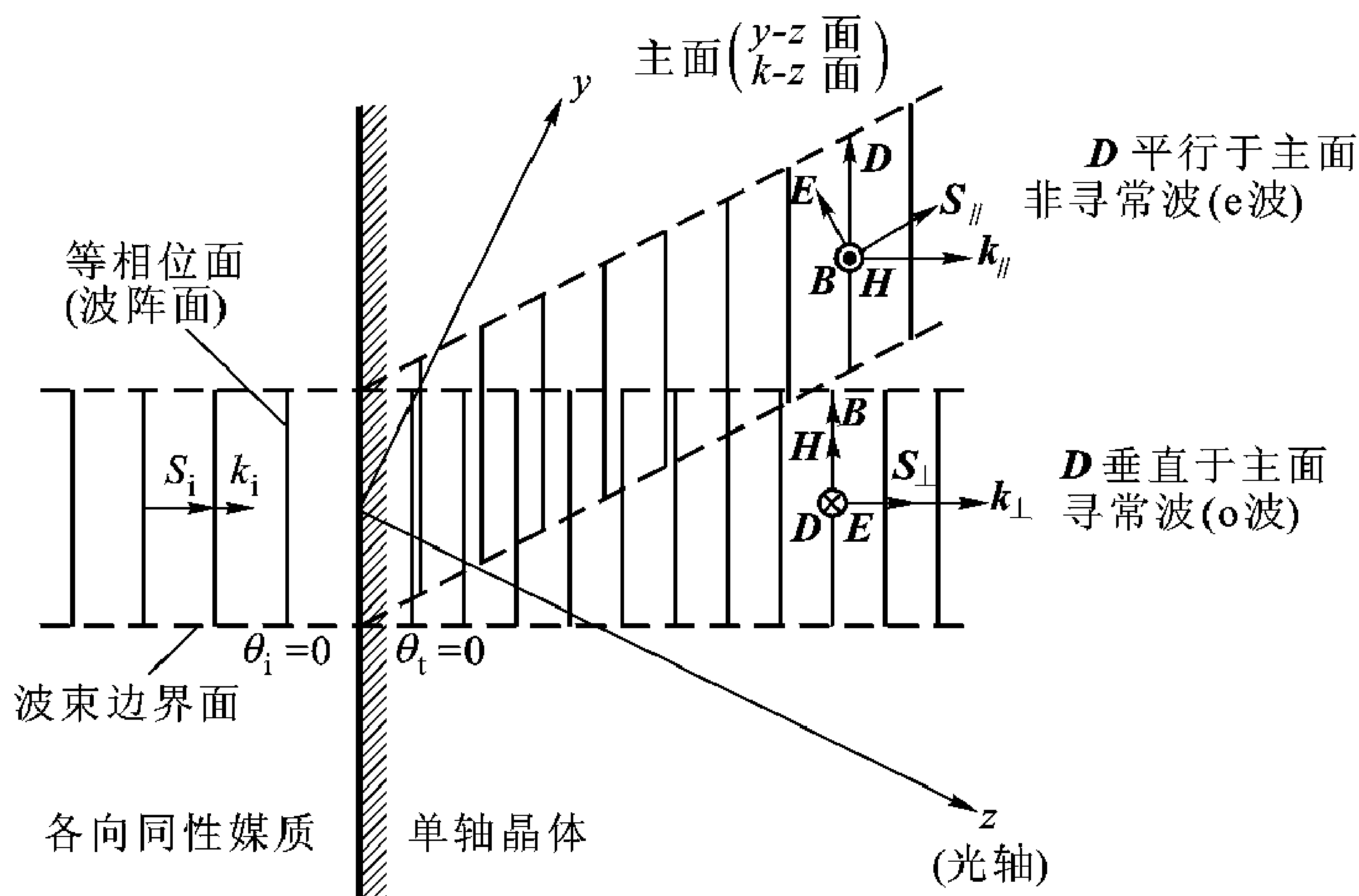


图9-19　发生双折射时的波矢与功率流

此导电媒质的张量介电系数为

$$\bar{\bar{\varepsilon}}-\frac{\mathrm{j}\bar{\bar{\sigma}}}{\omega}=\begin{bmatrix}\varepsilon-\mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon-\mathrm{j}\dfrac{\sigma}{\omega} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z-\mathrm{j}\dfrac{\sigma_z}{\omega}\end{bmatrix}$$

与得出式(9.5.25)～(9.5.26)类似，寻常波和非寻常波的色散关系为

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2\mu\left(\varepsilon - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega}\right) \qquad (\text{寻常波})$$

$$k_x^2 + k_y^2 + \frac{\varepsilon_z - \mathrm{j}\sigma_z/\omega}{\varepsilon - \mathrm{j}\sigma/\omega}k_z^2 = \omega^2\mu\left(\varepsilon_z - \mathrm{j}\frac{\sigma_z}{\omega}\right) \qquad (\text{非寻常波})$$

设波沿 x 方向传播，则 $k_y = k_z = 0$，故对寻常波

$$k_x = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{1 - \mathrm{j}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 - \mathrm{j}\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

即寻常波按 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu/\varepsilon}\sigma x}$ 规律衰减。对非寻常波，则按 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu/\varepsilon_z}\sigma_z x}$ 规律衰减。当 $\sigma_z \ll \sigma$ 时，寻常波的衰减比非寻常波的衰减快得多。如果媒质沿传播方向厚度为 d，波经过距离 d 后能满足

$$\frac{1}{2}\sqrt{\mu/\varepsilon}\sigma d \gg 1,\quad \frac{1}{2}\sqrt{\mu/\varepsilon_z}\sigma_z d \ll 1$$

则寻常波将在媒质中消失而仅剩下非寻常波，这剩下的波在非寻常波传播方向是线极化的，因此任何极化波经过这种媒质后就成为线极化波。

四分之波板

考虑一块用各向异性介质构成的平板，见图 9－20（a）。假定一个线极化波从左边入射到该介质板，该线极化波表示为

$$\boldsymbol{E} = E_0(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz} \qquad (z < 0, k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}) \qquad (9.5.31)$$

如果忽略在 $z = 0$ 和 $z = d$ 边界波的反射效应，则波刚通过该各向异性介质板时可表示为

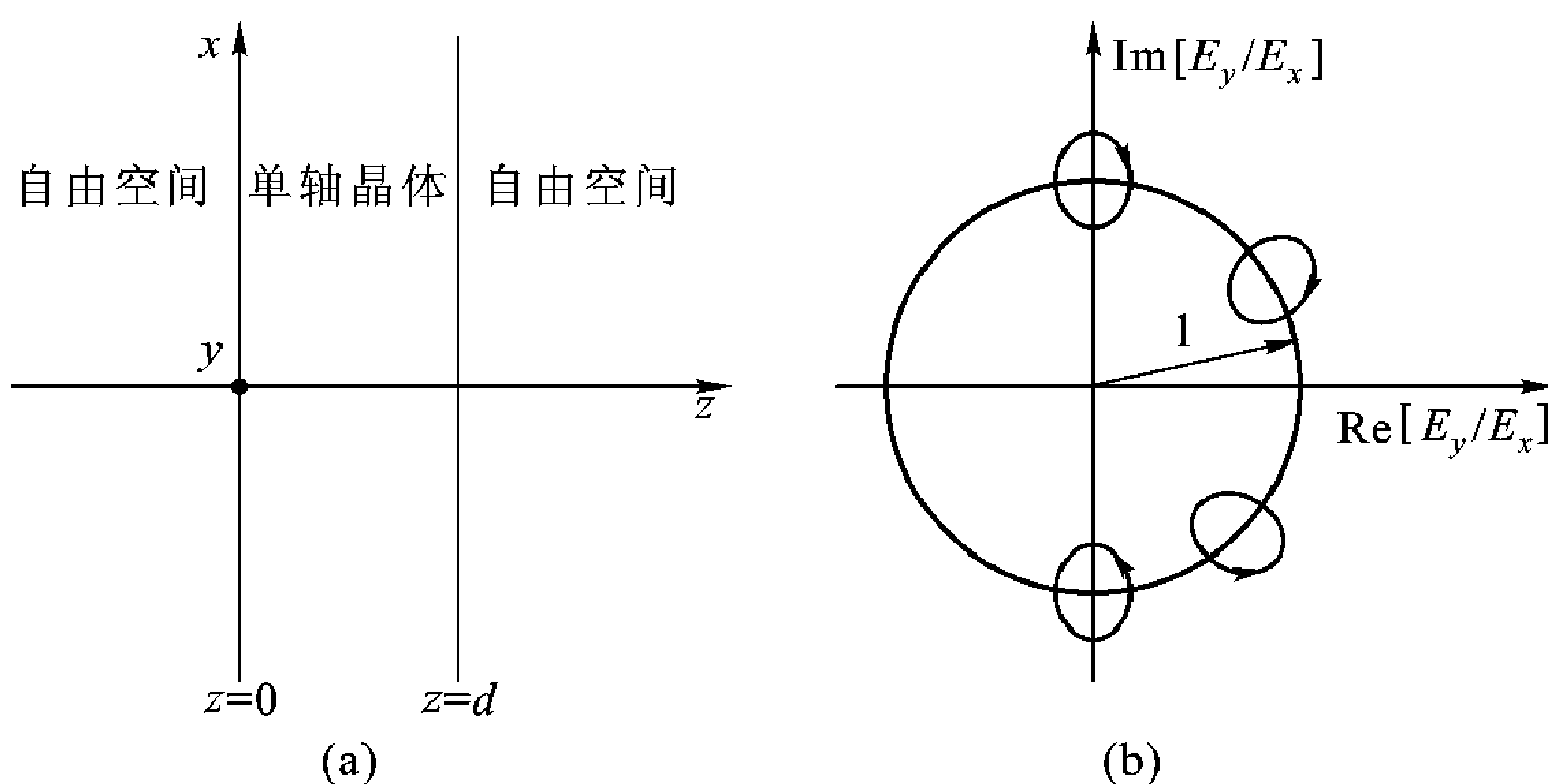


图 9－20　各向异性介质板及其对传输波极化的影响

（a）各向异性介质板　（b）经过该介质板波的极化

$$\boldsymbol{E} = E_0 \left(\boldsymbol{x}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_e d} + \boldsymbol{y}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_o d}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(z-d)} \quad (z > d) \tag{9.5.32}$$

式中 k 的下标 o，e 分别表示寻常波和非寻常波。

得出式(9.5.32)时先将入射波分解为 $\boldsymbol{x}_0$ 方向，$\boldsymbol{y}_0$ 方向两个分量，再分别解每个分量在各向异性介质板中的传播问题，在 $z = d$ 处再将这两个分量相加。

波通过各向异性介质板后其极化形式可由下式决定

$$\frac{E_y}{E_x} = \mathrm{e}^{(-\mathrm{j}k_o d + \mathrm{j}k_e d)} \tag{9.5.33}$$

图 9-20 (b)给出的是可能的极化形式。当

$$-k_o d + k_e d = \pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi \tag{9.5.34}$$

或

$$d = \frac{\pm \frac{\pi}{2} + 2n\pi}{k_e - k_o}$$

就可得到圆极化波。满足上式最短距离是

$$d = \frac{\frac{\pi}{2}}{k_e - k_o}$$

定义

$$k_e - k_o = k_B$$

以及

$$k_B \lambda_B = 2\pi$$

所以要得到圆极化波，只要：

$$k_B d = \frac{\pi}{2} \quad 或 \quad d = \frac{\lambda_B}{4}$$

我们将厚度为$\frac{\lambda_B}{4}$的单轴介质称为四分之波板。

二色性和极化太阳镜

很多晶体，如方解石、石英在光频中呈现各向异性特性。对于方解石晶体，$\varepsilon_{/\!/} = 2.21\varepsilon_0$，$\varepsilon_{\perp} = 2.76\varepsilon_0$，是实数。所以在方解石晶体中波传播的速度与波的极化有关。

还有些各向异性介质，对于一个极化方向的波是透明传播的，但对另一极化方向的波就有吸收。所以对于某一极化方向，介电系数是实数，另一极化方向，介电系数是复数，这种性质叫二色性(dichroism)。

1928年，一个名为 Edwin H. Land 的年轻人发现了一种薄膜，当随机极化的太阳光经过该薄膜后成为线极化了。这种材料几经改进，现叫做偏振片。偏振片是一种人工的二色性材料。

第5章我们曾讨论过从介质表面反射的太阳光包含较多的垂直极化波分量(见图5－14)，因此，如果太阳镜用极化薄膜制作，且通过选择薄膜的极化方向使得垂直极化光不容易通过，平行极化光容易通过，那么这种太阳镜与一般的浅色镜相比可较好地滤掉部分耀眼的光。而对于一般的浅色太阳镜，任何极化方向光同样衰减。

液晶

液晶是一种液体，其分子有序排列，液晶可以被电场激活。在非激活态，液晶是各向同性的，当加上电场后，液晶中分子将平行于电场或垂直于电场排列，并成为各向异性介质。

图9－21给出一个典型的液晶显示器原理结构，它是工作于所谓的“扭曲”(DAP)模式。图9－19(a)表示激活前的正常态，进入液晶的光已被偏振片极化，该极化光通过液晶时极化方向不变。当通过第二个偏振片时全部被吸收。最终结果为没有光通过显示器。而在激活态，液晶改变通过光的极化方向，第二个偏振片对于改变了极化方向的通过光是透明的，所以光能通过显示器。

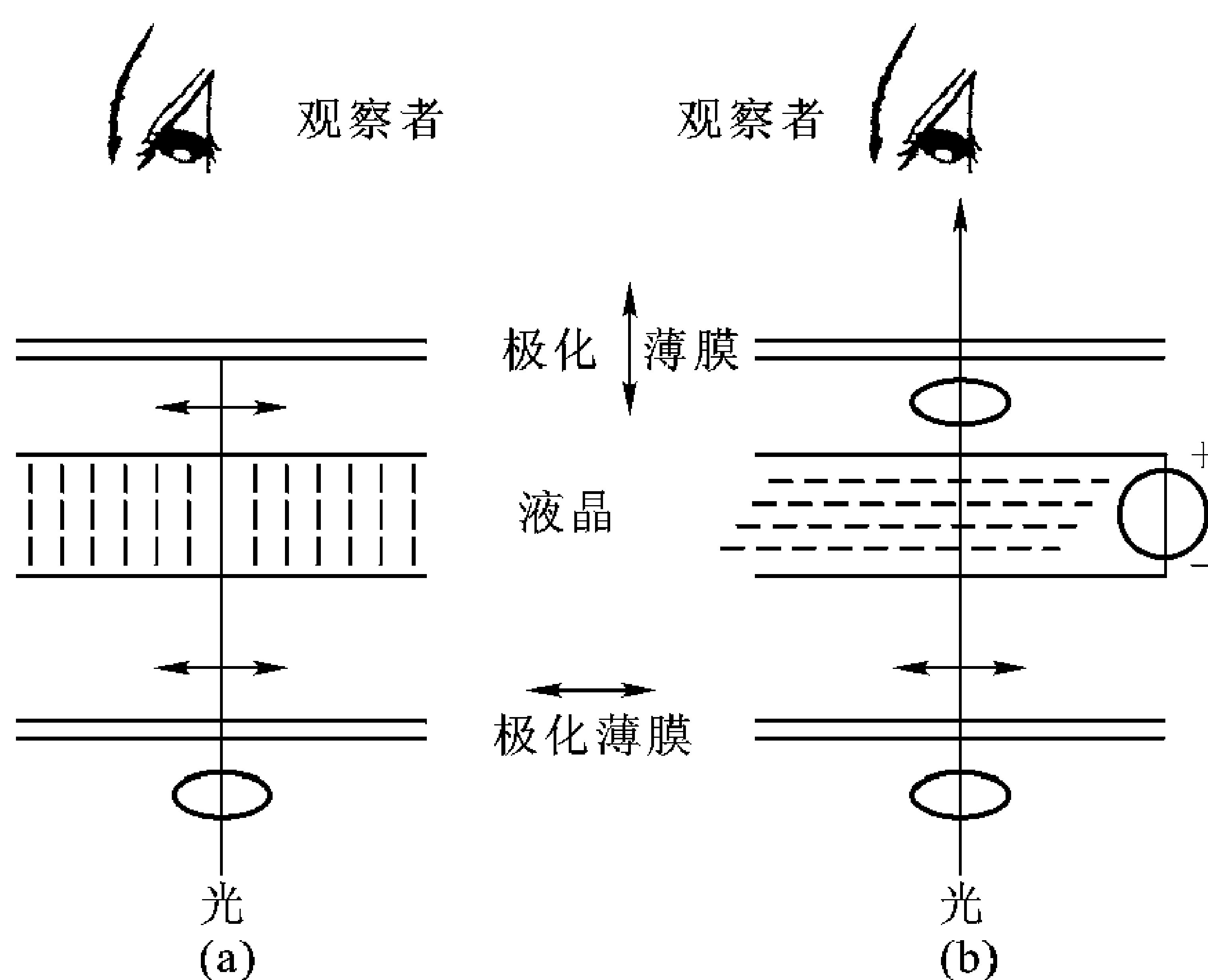


图9－21　作为显示器的液晶
(a) 正常态(非激活态)　(b) 激活态

9.6 磁化铁氧体中的平面波及铁氧体器件

9.6.1 磁化铁氧体磁导率的张量表示

铁氧体是一族化合物的总称，是一种或两种金属氧化物与 Fe_2O_3 混合烧结而成的。铁氧体的化学成分为 $MO \cdot Fe_2O_3$，其中 M 为二阶金属离子，如 Mn^{++}、Mg^{++}或 Ni^{++}等等。

铁氧体属于非金属类磁性材料。它的电阻率高达 $10^8\ \Omega \cdot cm$。这个数值比铁的电阻率大 10^{12}倍，因而电磁波就能深入其内部与其中的自旋电子发生相互作用。铁氧体的介电常数很高，在微波频率下，其值在 10 到 20 之间。

当电磁波通过由恒磁场（$\boldsymbol{H}_0$）偏置下的磁化铁氧体时，铁氧体在各个方向上的导磁率是不相同的，即导磁率是一个张量，呈现各向异性。

铁氧体的磁性主要由与电子自旋相联系的磁偶极矩引起。把自旋电子当作回转陀螺，可以得出磁化过程的经典图像。

当电子绕自身的轴作自旋运动时，会在自旋轴的方向上产生角动量矩 $\boldsymbol{p}$ 和磁偶极矩 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 的方向相反（见图 9－22）。磁矩 $\boldsymbol{m}$ 和角动量 $\boldsymbol{p}$ 的关系为

$$\boldsymbol{m} = \gamma_e \boldsymbol{p} \tag{9.6.1}$$ *

其中，$\gamma_e = e/m = -1.76 \times 10^{11}$ C/kg，是一常数，称为旋磁比。

自旋电子在恒磁场中，就会受到转矩 T 作用，有

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_0 \tag{9.6.2}$$

使自旋电子的偶极轴围绕平行于 $\boldsymbol{H}_0$ 的轴进动，如图 9－22 所示。进动好比是日常生活中见到的陀螺运动，当转动的陀螺一旦有一点倾斜，就会受到重力矩的推动作旋转运动。结果陀螺既自转，又绕轴作公转，这样的运动称为陀螺运动或称为进动。进动的方向是右旋的（见图 9－22）。进动方程是根据角动量的变化率等于转矩关系得到的，即

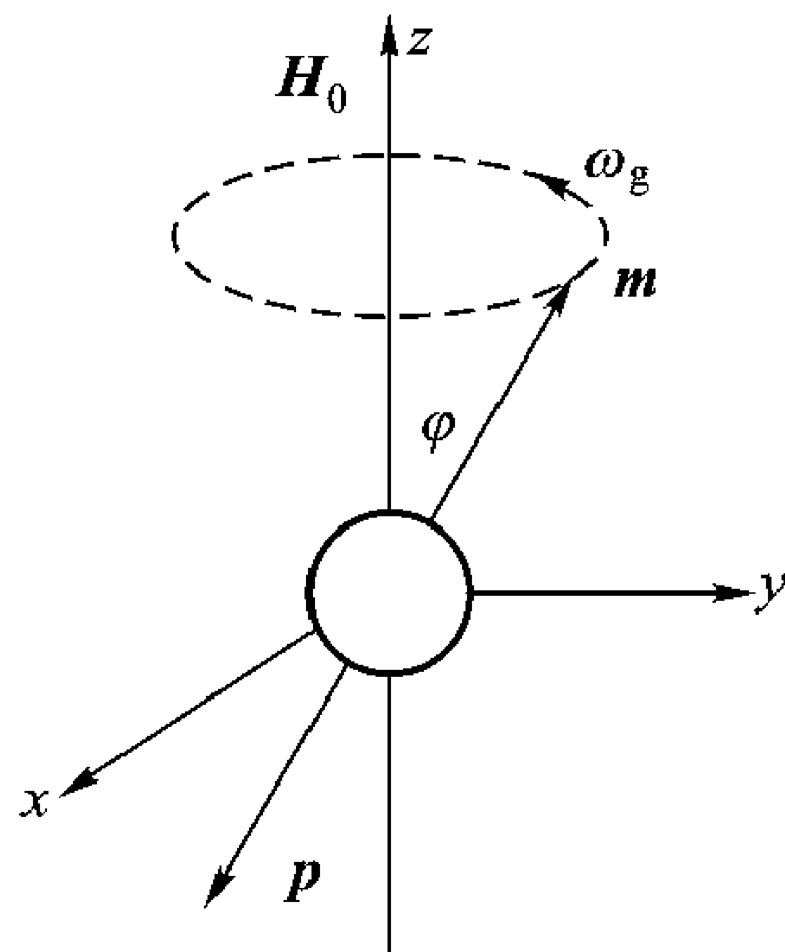


图 9－22 自旋电子的自由进动

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_0 \tag{9.6.3}$$

* 有些教科书上定义 $\boldsymbol{m} = -\gamma_e \boldsymbol{p}$，$\gamma_e = e/m = 1.76 \times 10^{11}$ C/kg，请注意这一差别。

将式(9.6.1)代入上式，即得到单个自旋电子的自旋磁矩的进动方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{m}}{\mathrm{d}t} = \gamma_e (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_0) \tag{9.6.4}$$

上式是对单个自旋电子而言，实际上旋磁介质中存在着许多“元”磁矩，如果这些“元”磁矩的运动状态(包括其振幅和相位)都是一致的，那么我们就可用宏观磁化强度 $\boldsymbol{M}$ (简称磁矩)的运动来描述整个磁介质中“元”磁矩的运动状态。设 $\boldsymbol{M} = n\boldsymbol{m}$，其中 n 为单位体积中 n 个有效的(指未被抵消的)自旋电子，则式(9.6.4)可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} = \gamma_e (\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}_0) \tag{9.6.5}$$

该式为磁矩 $\boldsymbol{M}$ 绕 $\boldsymbol{H}_0$ 旋转的进动方程。进动的角频率 ω_g 与外加恒磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 有关，其关系为

$$\omega_g = \gamma_e H_0 \tag{9.6.6}$$

这种进动运动相当于回路的自由振荡，进动频率相当于电路的自然谐振频率。

当计及铁氧体的损耗对进动所产生的阻尼作用时，式(9.6.5)中应引进一项“阻尼项”加以修正。由于阻尼作用，使 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 之间夹角 φ 随之减少，于是进动将非等幅而以螺旋形式向内旋进，直到 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{H}_0$ 取向一致而停止进动，于是磁化过程在极短暂时间内(约 0.01 μs)完成，这时铁氧体呈现各向同性。

$$\boldsymbol{M} = \chi \boldsymbol{H} \tag{9.6.7}$$

$$B = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu_0 (1 + \chi) \boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} \tag{9.6.8}$$

此时，磁化系数 χ 和相对导磁率 μ_r 均为标量。

由上可知，自旋电子在恒磁场的作用下，为了维持一定幅度的进动，就必须补充能量以补偿由于阻尼引起的能量损耗。微波场就是维持进动的补充能源。

假定一块铁氧体被 $\boldsymbol{H}_0$ 磁化到饱和，$\boldsymbol{H}_0$ 的方向与 z 轴重合。微波磁场 $\boldsymbol{h}$ 为任意方向。这时磁场为

$$\boldsymbol{H} = H_0 z_0 + \boldsymbol{h} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{9.6.9}$$

对应的磁矩为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{9.6.10}$$

其中 $\boldsymbol{M}_0 = M_0 z_0$，为饱和磁矩。为与外加直流磁场相区别，这里我们用 $\boldsymbol{h}$ 表示高频磁场。将以上二式代入磁矩进动方程式(9.6.5)中得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \gamma_e (\boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) \times (\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) \tag{9.6.11}$$

由于 $\boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{H}_0 = 0$，加上 $h << H_0$，$m << M_0$，在一级小信号理论中，两个小量

的乘积项可以略去不计，则

$$\mathrm{j}\omega \boldsymbol{m} - \gamma_e (\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_0) = \gamma_e \boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{h}$$

将上式写成分量式，得

$$\mathrm{j}\omega m_x - \gamma_e H_0 m_y = -\gamma_e M_0 h_y \tag{9.6.12a}$$

$$\gamma_e H_0 m_x + \mathrm{j}\omega m_y = \gamma_e M_0 h_x \tag{9.6.12b}$$

$$\mathrm{j}\omega m_z = 0 \tag{9.6.12c}$$

解 m_x 和 m_y，得

$$m_x = \frac{\omega_g \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} h_x - \mathrm{j} \frac{\omega \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} h_y \tag{9.6.13a}$$

$$m_y = \mathrm{j} \frac{\omega \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} h_x + \frac{\omega_g \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} h_y \tag{9.6.13b}$$

$$m_z = 0 \tag{9.6.13c}$$

式中 $\omega_g = \gamma_e H_0$，$\omega_m = \gamma_e M_0$。

式(9.6.13)可写成为

$$\boldsymbol{m} = \chi \boldsymbol{h} \tag{9.6.14}$$

按照磁感应强度的定义

$$\boldsymbol{b} = \mu_0 (\boldsymbol{h} + \boldsymbol{m}) = \mu_0 ([1] + \chi) \boldsymbol{h} \tag{9.6.15}$$

式中 $\boldsymbol{b}$ 为高频场 $\boldsymbol{h}$ 所产生的磁感应强度，其分量式为

$$b_x = \mu_0 (\mu_{11} h_x - \mathrm{j}\mu_{12} h_y) \tag{9.6.16a}$$ *

$$b_y = \mu_0 (\mathrm{j}\mu_{12} h_x + \mu_{11} h_y) \tag{9.6.16b}$$ *

$$b_z = \mu_0 h_z \tag{9.6.16c}$$

式中

$$\mu_{11} = 1 + \frac{\omega_g \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} \tag{9.6.17a}$$

$$\mu_{12} = \frac{\omega \omega_m}{\omega_g^2 - \omega^2} \tag{9.6.17b}$$

将式(9.6.16)写成为

$$\boldsymbol{b} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{h} \tag{9.6.18}$$

因此，高频下磁化铁氧体的导磁率是一个反对称二阶张量，即

$$\mu_r = \begin{bmatrix} \mu_{11} & -\mathrm{j}\mu_{12} & 0 \\ \mathrm{j}\mu_{12} & \mu_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.6.19}$$

* 有些教科书上 $b_x = \mu_0 (\mu_{11} h_x + \mathrm{j}\mu_{12} h_y)$，$b_y = \mu_0 (-\mathrm{j}\mu_{12} h_x + \mu_{11} h_y)$，其差别源于 γ_e 的定义，请读者留意。

由此可见：

(1) 如果 $\omega_g=0$，即铁氧体没有磁化，$\omega_m=0$，铁氧体内场很小，则$\mu_{11}=1$，$\mu_{12}=0$，$\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$。因此，未受磁化的铁氧体是一均匀各向同性的介质。

(2) 当一恒定磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 加在铁氧体上时，它变成一块各向异性介质。沿着 x 轴方向的高频磁场 h_x 不仅沿 x 方向产生一个磁感应强度分量 $\mu_0\mu_{11}h_x$，而且还沿 y 方向感生一个分量 $\mathrm{j}\mu_0\mu_{12}h_x$。$\mu_{11}$项可以认为是 $\boldsymbol{h}$ 对 $\boldsymbol{b}$ 的直接贡献，而 μ_{12}项可以认为是一耦合项，它把高频能量由一种偏振转变为另一种偏振，而这两种偏振是互相垂直的。这里我们用小写 $\boldsymbol{h}$、$\boldsymbol{b}$ 表示交变磁场强度与磁感应强度，以跟表示恒定磁场的大写 $\boldsymbol{H}_0$ 相区别。

(3) 如果 $\omega=0$（没有高频场），则 $\mu_{11}=1+\dfrac{\omega_m}{\omega_g}$，$\mu_{12}=0$，铁氧体成为一种磁性单轴晶体。因此磁导率张量是对高频磁场而言的。

(4) μ_{11}、μ_{12}都是外加直流磁场 $\boldsymbol{H}_0$、饱和磁化强度 $\boldsymbol{M}_0$ 和外加频率 ω 的函数。因此可以用改变 $\boldsymbol{H}_0$ 的办法改变 μ_{11}和 μ_{12}。

(5) 当 $\omega=\omega_g$，$\mu_{11}\to\infty$，$\mu_{12}\to\infty$，会发生所谓共振现象。这类共振是由铁磁材料中自旋电子的一致进动而引起的，因此我们称它为铁磁共振。

张量导磁率 μ_r 是在高频场为小信号（即 $h \ll H_0$）情况下得到的，在这个条件下，μ_{11}和 μ_{12}与交变磁场 $\boldsymbol{h}$ 无关，因此 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{h}$ 的关系是线性的。在大信号时，小信号的近似结果不能适用，铁氧体将呈现非线性效应。考虑非线性效应时要计及进动过程中的阻尼损耗。

9.6.2 波方程及其平面波解

利用并矢 $\bar{\bar{\mu}}$ 表示磁化铁氧体的磁导率后，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{h}$ 的线性关系可表示成

$$\boldsymbol{b}=\bar{\bar{\mu}}\cdot\boldsymbol{h} \tag{9.6.20}$$

麦克斯韦方程组中两个旋度方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{h}=\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E} \tag{9.6.21}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\bar{\bar{\mu}}\cdot\boldsymbol{h} \tag{9.6.22}$$

消去 $\boldsymbol{E}$，得到

$$-\nabla^2\boldsymbol{h}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{h})-\omega^2\varepsilon_0\bar{\bar{\mu}}\cdot\boldsymbol{h}=0 \tag{9.6.23}$$

(9.6.23)就是磁化铁氧体中波方程的一般表示。

假设铁氧体中具有平面波解

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{9.6.24}$$

$$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_y\boldsymbol{y}_0+k_z\boldsymbol{z}_0 \tag{9.6.25}$$

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{x}_0+y\boldsymbol{y}_0+z\boldsymbol{z}_0 \tag{9.6.26}$$

式(9.6.23)成为

$$k^2\boldsymbol{h}_0-\boldsymbol{k}\ (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{h}_0)-\omega^2\varepsilon_0\bar{\bar{\mu}}\cdot\boldsymbol{h}_0=0 \tag{9.6.27}$$

为了求解，可以把式(9.6.27)写成分量形式，并设 $\boldsymbol{k}$ 在 $x-z$ 平面与 z 轴成 θ 角，则

$$\boldsymbol{h}_0=h_x\boldsymbol{x}_0+h_y\boldsymbol{y}_0+h_z\boldsymbol{z}_0 \tag{9.6.28}$$

$$\boldsymbol{k}=k_x\boldsymbol{x}_0+k_z\boldsymbol{z}_0 \tag{9.6.29}$$

$$\left.\begin{aligned}k_x&=k\sin\theta\\k_z&=k\cos\theta\\k_y&=0\end{aligned}\right\} \tag{9.6.30}$$

因此有

$$\begin{bmatrix}k^2-k^2\sin^2\theta-k_0^2\mu_{11} & \mathrm{j}k_0^2\mu_{12} & -k^2\sin\theta\cos\theta\\ -\mathrm{j}k_0^2\mu_{12} & k^2-k_0^2\mu_{11} & 0\\ -k^2\sin\theta\cos\theta & 0 & k^2-k^2\cos^2\theta-k_0^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_x\\h_y\\h_z\end{bmatrix}=0 \tag{9.6.31}$$

式(9.6.31)是线性齐次方程组，其非零解必须使其系数行列式为零，则得传播常数的两个解 $k^{\pm}$ 为

$$k^{\pm}=k_0\left\{\frac{(\mu_{11}^2-\mu_{12}^2-\mu_{11})\sin^2\theta+2\mu_{11}\pm\left[(\mu_{11}^2-\mu_{12}^2-\mu_{11})^2\sin^2\theta+4\mu_{12}^2\cos^2\theta\right]^{1/2}}{2\left[(\mu_{11}-1)\sin^2\theta+1\right]}\right\}^{1/2} \tag{9.6.32}$$

两种特别有意义的情况发生在 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi/2$，这相当于波矢 $\boldsymbol{k}$ 平行于或正交于直流磁场 $\boldsymbol{H}_0$，并分别称为纵向传播的波和横向传播的波。如取 $\theta=0$，则

$$k^{\pm}=k_0\ (\mu_{11}\pm\mu_{12})^{1/2} \tag{9.6.33}$$

如取 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，当 $\boldsymbol{h}\perp\boldsymbol{H}_0$ 时，有

$$k=k_0\left(\frac{\mu_{11}^2-\mu_{12}^2}{\mu_{11}}\right)^{1/2} \tag{9.6.34}$$

当 $\boldsymbol{h}\parallel\boldsymbol{H}_0$ 时，因为 $\boldsymbol{H}_0$ 在 z 方向，故 $\boldsymbol{h}$ 也只有 h_z 分量，由式(9.6.31)可得

$$k=k_0 \tag{9.6.35}$$

式中

$$k_0=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}。 \tag{9.6.36}$$

9.6.3 纵向传播的波与横向传播的波

1. 纵向传播的波($\boldsymbol{\theta=0}$)

由式(9.6.31)，并应用式(9.6.33)中的 k 值，得到

$$h_z = 0 \tag{9.6.37a}$$

$$\frac{h_y}{h_x} = \frac{k^2 - k_0^2 \mu_{11}}{k_0^2 (-\mathrm{j}\mu_{12})} = \pm \mathrm{j} \tag{9.6.37b}$$

式中 ± 号与式(9.6.33)中的符号一致。因此

$$\boldsymbol{h}_0^{\mp} = h_x (\boldsymbol{x}_0 \pm \mathrm{j}\boldsymbol{y}_0) \tag{9.6.38}$$

这说明式(9.6.27)的解是圆极化波，$\boldsymbol{h}_0^{\mp}$ 分别代表左旋和右旋圆极化波的磁场强度矢量，由式(9.6.33)可见，右旋波和左旋波的传播速度是不同的。

记有效相对磁导率

$$\mu_e^{\mp} = \mu_{11} \pm \mu_{12} = 1 + f_m (f_g \pm f)^{-1} \tag{9.6.39}$$

如以多晶体 YIG 铁氧体为例，$\boldsymbol{M}_0 = 1\ 750$ Oe $\left(1 \text{ Oe} = \dfrac{1\ 000}{4\pi} \text{ A/m}\right)$，故 $f_m =$ 4.9 GHz，有效相对磁导率 $\mu_e^{\mp}$ 与 f_g/f 的关系曲线如图 9－23。f 值选 9.8 GHz。从图中可见，左旋圆极化波的有效磁导率 μ_e^- 随 f_g/f 缓慢变化，并随 f_g/f 的增大，有效导磁率 μ_e^- 从 1.5 减到 1。然而右旋圆极化波的有效导磁率 μ_e^+ 从开始是小正值，并在 $f_g/f = 1 - f_m/f$ 处，$\mu_e^+ = 0$，一直至极点 $f_g/f = 1$ 处是止带，然后都是通带。所以当 $f = f_g$ 时 μ_e^+ 具有共振特性，而 μ_e^- 为有限值，无共振特性。

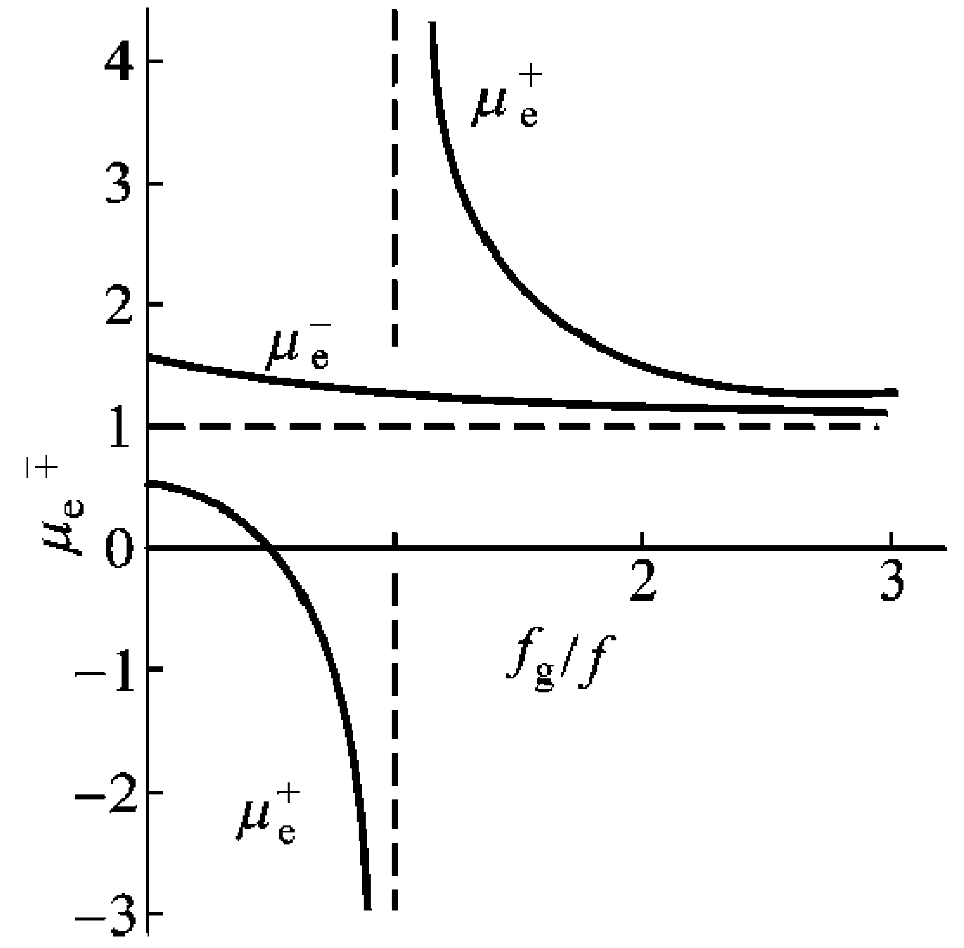


图 9－23　9.8 GHz 平面波在 YIG 铁氧体中平行于直流磁场传播时 $\mu_e^{\mp}$ 与 f_g/f 关系

利用式(9.6.39)，则式(9.6.33)简记为

$$k^{\mp} = k_0 \sqrt{\mu_e^{\mp}} \tag{9.6.40}$$

所以平面波在各向异性铁氧体中传播，由于分解成左、右旋圆极化波的 k 值不同而具有不同相速，从而使合成波的极化平面旋转。假如两分量相等或无衰减、极化平面的转角 φ 由

$$\varphi = \frac{(k^- - k^+) z}{2} \tag{9.6.41}$$

来计算。当 $\omega \gg \omega_g$，$\omega \gg \omega_m$，式(9.6.41)成为

$$\varphi = \frac{\omega_m}{2c} z \tag{9.6.42}$$

式中，c 是铁氧体材料中光速，因此这种情况转角与频率无关，从而把铁氧体可以制成宽带器件。如果波在反向传播，可得相同转角，这表明铁氧体这种各向异性介质是非互易的，这种非互易性质即法拉第旋转。

2. 横向传播的波($\theta=\pi/2$)

对于 $\boldsymbol{h}\parallel\boldsymbol{H}_0$，波数 k 与铁氧体的各向异性无关，因而铁氧体中的场与各向同性介质中的场是一样的，故这种波一般称为寻常波。因为 h_z 是磁场强度 $\boldsymbol{h}$ 的惟一非零分量，故 $\boldsymbol{b}_z=\mu_0 h_z$ 是磁通量密度矢量的惟一非零分量。从旋度方程

$$\omega\boldsymbol{b}_0=\boldsymbol{k}_0\times\boldsymbol{E}_0 \tag{9.6.43}$$

得电场的惟一非零分量

$$E_y=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}h_z \tag{9.6.44}$$

以及

$$\boldsymbol{k}=k_0\boldsymbol{x}_0 \tag{9.6.45}$$

因此寻常波是线极化 TEM_x 波，如同在 μ_0 和 ε 的各向同性介质中传播一样。

对于 $\boldsymbol{h}\perp\boldsymbol{H}_0$，其传播常数为式(9.6.34)，一般称为非寻常波，由式(9.6.31)和式(9.6.33)可以分别求得电场和磁场如下

$$\begin{aligned}
&h_z=0\\
&\frac{h_y}{h_x}=-\mathrm{j}\frac{\mu_{11}}{\mu_{12}}\\
&b_x=b_z=0\\
&b_y=\left(\frac{\mu_0 k^2}{k_0^2}\right)h_y=\mu_0\mu_{\mathrm{e}}h_y\\
&E_x=E_y=D_x=D_y=0\\
&E_z=-\sqrt{\frac{\mu_0\mu_{\mathrm{e}}}{\varepsilon_0}}h_y\\
&\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{x}_0\\
&k=k_0\sqrt{\mu_{\mathrm{e}}}\\
&\mu_{\mathrm{e}}=\frac{\mu_{11}^2-\mu_{12}^2}{\mu_{11}}=\frac{f^2-(f_{\mathrm{g}}+f_{\mathrm{m}})^2}{f^2-f_{\mathrm{g}}^2-f_{\mathrm{g}}f_{\mathrm{m}}}
\end{aligned} \tag{9.6.46}$$

由式(9.6.46)可见，非寻常波仅具有 h_x、h_y 和 E_z 3 个分量，因波在传播方向存在 h_x 分量，故这种波是 TE_x 波，且有 $h_y/h_x=-\mathrm{j}(\mu_{11}/\mu_{12})$。因此，磁矢量 $\boldsymbol{h}$ 在 $x-y$ 平面内是椭圆极化的，见图 9－24。

由 μ_{e} 的表达式可见，当 $f_{\mathrm{g}}/f=1-f_{\mathrm{m}}/f_{\mathrm{g}}$ 时，$\mu_{\mathrm{e}}=0$；当 $f_{\mathrm{g}}/f=-f_{\mathrm{m}}/2f+\sqrt{(f_{\mathrm{m}}/2f)^2+1}$时，可出现极点。见图 9－25。

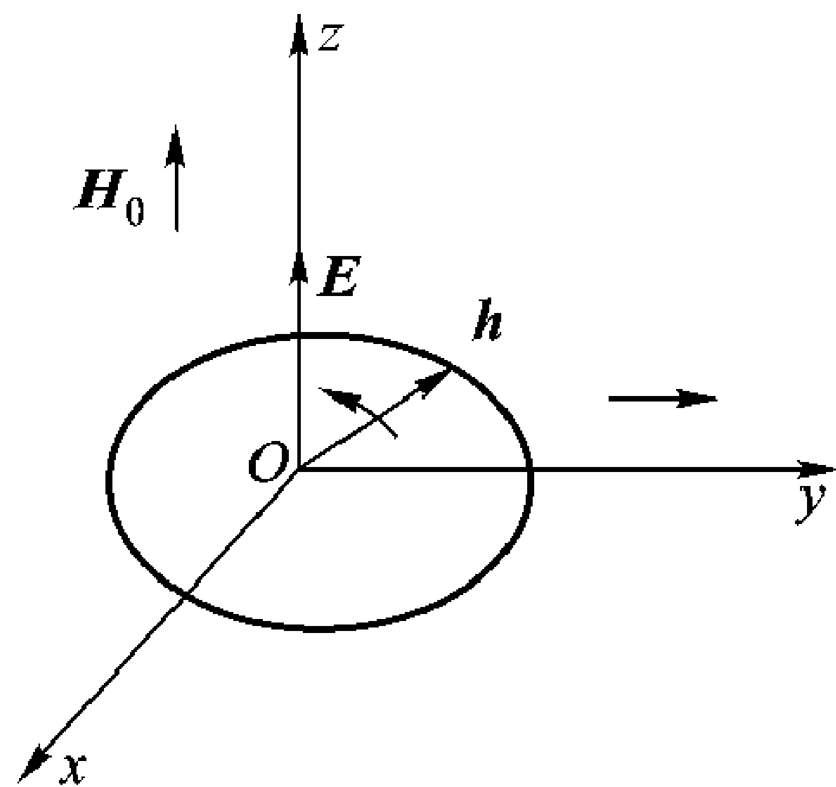


图 9－24　非寻常波的椭圆极化

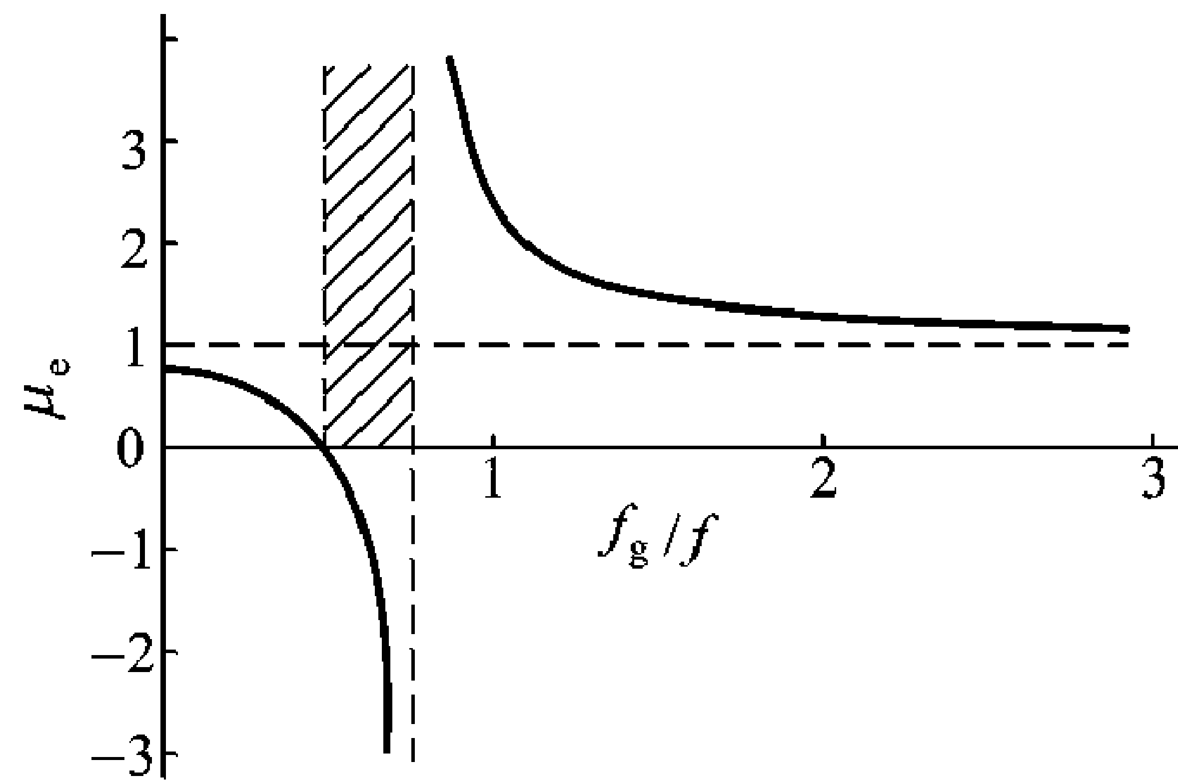


图 9－25　9.5 GHz 非寻常平面波在 YIG 铁氧体中垂直于直流磁场传播时 μ_e 与 f_g/f 关系

9.6.4　铁氧体波导器件

利用铁氧体中波传播的非互易特性可制成各类波导器件，如隔离器、移相器、环行器等，下面主要介绍微波波段的铁氧体器件。

在具体讨论铁氧体波导器件以前，这里有必要提醒一点，本节定义的纵向、横向是以波矢 $\boldsymbol{k}$ 相对于直流磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 的方向而言的。当 $\boldsymbol{k}$ 平行于 $\boldsymbol{H}_0$ 时，称为纵向，而当 $\boldsymbol{k}$ 垂直于 $\boldsymbol{H}_0$ 时，则称为横向。这与波导中关于波传播的纵向、横向是有区别的。以前我们讨论的波导结构总有一个方向延伸至无穷远，习惯上把延伸至无穷远的方向定义为纵向。波导中的波矢可分解为 3 个分量，从波动过程看，这 3 个分量所指示的方向，都可定义为纵向。为避免不必要的混乱，本节以后将波导中 $+z$ 方向（波导延伸至无穷远的方向）传播的波称为正向传播的波，而沿 $-z$ 方向的波称为反向传播波，请读者留意。

谐振式隔离器

利用纵向传播的波当 $f=f_g$ 时 μ_e^+ 的共振吸收现象，可以做成谐振式隔离器。习题 6.6 已证明过图 9－26 所示矩形波导，当 TE_{10}模正向传输时，在 $x=(a/\pi)\operatorname{arccot}\sqrt{(2a/\pi)^2-1}$的 AA' 位置上由 A 向 A' 看为右旋圆极化波，在 $x=a-(a/\pi)\operatorname{arccot}\sqrt{(2a/\pi)^2-1}$的 BB' 位置，由 B 向 B' 看时为左旋圆极化波；当波反向传输时，则相反。

如图 9－27，在矩形波导圆极化位置放入铁氧体片，直流磁场取值使 $f_g=f$，则波导中的波正向传输时，铁氧体片处于左旋极化波，因而没有衰减；反向传输时，铁氧体右旋极化波产生共振吸收，使波受到很大衰减。谐振式隔离器设计容易，但所需直流磁场高，因而体大、笨重。这种隔离器多用于高功

率情况。铁氧体片可以用单片也可用双片，并紧贴于波导上下宽边内表面，以便散热。为了加宽频带可在铁氧体片一边加介质片。

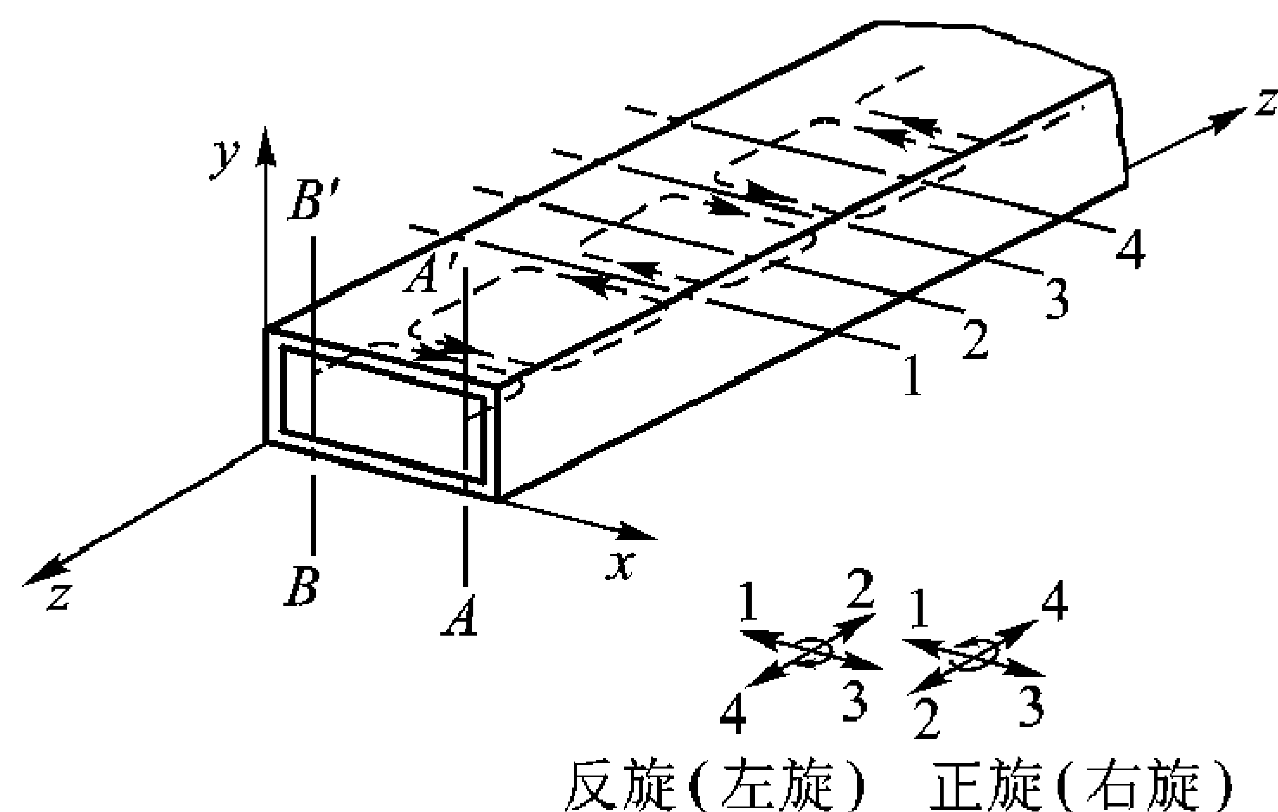


图9-26　矩形波导中TE_{10}模的圆极化现象

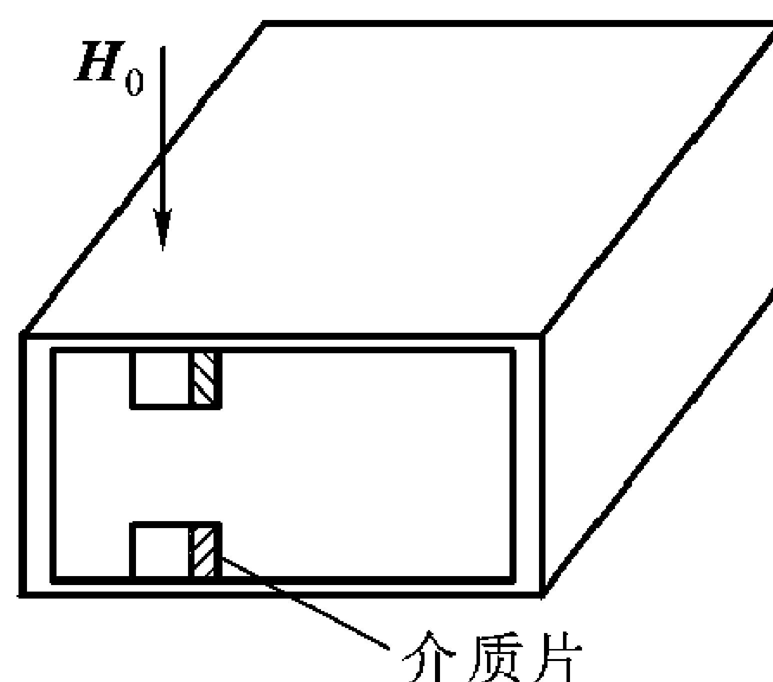


图9-27　谐振式隔离器

场移式隔离器

矩形波导中放置横向磁化铁氧体片还可能出现不可逆场移效应。在波导中接近圆极化磁场处放置横向磁化铁氧体片，直流磁场值使$f_g < f$，如图9-23所示，此时$\mu_e^- >> \mu_e^+$。因此当波正向传输时，电磁能量主要集中于波导中心轴线附近，但由于μ_e^+很小，使能量离开铁氧体，场强最大位置稍有偏移；而当波反向传播时，由于μ_e^-很大而使电磁场能量集中于铁氧体附近，也使TE_{10}模场强发生了移动。这种横向磁化铁氧体引起的电场最强位置偏移的现象称为场移效应，见图9-28，这种效应也是不可逆的。利用这种效应可做成铁氧体场移式隔离器，见图9-29。贴在铁氧体表面的电阻片对正向传输的波衰减很

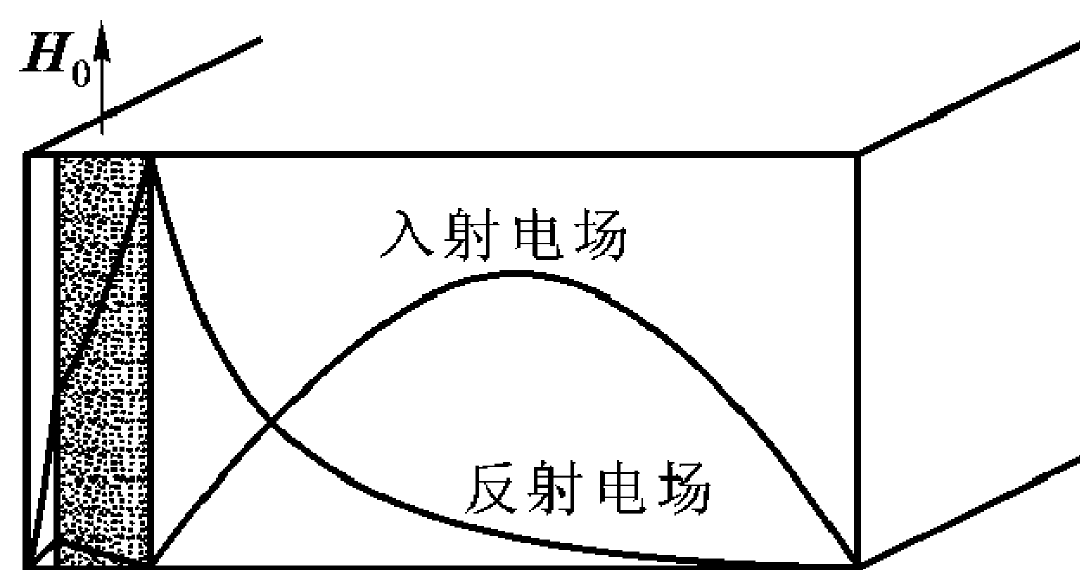


图9-28　不可逆场移效应

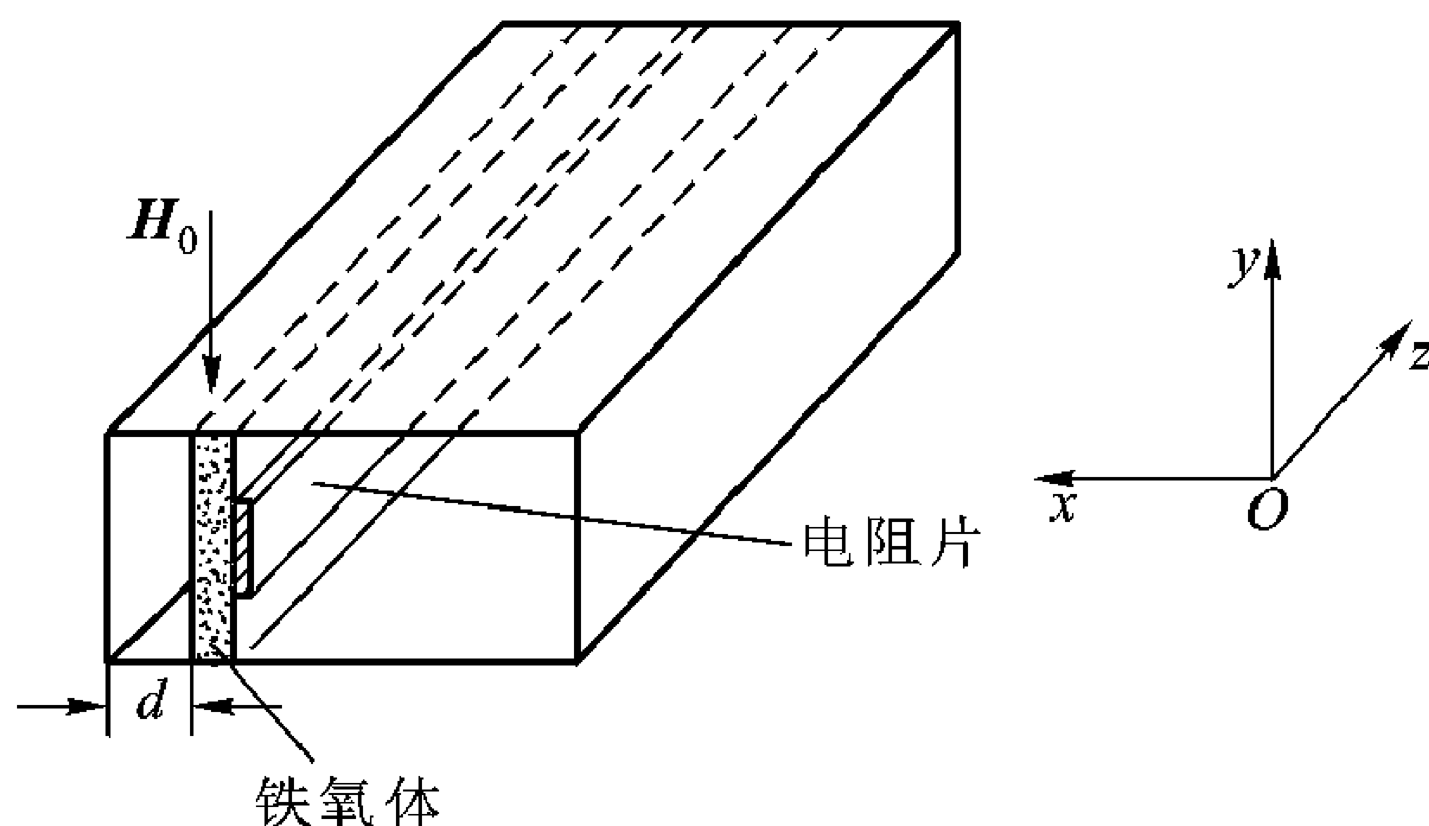


图9-29　场移式隔离器

小，而对反向传输的波衰减很大。

法拉第旋转隔离器、非互易移相器

图 9－30 表示应用法拉第旋转效应做成的隔离器。图中铁氧体棒放在圆波导轴上，并设计其长度 l 满足法拉第旋转角

$$\theta = \frac{(\beta_{-} - \beta_{+})l}{2} = \frac{\pi}{4}$$

沿轴向外加直流磁场 $\boldsymbol{H}_0$，其输入和输出端均为矩形波导，但它们的口面相对于 z 轴互成 45°角。在这种隔离器中，反向波在输出端矩形波导中将被截止。如图 9－30（b)所示，左边矩形波导沿 z 轴正向传输的 TE_{10}模，由过渡波导变换成圆波导的 TE_{11}模，电阻片 1 与电场极化面垂直，所以电磁波无衰减地向磁化铁氧体传输，通过铁氧体后极化面旋转了 $\pi/4$ 法拉第旋转角，其极化面是右旋的，电阻片 2 与其电场极化面垂直，故电磁波不会受到衰减，然后经过渡波导变换成 TE_{10}模由矩形波导输出。而从图 9－30（c)右边矩形波导反向传输的 TE_{10}模，经过铁氧体后旋转了 45°角，其极化面为左旋的，结果其电场极化面与电阻片 1 平行，电磁波将受到很大衰减，且由于左边的矩形波导宽边与电场极化面平行，因此反向波得不到输出。

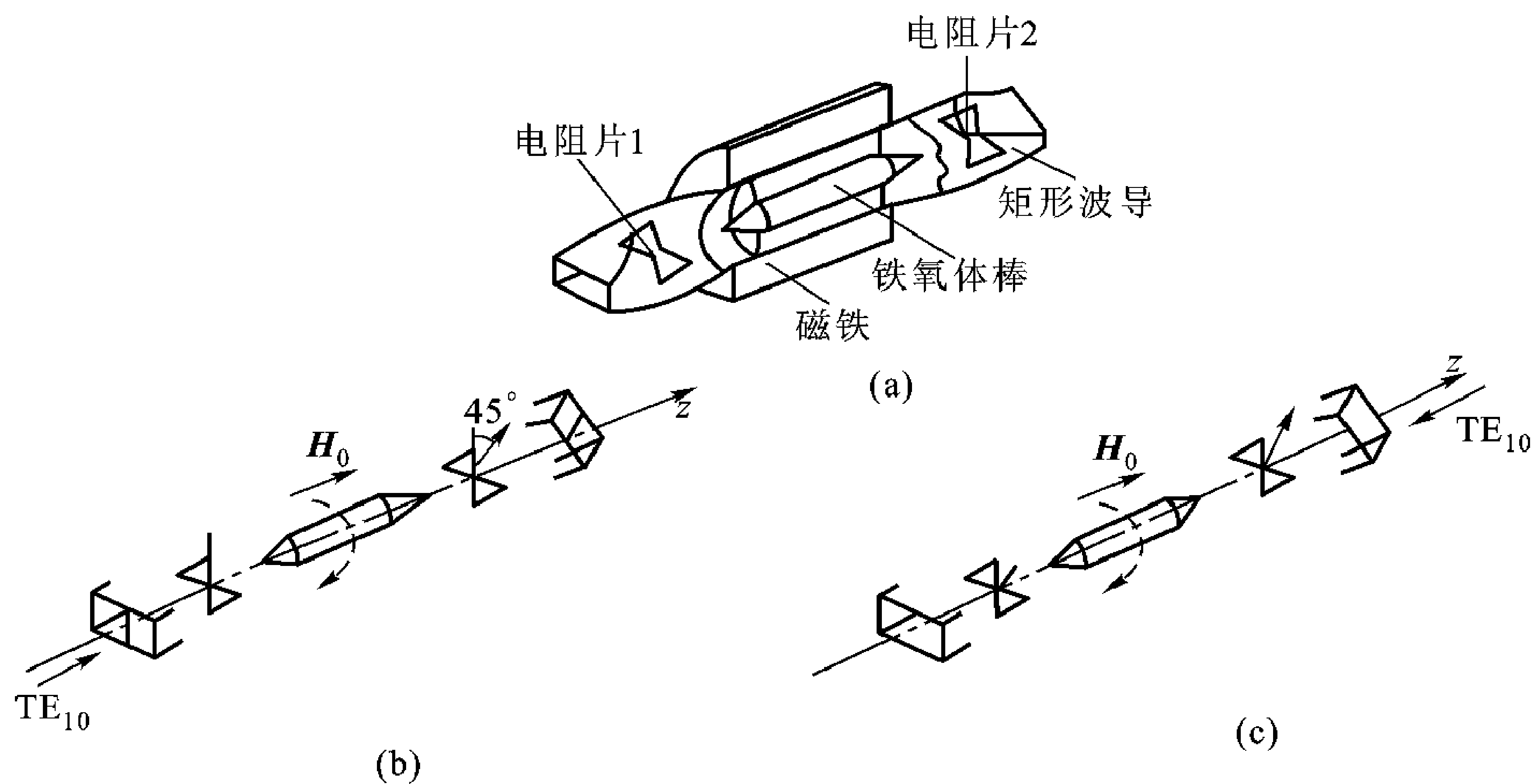


图 9－30 法拉第旋转式铁氧体隔离器
（a）结构原理 （b）正向传输时 （c）反向传输时

法拉第旋转式隔离器的功率容量低，机械结构较复杂，且隔离器较长，故很少用。但它可用在弱直流磁场的场合，因而适用于回旋共振磁场高的毫米波波段。

图9-31示意了利用法拉第旋转效应制成的一种180°非互易移相器(又称回转器)的结构,图中示出了入射波及反射波偏振面的旋转情况,读者可自己分析其原理。

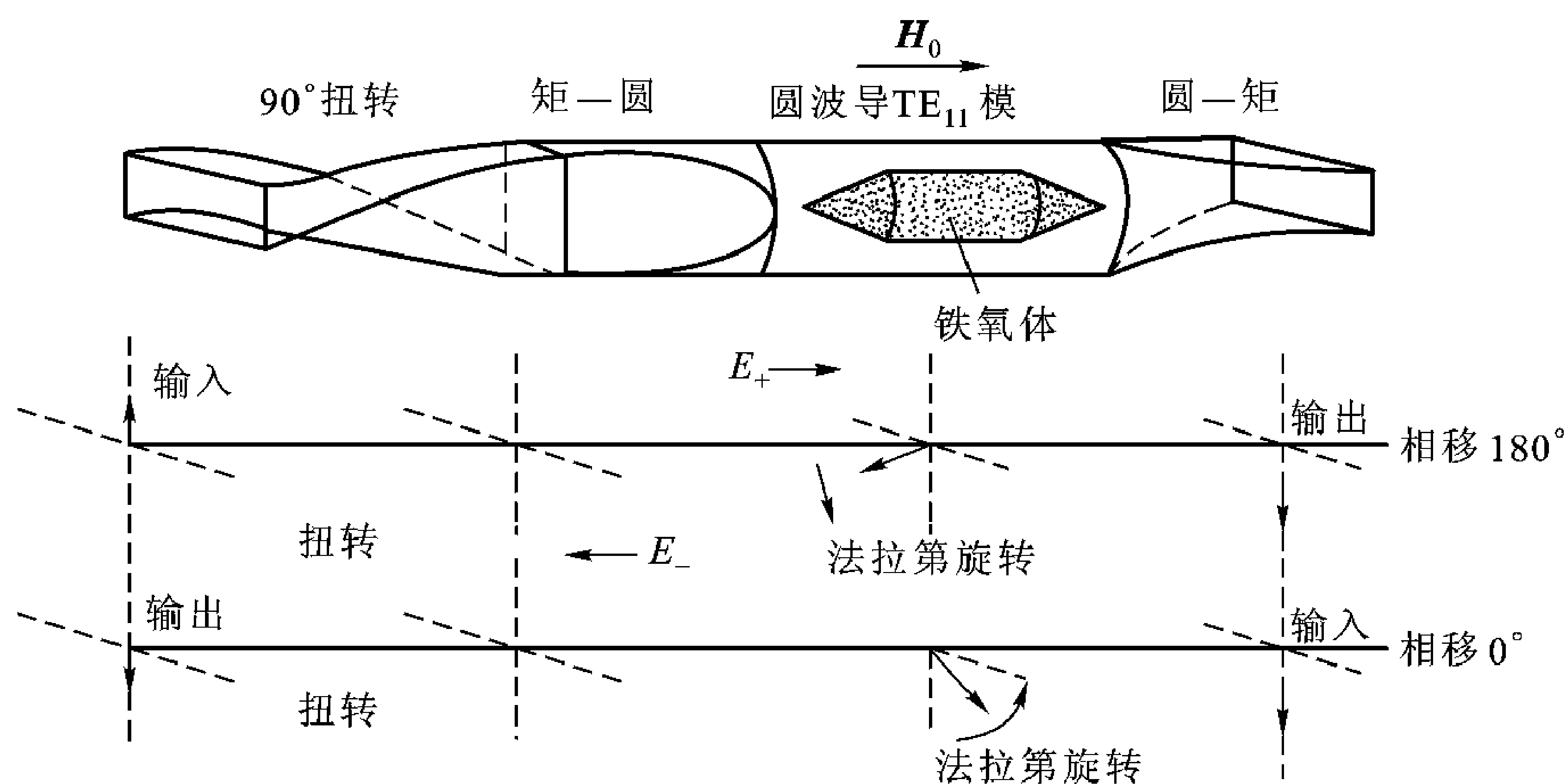


图9-31　回转器

环行器

环形器的种类很多,主要有相移式环行器、法拉第旋转式环行器、场移式环行器和结环行器等。限于篇幅,这里只介绍一种不可逆相移式四端环形器。这种环行器由两个魔T和一个回转器组成,如图9-32所示,端口1、端口2是魔T的H臂,端口3、端口4是E臂。

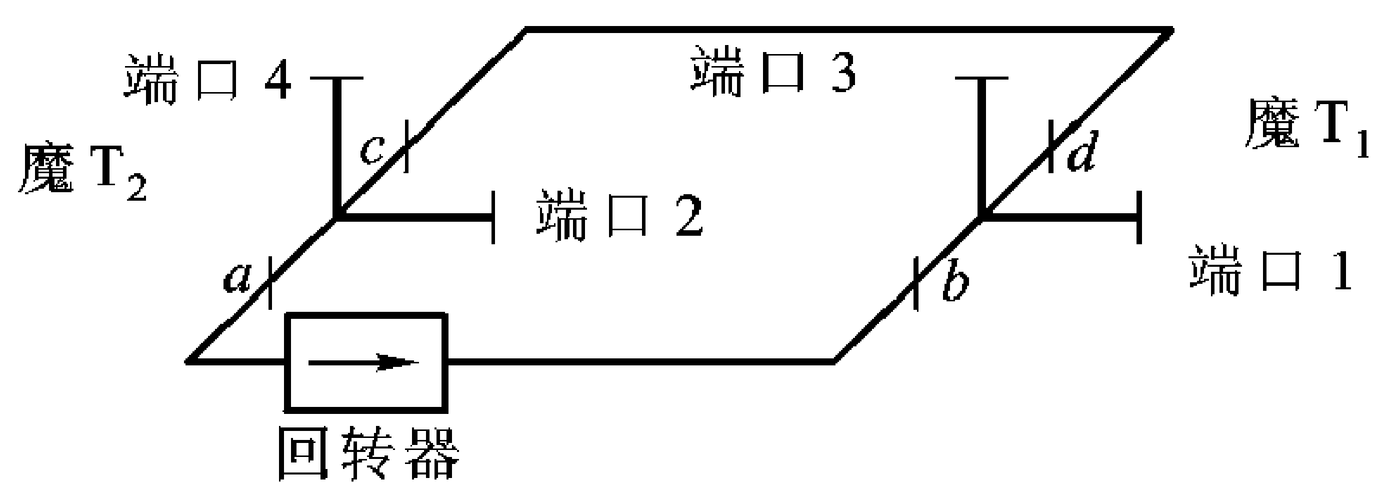


图9-32　双魔T型环行器

端口1的入射波进入魔T_1。由于端口1是魔T的H臂,入射波将平分成等振幅、等相位的两个波,并分别由端口b、端口d输出。当它们到达魔T_2的端口a、端口c时仍是同相的。因为回转器反射无附加相移,因此在只有H面的端口2有输出。当端口2有入射波时,由于端口a输出的波正向通过回转器,有180°的附加相移,而端口c输出的波未经回转器,没有附加相移,这时端口b、端口d的输入波反相,因此端口3有输出而端口1无输出。依此类推,读者可自己分析其余二端口的情况。

光隔离器

某些光器件,像LD及光放大器等对来自连接器、熔接点、滤波器等的反

射光非常敏感，并导致性能恶化，因此需要用光隔离器来阻止反射光。光隔离器是一种只允许单向光通过的无源光器件，其工作基于法拉第旋转的非互易性。图 9 – 33 为光隔离器的结构与工作原理图。对于正向入射的信号光，通过起偏器后成为线偏振光，法拉第旋磁介质与外磁场一起使信号光的偏振方向右旋 45°，并恰好低损耗通过与起偏器成 45°放置的检偏器。对于反向光，出检偏器的线偏振光经过旋转介质时，偏转方向也向右旋转 45°，从而使反向光的偏振方向与起偏器方向正交，完全阻断了反向光的传输。

法拉第旋磁介质在 1 ~ 2 μm 波长范围通常采用光损耗低的钇铁石榴石(YIG)单晶。

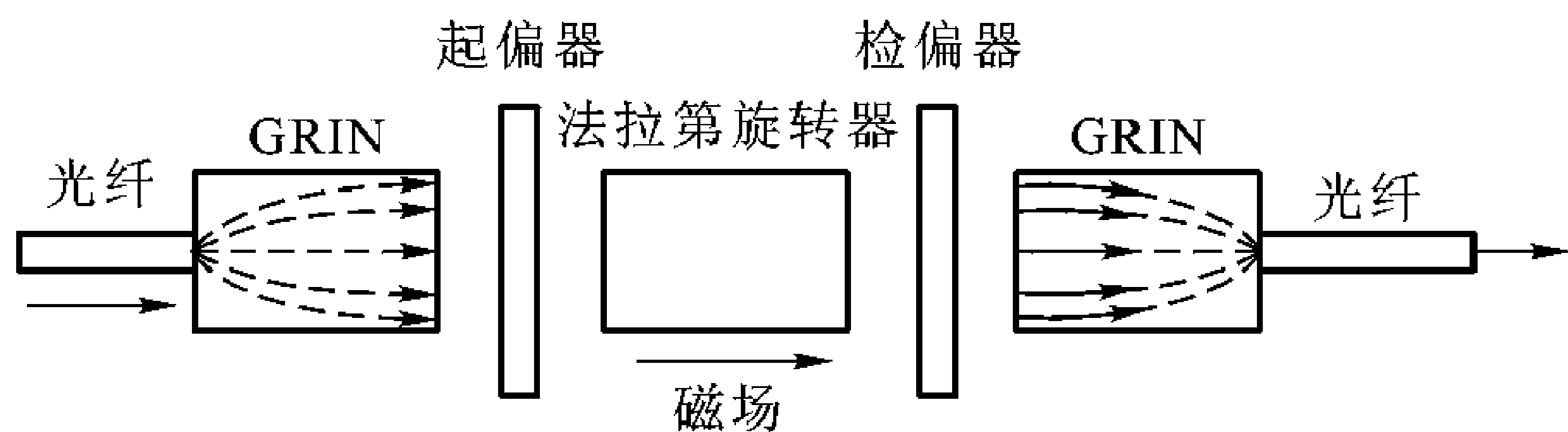


图 9 – 33　法拉第磁光隔离器

新型尾纤输入输出的光隔离器有相当好的性能，最低插入损耗仅约 0.5 dB、隔离度达 35 ~ 60 dB，最高可达 70 dB。

光学环形器

光学环形器功能与微波环形器功能相似，已提出多种结构型式。图 9 – 34 是较早提出的一种结构形式，它由一个 YIG 旋转器，一个石英旋转器，两个极化光分离器，两个直角棱镜组成。从端口①进来的两束正交的极化光通过极化

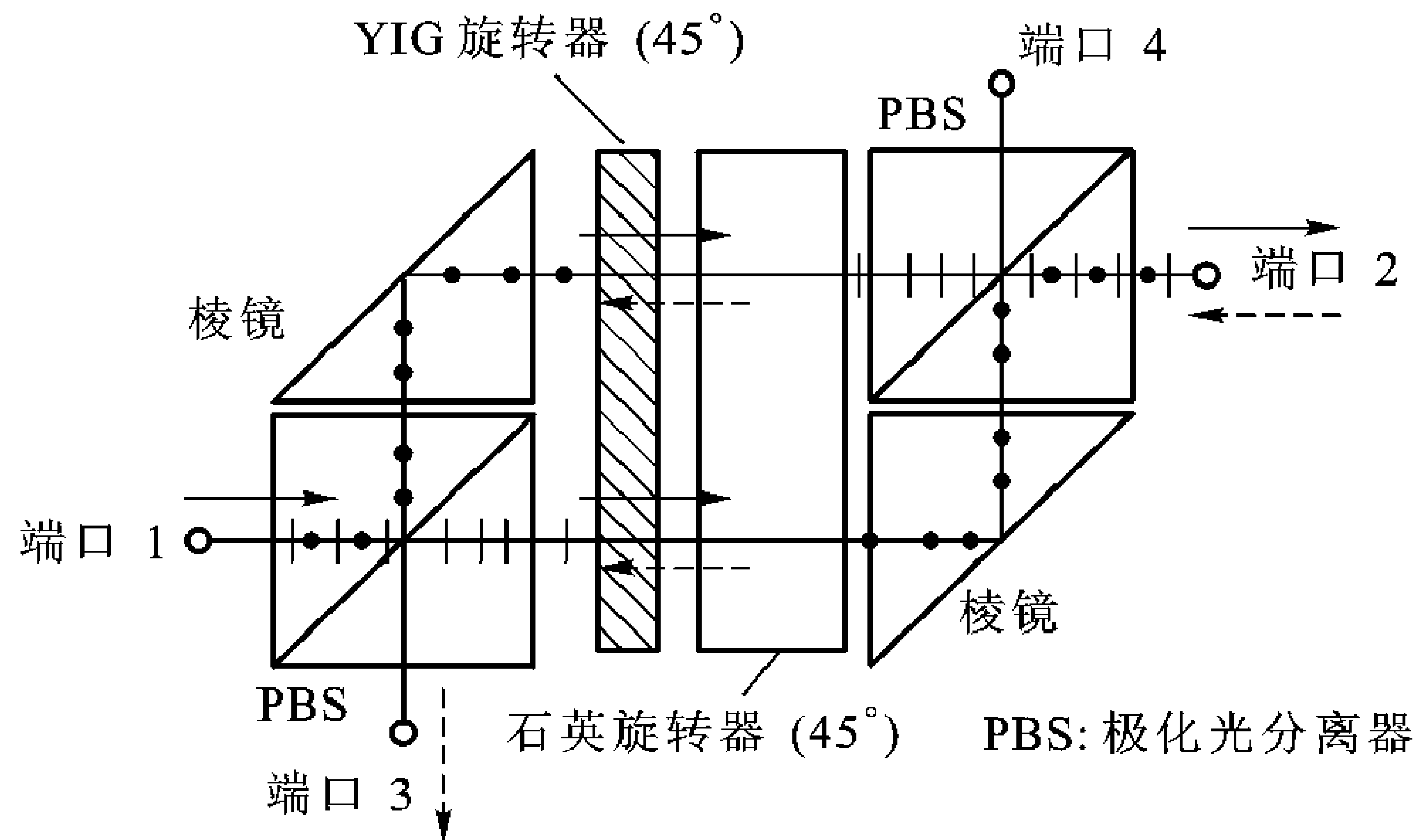


图 9 – 34　光学环行器原理图

光分离器分成两个极化光束，图中用实线表示。每一个极化光束经旋转器，极化平面互换(各转过90°)，当它们又一次通过极化分离器时就从第二端口输出。端口②的输入光(用虚线表示)经过极化光分离器也被分离成两个极化波束。但是被分解的两个极化光的极化特性由于系统的非互易特性，当它们到达YIG输出面时并不变化，再次通过极化分离器时合成后就从端口3输出。这种光学环形器结构尺寸为$26\times40\times15\ \mathrm{mm}^3$。在1.32 μm波长，插入损耗、隔离度分别为1.3 dB、16－19 dB。不用棱镜、极化光分离器而用光纤型极化器和光纤型极化分离器的环形器也早已提出。这里用了2个YIG小球，熊猫光纤极化器和极化分离器，插损和隔离度分别为2.5 dB和18－20 dB(1.3 μm时)。

本章要点

- 电磁波在传播过程中如碰到障碍物将发生散射。当障碍物可视为介质球且其直径比波长小得多时，介质球对电磁波的散射叫瑞利散射。瑞利散射的基本机理是，当均匀平面波投射到介质小球时，将在介质小球内感应出电偶极子，这个偶极子按入射平面波频率振荡，并相当于一个偶极子天线向空间各个方向辐射电磁场。散射功率与频率的4次方成比例。
- 随时间作简谐变化，但幅值与空间位置有关的非均匀电磁波可分解为频率相同但波数(或空间频率)不同的无数个均匀平面波的叠加。对于沿一个给定幅值分布的非均匀平面波将按这样一种方式沿空间传播，即传播一定距离后成为一个非均匀平面波，其幅值恰好是原先光波幅值的傅里叶变换。
- 高斯光束与平面波不同，波的幅值不均匀，按高斯分布，波阵面也不是平面。非均匀的高斯光束可以看成无限多个均匀平面波的组合。高斯光束沿z轴传播相当一段距离后，光束变得越来越宽，与z近似成线性关系，等相位面成为一个柱面。
- 当波源相对于观察者运动时，观察者检测到的频率与波源频率不一致，叫做多普勒频移。多普勒雷达正是利用这一频移测量目标运动速度，而在移动通信中却设法消除多普勒频移的影响。
- 在电各向异性介质中$\boldsymbol{D}$跟$\boldsymbol{E}$不再平行，而在磁各向异性介质中$\boldsymbol{B}$跟$\boldsymbol{H}$不再平行。$\boldsymbol{D}$跟$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$跟$\boldsymbol{H}$的线性关系用矩阵表示，如果引入并矢$\bar{\bar{\varepsilon}}$与并矢$\bar{\bar{\mu}}$，其关系为$\boldsymbol{D}=\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\bar{\bar{\mu}}\cdot\boldsymbol{H}$。

  在电各向异性介质中是$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{k}$三者相互垂直，而在磁各向异性介质中$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{k}$三者相互垂直。
- 平面波在电各向异性介质中传播有寻常波与非寻常波之分。寻常波与各向同性介质中的TEM平面波性质相同，非寻常波$\boldsymbol{D}$与$\boldsymbol{E}$不再保持平行，相速v_p与传播方向有关，寻常波和非寻常波都是线极化波，且正交。当一极化方向

任意的线极化波入射到单晶片上时，将分解为寻常波和非寻常波，由于两个波的速度不同，折射角不同，两个波的射线将分离，这就是双折射。

- 磁各向异性介质的特性与外加磁场 $\boldsymbol{H}_0$ 有关，可以用改变 $\boldsymbol{H}_0$ 方法改变磁导率张量 $\bar{\bar{\mu}}$。要记住 $\bar{\bar{\mu}}$ 只对高频磁场而言。铁氧体中传播的平面波分为纵向传播的波（$\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{H}_0$ 平行）与横向传播的波（$\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{H}_0$ 垂直）两类。利用铁氧体中波传播的非互易效应，可制成隔离器、移相器与环形器等非互易器件。

习题

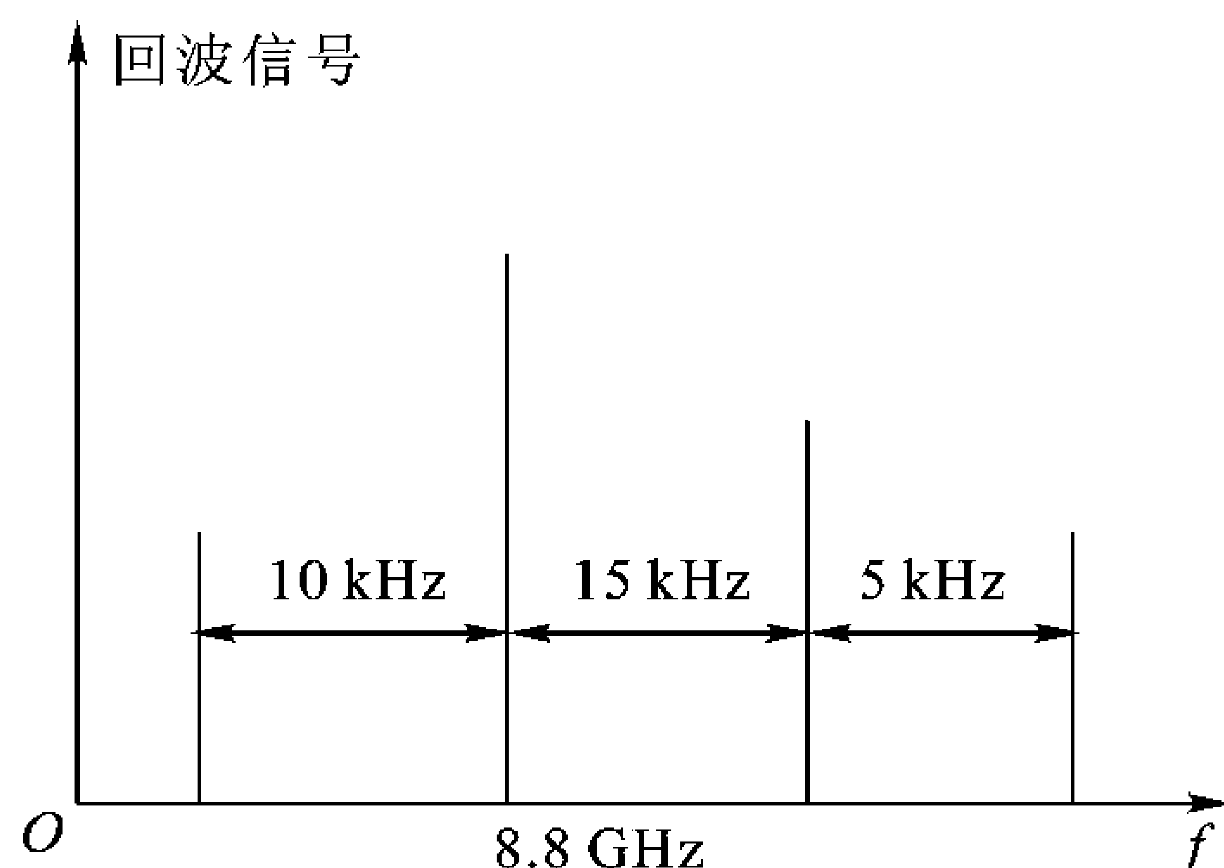
9.1　为什么东方升起的太阳看上去是红的？

9.2　从船上引擎发出的烟雾包含很细的颗粒，在黑暗的背景中看上去是蓝色的，在明亮的背景下看上去是黄色的，为什么？

9.3　10 GHz 的微波波束由 20 m 直径的抛物面天线对准月球辐射，估计该微波波束到月球时截面有多大？

9.4　某人乘火车离家，火车每天行走 200 英里，该人每天给家里寄一封信，信每天也走 200 英里，问他家人收到信的频率是多少？

9.5　多普勒雷达发射信号频率为 8.8 GHz，接收到的频谱如题图 9.5，目标速度多少？



题图 9.5

9.6　雾天司机驾车欲穿过铁路与公路交叉口。他从左耳听到火车汽笛声，几秒后听到回声，回声音调比汽笛声调还要高，假定回声是从前面小山反射过来的，如果你是司机，你是否穿过路口？也就是你能否判断火车是离开路口还是接近路口？

9.7　电各向异性介质中，$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{k}$ 6 个矢量，哪 4 个共平面？说明其理由。

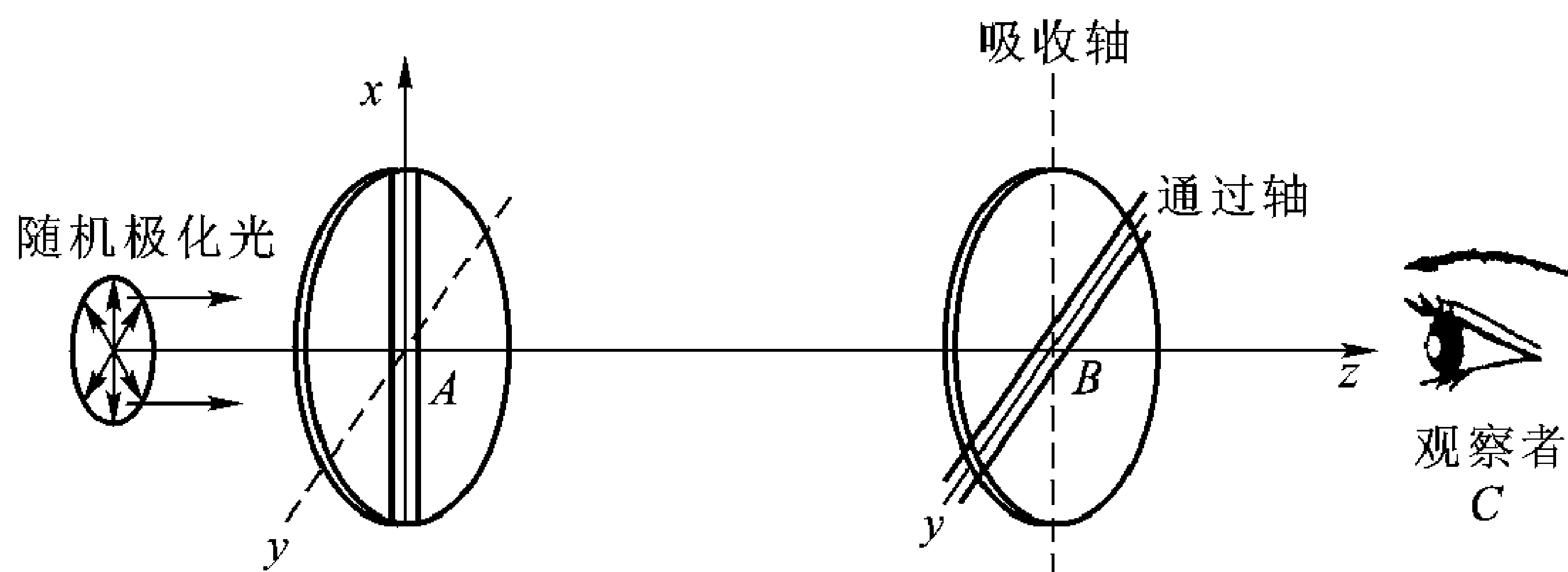
9.8　见图 9.18（a），如果 $d=\lambda_B/4$，而且假定在 $z=0$ 和 $z=d$ 界面反射可忽略，正如课文中讨论的从左面投射来的线极化波到右边将变成圆极化波。现在问，如果 $z=0$、$z=d$ 交界面反射不可忽略，透射到右边波的极化特性如何？

9.9　见图 9.18（a），如果 $d=\lambda_B/4$，左边入射波是圆极化波，问波透过薄板右边的极化特性。

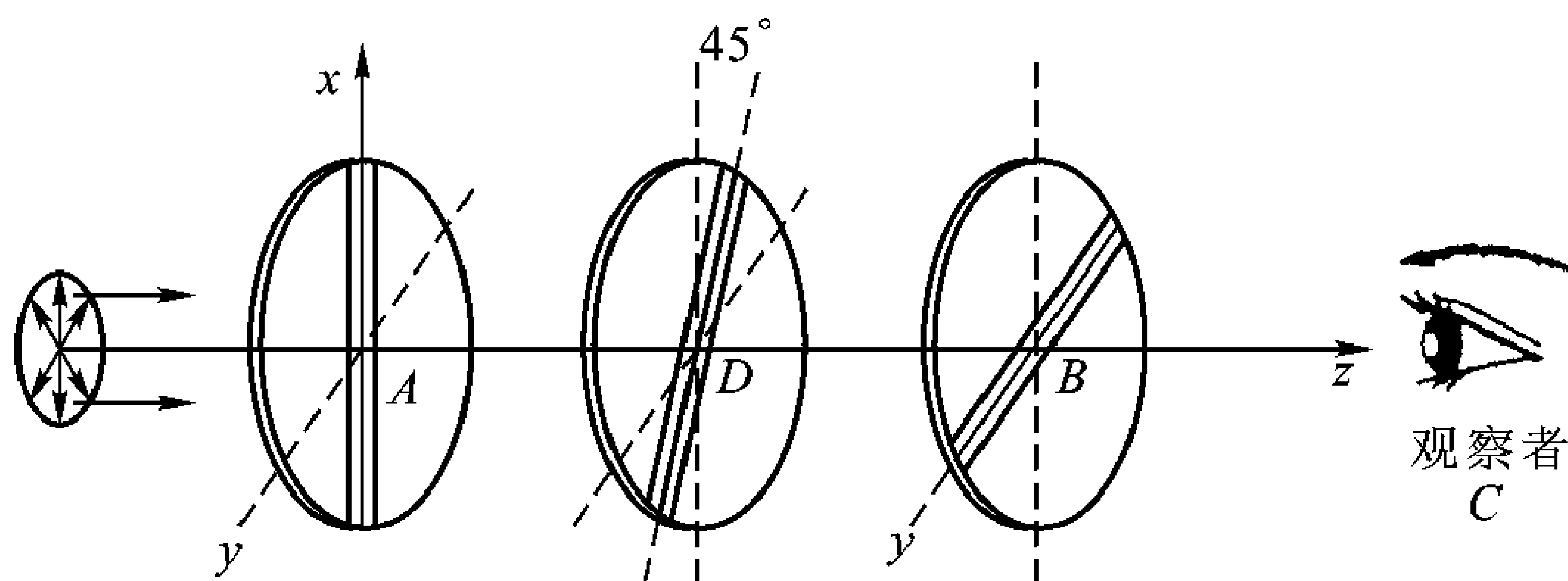
9.10　对于石英晶体，$\varepsilon_{/\!/}=2.41\varepsilon_0$，$\varepsilon_{\perp}=2.38\varepsilon_0$。光波长 $\lambda=0.65\mu$，计算四分之波板最小厚度。

9.11　如题图 9.11 所示系统，玻片 A 上极化薄膜可使 x 方向极化光通过，吸收 y 方向极化的光，玻片 B 上极化薄膜使 y 方向极化光通过，吸收 x 方向极化光，随机极化光从

左边射入，C 处观察者能看到此光吗？



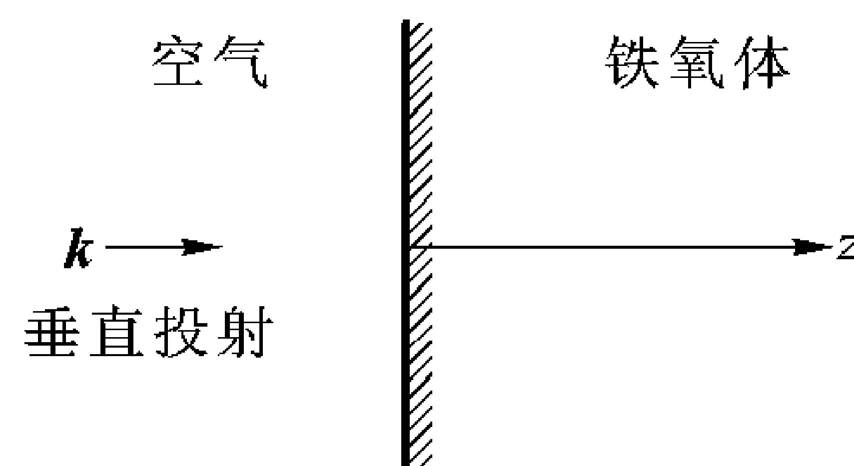
题图 9.11



题图 9.12

9.12 参看题图 9.12 装置，它与题图 9.11 不同之处仅仅是在 D 处多了一个极化薄膜，其吸收轴无论对于 x，还是对于 y 轴均转过 45°，问在 C 处观察者能见到左边透过来的光吗？

9.13 平面波从空气垂直入射至铁氧体，设入射电场 $E^{i}(z)=\boldsymbol{x}_0E_0e^{-jkz}$，并沿 z 轴在铁氧体上加一直流饱和磁场 $\boldsymbol{H}_0$，试求空气中的反射波和铁氧体中的透射波。



题图 9.13

第 10 章　静电场、电场力与能*

本章与下一章研究当 $\omega\to 0$ 时电磁场的特性及其应用。在 $\omega=0$ 的极限情况下，麦克斯韦方程中电场 $\boldsymbol{E}$ 和磁场 $\boldsymbol{H}$ 去耦，一组方程描述静电场的特性，其源是静电荷，另一组方程描述恒定磁场，其源是恒定电流。本章研究由静止电荷激发的静电场，第一部分侧重于源产生的场，第二部分侧重于场对物质（源）的作用。对于静电场，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 可表示为电位 Φ 的负梯度（$-\nabla\Phi$），所以由源产生场的问题可转变为由源求电位 Φ 的问题。本章 10.1 节给出静电场的支配方程；10.2 节讨论边界趋于无穷远时怎样由静电荷计算静电位或静电场；10.3 节则讨论在一给定边界条件下如何由静电荷计算静电场；10.4、10.5 节讨论静电场对荷电粒子或物质的作用；最后 10.6 节讨论静电场中的功和能及电容。

10.1　静电场基本方程

第 8 章讨论了振荡的电流或电荷产生交变电磁场。当 $\omega=0$ 时，所有的场量对时间 t 都是常数，也就是说$\dfrac{\partial}{\partial t}$的运算都为零，麦克斯韦方程就成为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0 \tag{10.1.1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_v \tag{10.1.2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J} \tag{10.1.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{10.1.4}$$

而电流与电荷的连续方程成为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0 \tag{10.1.5}$$

注意，式(10.1.1)～(10.1.4)4 个方程中前面两个方程不包含磁场，而后面两个方程不包括电场。所以当电磁场不随时间变化时，电场和磁场相互独立。式(10.1.1)与式(10.1.2)就是研究静电场的基本方程。

在简单媒质中，电通量密度 $\boldsymbol{D}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系由本构关系

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{10.1.6}$$

描述，ε 是实数。

因为梯度的旋度等于零，所以式(10.1.1)意味着电场 $\boldsymbol{E}$ 必定是某个标量

---

* 本章主要参考 Liang Chi Shen，Jin Au Kong“Applied Electromagnetism”。

的梯度，我们可把 $\boldsymbol{E}$ 写成

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \Phi \tag{10.1.7}$$

当 $\omega = 0$ 时，式(10.1.7)也就是式(8.2.5)的特例。将式(10.1.7)、(10.1.6)代入式(10.1.2)得到

$$\nabla^2 \Phi = -\rho_v / \varepsilon \tag{10.1.8}$$

此式就是 $\omega = 0$ (或 $k = 0$)时式(8.2.8)的特例，叫做泊松方程。

当所研究空间没有电荷，即 $\rho_v = 0$ 时，泊松方程就成为

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{10.1.9}$$

式(10.1.9)叫拉普拉斯方程。

所以引入电位 $\Phi(\boldsymbol{r})$以后，由电荷求电场 $\boldsymbol{E}$ 转变为由电荷求电位 Φ，电位 Φ 是标量，$\boldsymbol{E}$ 是矢量。由标量泊松方程求 $\Phi(\boldsymbol{r})$再求电场 $\boldsymbol{E}$ 一般要比直接由麦克斯韦方程求 $\boldsymbol{E}$ 容易一些。

这样，静电场问题的计算有两个途径：一是利用泊松方程(10.1.8)先求出电位 Φ，再根据式(10.1.7)得出 $\boldsymbol{E}$；二是在某些情况下，如利用结构对称性，$\boldsymbol{E}$ 的解容易得到，通过 $\boldsymbol{E}$ 再求电位 Φ。从 Φ 得出 $\boldsymbol{E}$ 是微分问题，而从 $\boldsymbol{E}$ 得出电位 Φ 是积分问题。对于静电场，一般情况下，求电位 Φ 比直接求电场 $\boldsymbol{E}$ 容易一些。

由电荷求电场要用到电场的叠加原理。如果产生静电场的源(即电荷)分布于体积 V 内，将 V 分成无限多个小体积 ΔV，那么根据电场叠加原理，体积 V 内电荷在所研究点 P 产生的场等于无限多小体积 ΔV 内电荷在 P 点产生的场叠加。根据叠加原理，如果知道点电荷产生的电位或电场，那么任意源产生的电位或电场就是无限多点电荷产生的电位或电场的叠加。因为任何电荷分布都可看成无限多点电荷的集合。

10.2　静电位与静电场

本节讨论当边界趋于无穷远时，怎样由电荷分布求电位或电场。

10.2.1　静电位

由电荷密度 $\rho_v(\boldsymbol{r})$求电位 $\Phi(\boldsymbol{r})$，归结为求解泊松方程。第 8 章中研究天线问题时，在边界趋于无穷远的情况下，我们已得到式(8.2.8)的解式(8.2.11)。泊松方程是式(8.2.8) $\omega = 0$ 时的特例，所以泊松方程的解就是式(8.2.11) $\omega = 0$ 时的特例，即

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'} \frac{\rho_v(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{10.2.1}$$

式中 $\boldsymbol{r}'$ 为源所在坐标，$\boldsymbol{r}$ 为所研究场点坐标，V' 为源所在区域。式(10.2.1)正体现了叠加原理。此积分也叫做泊松积分。对于点电荷 q，$\rho_v(\boldsymbol{r}') = q\delta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$，将此 $\rho_v(\boldsymbol{r}')$ 代入式(10.2.1)，利用 $\delta(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ 的性质，得到

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{10.2.2a}$$

如果点电荷放在坐标原点，式(10.2.2a)成为

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} \tag{10.2.2b}$$

点电荷是一理想的带电质点，电子、质子、原子核可看成是点电荷的例子，由式(10.2.2)可见，电位只与坐标 r 有关，这是由点电荷分布的对称性决定的，所以，以点电荷所在点为坐标原点的球面上，电位到处相等，这样的面叫等位面。

例 10－1　根据玻尔模型，氢原子由一个环绕核旋转的电子构成，核所带的电荷量 $q = 1.6\times10^{-19}$ C，电子的量子轨道分别为 0.52 Å，2.08 Å，4.68 Å 等等。在这 3 个半径的等位球面上，电子的电位根据式(10.2.2b)为

$$\Phi(r) = \frac{1.6\times10^{-19}}{4\pi\varepsilon r}$$

分别是 $\Phi(0.52\text{ Å}) = 27.6$ V，$\Phi(2.08\text{ Å}) = 6.92$ V，$\Phi(4.68\text{ Å}) = 3.07$ V。

图 10－1 示出了这些等位面。

电位差

静电场中点 A 与点 B 之间的电位差 V_{AB}定义为 A、B 两点电位的差值

$$V_{AB} = \Phi(A) - \Phi(B) \tag{10.2.3}$$

所以在氢原子场中(见图 10－1) $V_{AB} = 20.68$ V，$V_{AC} = 24.53$ V，$V_{BB'} = 0$，$V_{BA} = -V_{AB} = -20.68$ V，$V_{AB'} = 20.68$ V。

注意，如果在式(10.2.1)、(10.2.2)表示的电位上加一常数，式(10.1.7)、(10.1.8)并不变化，因为对常数的导数总是零。常数只影响参考点电位，但不影响电位差。

通常将地电位选作零。所以在电路中，电位为零的点就叫做接地点。

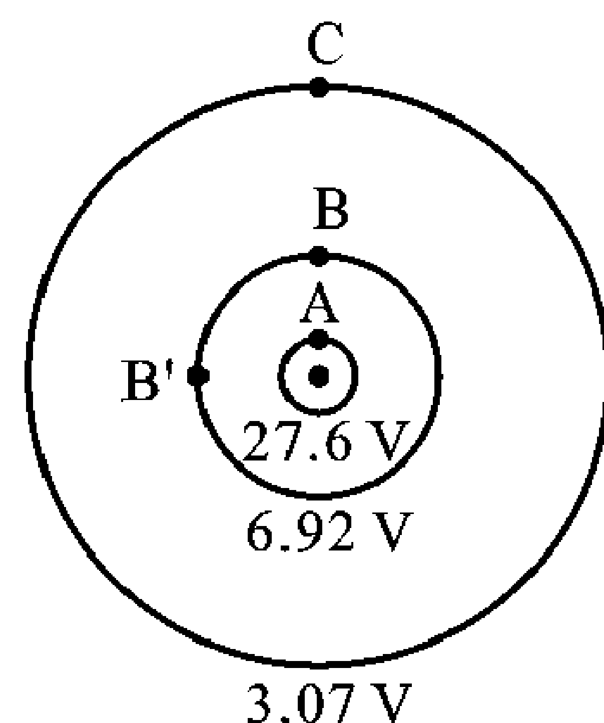


图 10－1　氢原子的等位面(玻尔模型)

N 个点电荷的电位

电位是标量，从泊松方程(10.1.8)及泊松积分(10.2.1)可以看出，电位是电荷密度的线性函数，所以 N 个点电荷产生的电

位就是 N 个点电荷产生的电位叠加。

$$\Phi = \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{4\pi\varepsilon r_n} \tag{10.2.4}$$

式中 r_n 是第 n 个点电荷离开观察点的距离。

静电偶极子电位

两个电量相等、符号相反、间距无限小的静电荷组成的系统叫做静电偶极子。如图 10－2 所示的沿 z 轴放置的两点电荷（q，$-q$），当间距 $d \to 0$ 时就构成静电偶极子。静电偶极子产生的电位为两点电荷产生的电位之和，即

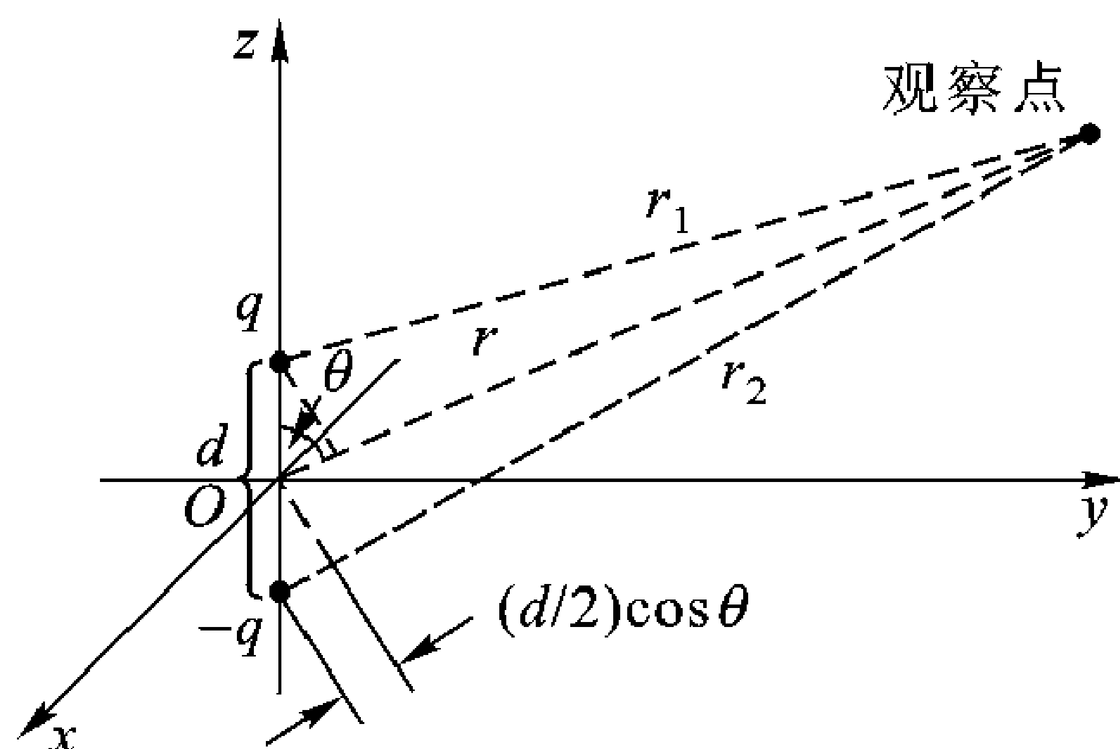


图 10－2　当 $d \to 0$ 时静电偶极子电位

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{10.2.5}$$

根据静电偶极子模型，$d \ll r_1$，$d \ll r_2$，故在球坐标系统中，r_1、r_2 可近似为

$$r_1 = \left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{d}{2}\right)^2\right]^{1/2} = \left(r^2 - dz + \frac{d^2}{4}\right)^{1/2}$$

$$\approx r\left(1 - \frac{d}{r}\frac{z}{r}\right)^{1/2} \approx r\left(1 - \frac{1}{2}\frac{d}{r}\cos\theta\right) = r - \frac{1}{2}d\cos\theta \tag{10.2.6a}$$

同样

$$r_2 \approx r + \frac{1}{2}d\cos\theta \tag{10.2.6b}$$

所以

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r - \frac{d\cos\theta}{2}} - \frac{1}{r + \frac{d}{2}\cos\theta}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{d\cos\theta}{r^2 - \frac{d^2\cos^2\theta}{4}}$$

忽略高阶小项 d^2，就得到

$$\Phi(\boldsymbol{r}, \theta) = \frac{P\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{10.2.7a}$$

因为 $p\cos = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_0$，故上式又可写为

$$\Phi(r, \theta) = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_0}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{10.2.7b}$$

式中 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{d}$ 通常叫做偶极矩，$\boldsymbol{r}_0$ 为 r 方向单位矢量。式(10.2.7)与式(10.2.2b)相比，静电偶极子产生的电位随离开偶极子的距离 r 按 $1/r^2$ 减小而不是点电荷时按 $1/r$ 减小。

例 10－2　假定静电偶极子电荷量 $q=10^6|q_e|$，间距 $d=10^{-6}$ m，q_e 为电子电荷量，画出电位为 V 的等位面。

解：将 q 及 d 代入式(10.2.7)得到

$$r=10^{-5}\left(\frac{14.4\cos\theta}{V}\right)^{1/2}\quad \text{m}$$

其等位面示于图 10－3。

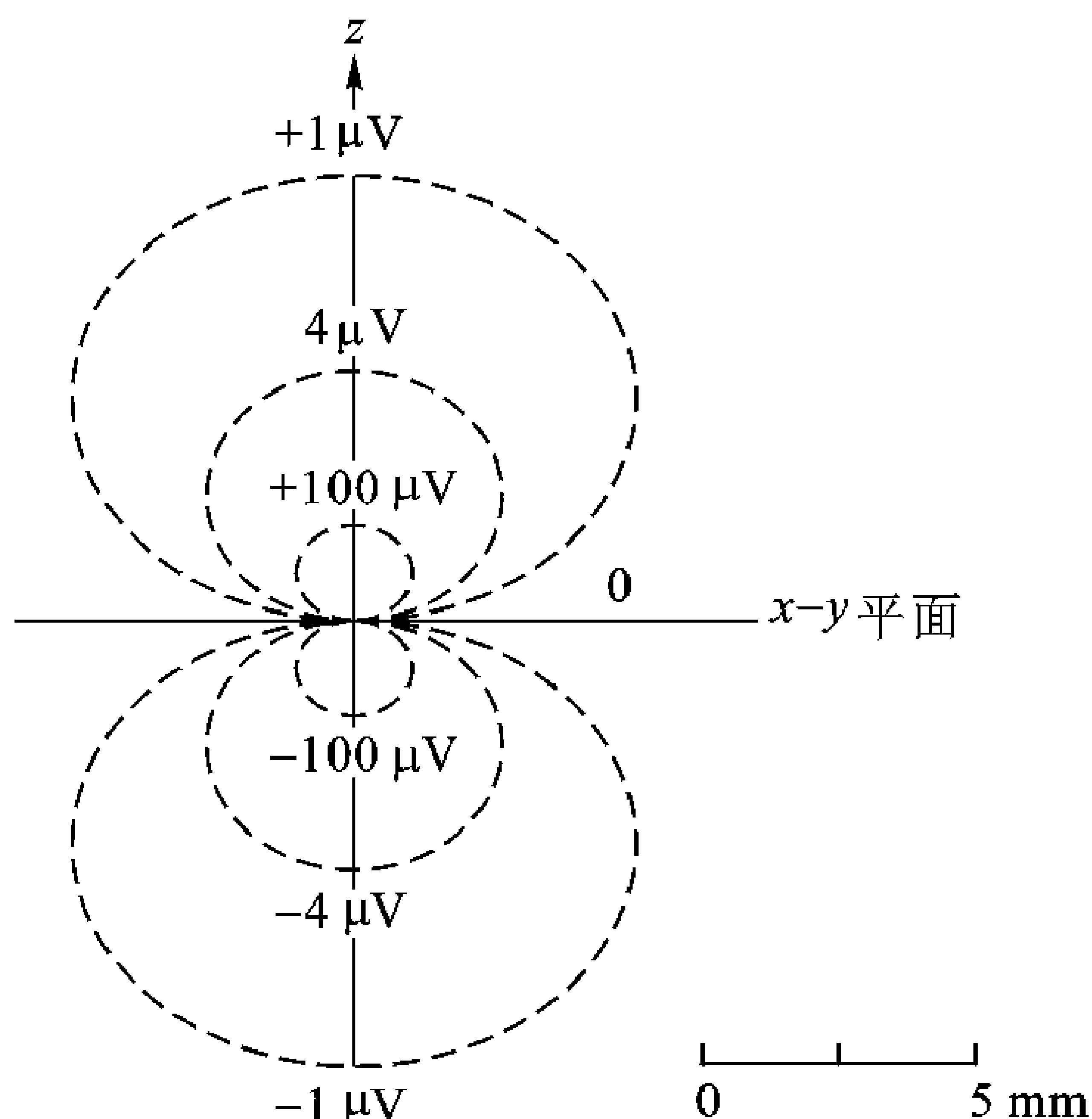


图 10－3　静电偶极子等位面，$P=1.6\times10^{-19}$ C•m

10.2.2　静电场

将式(10.2.2b)代入式(10.1.7)可求得点电荷的静电场

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi=-\nabla\frac{q}{4\pi\varepsilon r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{r}_0 \tag{10.2.8}$$

式中 $\boldsymbol{r}_0$ 为 r 方向单位矢量。式(10.2.8)与我们以前从库仑定理得出的点电荷产生的电场 $\boldsymbol{E}$ 的表达式是一致的。

例 10－3　求空气中由 $10^6|q_e|$库仑电量的点电荷产生的静电场 $\boldsymbol{E}$。

解：将 q_e、ε 代入式(10.2.8)得到

$$\boldsymbol{E}=\frac{1.44\times10^{-3}}{r^2}\boldsymbol{r}_0$$

所以电力线可用离开点电荷所处原点的箭头表示。注意箭头方向总是由高电位指向低电位。下面用叠加原理求电荷产生的场。

有两种方法可以求出 N 个点电荷产生的场，一是将 N 个点电荷产生的电位式(10.2.4)代入式(10.1.7)求电场 $\boldsymbol{E}$，即由

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{4\pi\varepsilon r_n} \tag{10.2.9a}$$

得

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=-\nabla\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{4\pi\varepsilon r_n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{q_n}{4\pi\varepsilon r_n^2}\boldsymbol{r}_{n0} \tag{10.2.9b}$$

二是直接将叠加原理应用于式(10.2.8)

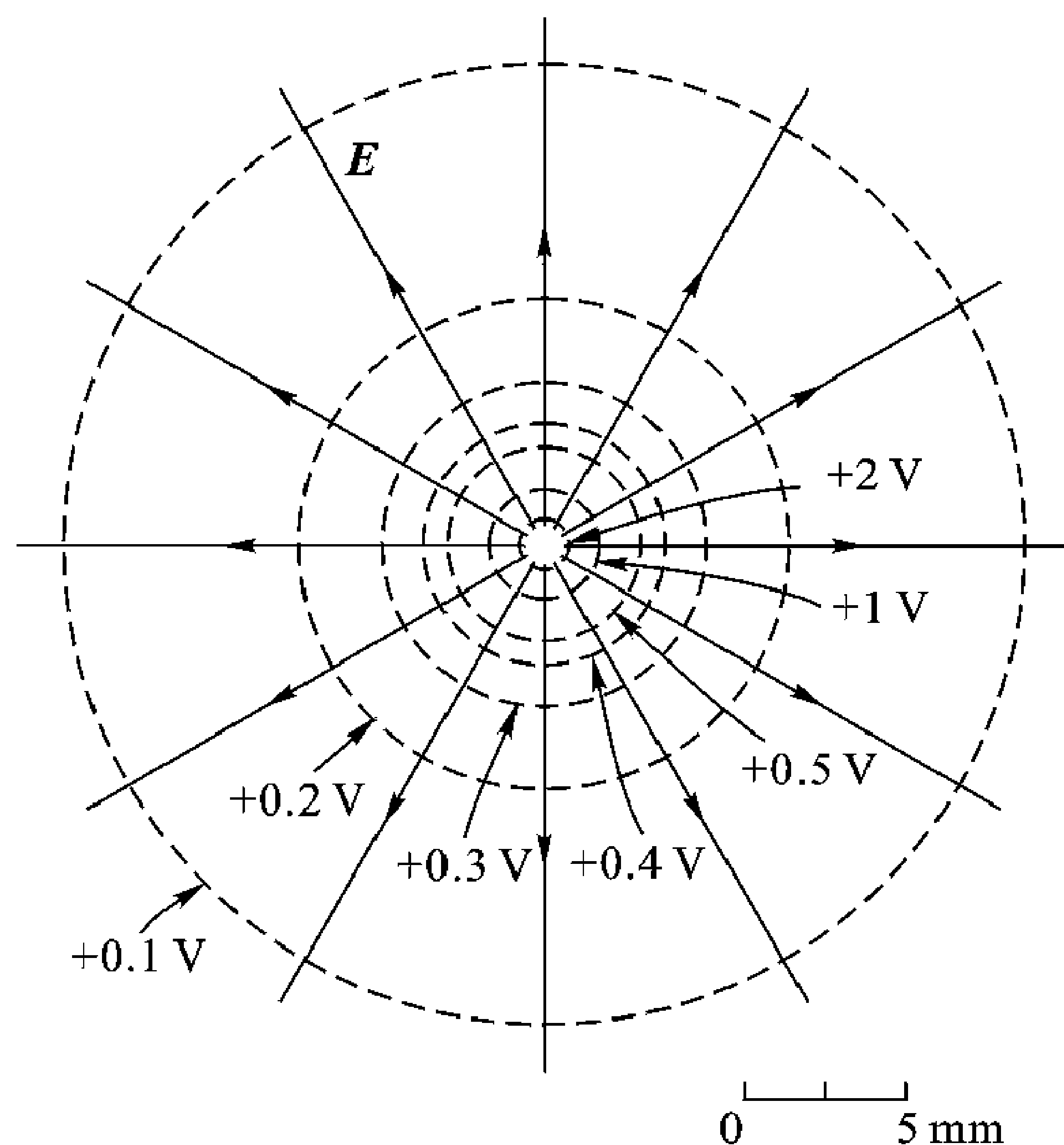


图 10-4　点电荷 $10^6|q_e|$库仑产生的等位面与电力线

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{q_n}{4\pi\varepsilon r_n^2}\boldsymbol{r}_{n0} \tag{10.2.9c}$$

式中 r_n 是观察点与第 n 个点电荷之间的距离，而 $\boldsymbol{r}_{n0}$是由第 n 个点电荷指向观察点的单位矢量。

例 10-4　求图 10-2 所示静电偶极子产生的电场并作出电力线图。

解： $\Phi(r,\theta)$已由式(10.2.7)给出，利用球坐标，得到

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi(r,\theta) = -\boldsymbol{r}_0\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r,\theta) - \boldsymbol{\theta}_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(r,\theta)$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon r^3}(\boldsymbol{r}_0 2\cos\theta + \boldsymbol{\theta}_0\sin\theta) \tag{10.2.10}$$

注意，由式(8.3.7)表示的电偶极子天线辐射的电场 $\boldsymbol{E}$，当 $\omega=0$ 或 $k=0$ 时就简化到式(10.2.10)，所以静电偶极子产生的电场是电偶极子天线辐射的电场在 $\omega=0$ 或 $k=0$ 时的特例。电场 $\boldsymbol{E}$ 矢量在 Φ 降低方向并与等位面垂直，见图 10-5。

由图 10-5 可见，电力线由正电荷指向负电荷。

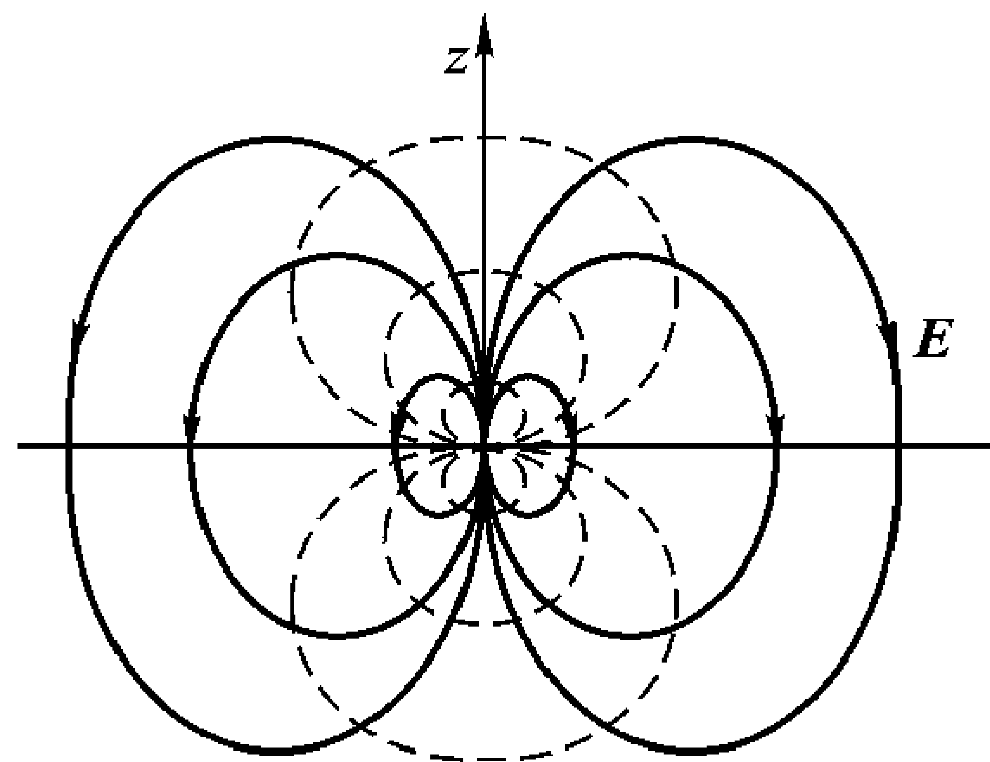


图 10-5　静电偶极子的电力线（实线）与等位面（虚线）

线电荷产生的电场

考虑一段从 $z=-h$ 到 $z=h$、电荷密度

为 ρ_l(C/m)的线电荷，见图 10－6 (a)，下面我们求出其在 $x-y$ 平面的电场。因为在圆柱坐标系中，角向是对称的，只要求半径 ρ 方向的电场就够了。

首先将电荷分成无限多长度为 Δz 的无限小线电荷段，每一个无限小段 Δz 内包含的电荷量为 $\rho_l\Delta z$（库仑），并可视为点电荷，其产生的电场可用式(10.2.8)计算

$$\Delta \boldsymbol{E}=\frac{\rho_l\Delta z}{4\pi\varepsilon\ (\rho^2+z^2)}(\boldsymbol{\rho}_0\cos\alpha-\boldsymbol{z}_0\sin\alpha)$$

根据图 10－6 (a)有

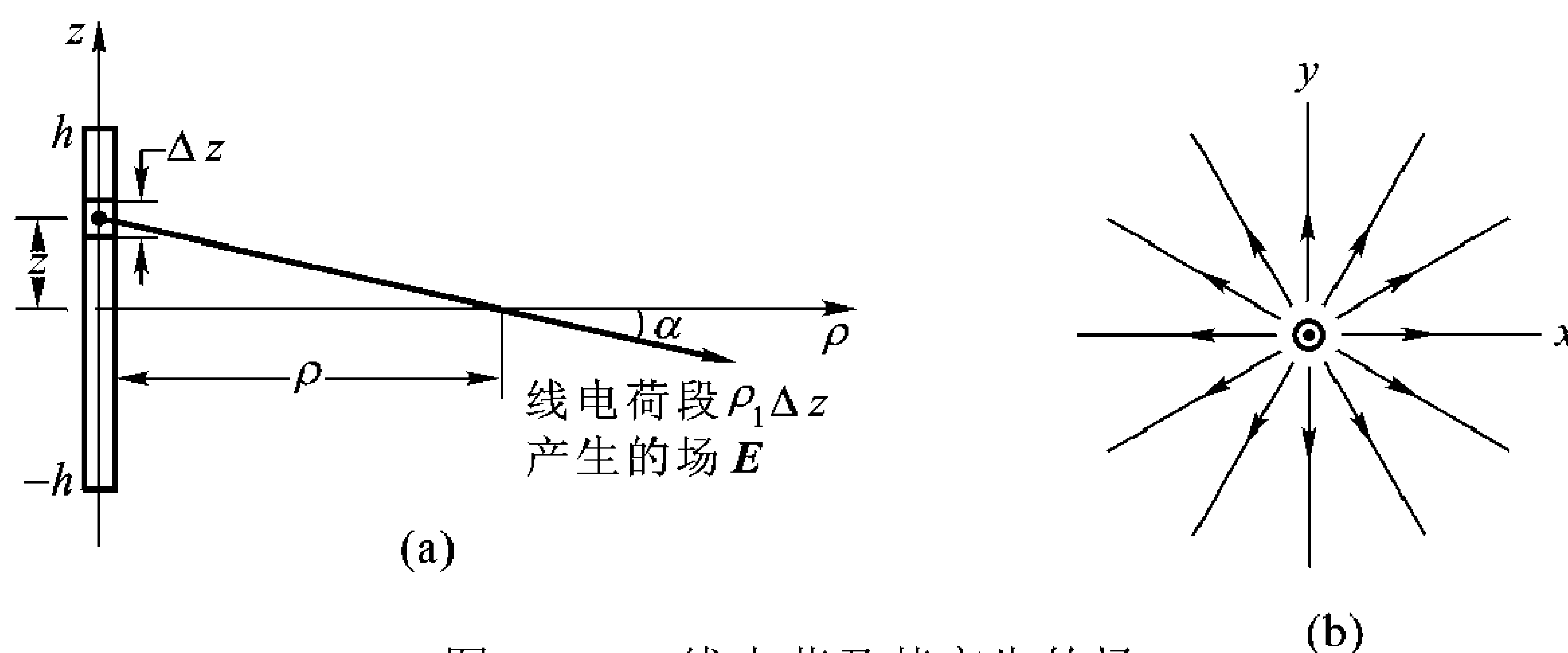


图 10－6 线电荷及其产生的场

(a) 线电荷在半径 ρ 方向产生的场 (b) 线电荷的电力线

$$\cos\alpha=\frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\sin\alpha=\frac{z}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}$$

所以

$$\Delta\boldsymbol{E}=\frac{\rho_l\Delta z\ (\boldsymbol{\rho}_0\rho-\boldsymbol{z}_0 z)}{4\pi\varepsilon\ (\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

注意 $\Delta\boldsymbol{E}$ 不是 φ 的函数，总电场 $\boldsymbol{E}$ 就是无数无限小电荷源($\rho_l\Delta z$)产生的 $\Delta\boldsymbol{E}$ 的叠加，

$$\boldsymbol{E}=\int_{-h}^{h}\frac{\rho_l\mathrm{d}z\ (\boldsymbol{\rho}_0\rho-\boldsymbol{z}_0 z)}{4\pi\varepsilon\ (\rho^2+z^2)^{3/2}}$$

当 z 变化时，单位矢量 $\boldsymbol{\rho}_0$、$\boldsymbol{z}_0$ 是不变的，可以拿到积分号外，所以上式积分简化为标量积分

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon}\left[\boldsymbol{\rho}_0\rho\int_{-h}^{h}\frac{\mathrm{d}z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}-\boldsymbol{z}_0\int_{-h}^{h}\frac{z\mathrm{d}z}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

利用 $z=\rho\tan\alpha$，$\mathrm{d}z=\rho\sec^2\alpha\mathrm{d}\alpha$，可得

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{\rho}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\cos\alpha\mathrm{d}\alpha-\frac{\boldsymbol{z}_0}{\rho}\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}\sin\alpha\mathrm{d}\alpha\right)=\boldsymbol{\rho}_0\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\rho}\sin\alpha_0 \tag{10.2.11}$$

式中　$\alpha_0 = \arctan h/\rho$。

由此可见，当 $h/\rho << 1$，$\sin\alpha_0 \approx h/\rho$，有

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\rho}_0 \frac{\rho_l (2h)}{4\pi\varepsilon\rho^2}$$

这就是电荷量为 $\rho_l(2h)$的点电荷产生的场。所以对于一个短的线电荷，当观察点离开线电荷很远时，可视作点电荷。

当 $h/\rho >> 1$，即线电荷很长很长，此时 $\alpha_0 = \arctan(h/\rho) \approx \pi/2$，由式(10.2.11)可得

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\rho}_0 \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0\rho} \tag{10.2.12}$$

注意当 $h/\rho >> 1$ 时，无限长线电荷产生的场与 $1/\rho$ 成正比，而不像点电荷那样与 $1/\rho^2$ 成正比。图 10－6 (b)给出 $x-y$ 平面线电荷的电力线分布。

面电荷产生的场

设有一个无限大的平面，具有均匀的面电荷密度 ρ_s（单位为 C/m^2），见图 10－7 (a)，我们希望求出沿 x 轴上的电场 $\boldsymbol{E}$。

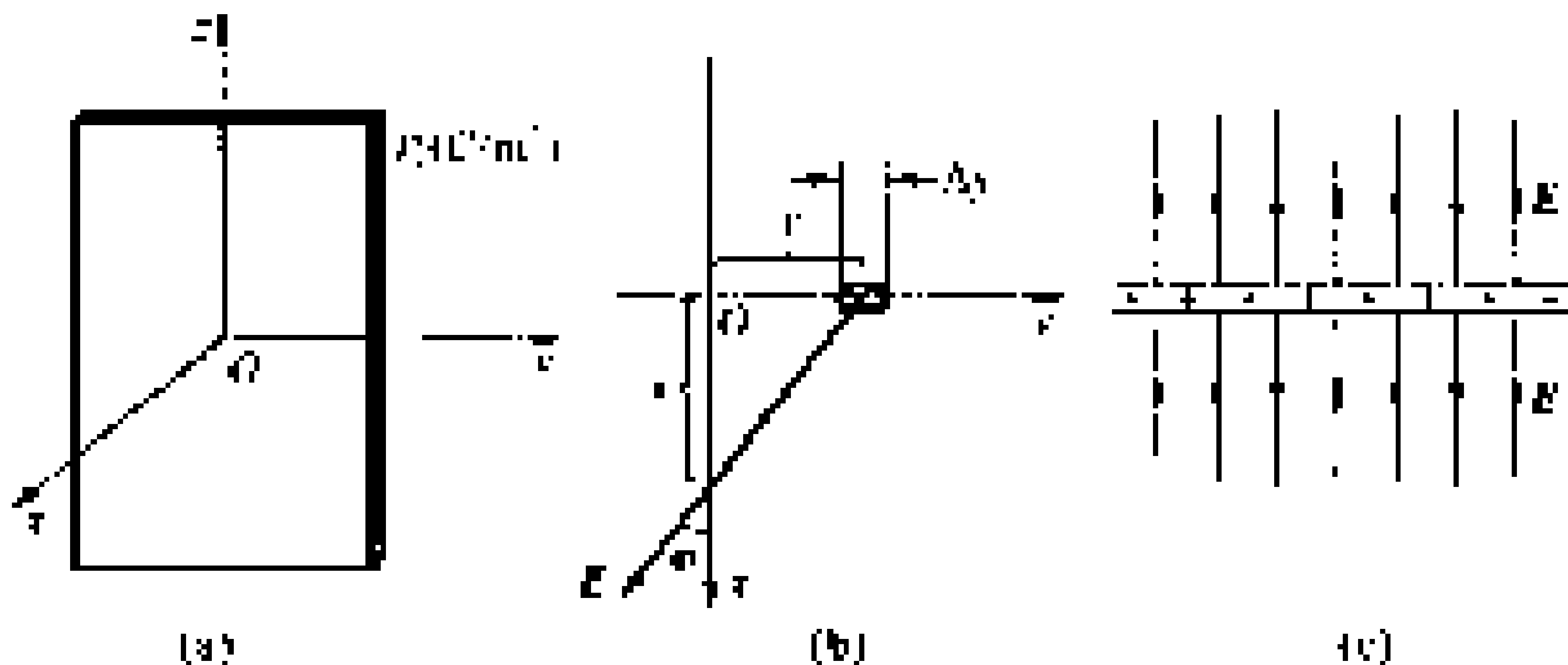


图 10－7　面电荷及其产生的场

(a) 面电荷　(b) 线电荷产生的电场　(c) 电力线

因为我们已知线电荷的解，我们将所研究面电荷分为无限多个线电荷，其宽度为 Δy，在 $\pm z$ 方向趋于无穷，图 10－7 (b)是一个典型的无限细的线电荷单元。此无限细线电荷单元在 x 轴上$(x,0,0)$产生的电场按式(10.2.12)为

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{\rho_s \Delta y}{2\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\boldsymbol{x}_0 x - \boldsymbol{y}_0 y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

所有这些无限细线电荷产生的场为

$$\boldsymbol{E}(x) = \frac{\rho_s}{2\pi\varepsilon}\left(\boldsymbol{x}_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{x}{x^2+y^2} - \boldsymbol{y}_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\,\frac{y}{x^2+y^2}\right) \tag{10.2.13}$$

第二个积分是零，因为被积函数是奇对称的，为计算第一个积分，设

$$y = x \tan \varphi$$

则

$$\mathrm{d}y = x\sec^2\varphi \mathrm{d}\varphi \tag{10.2.14}$$

由此得到

$$\boldsymbol{E}(x) = \frac{\boldsymbol{x}_0\rho_s}{2\pi\varepsilon}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{x^2\sec^2\varphi\mathrm{d}\varphi}{x^2(1+\tan^2\varphi)} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon}\boldsymbol{x}_0 \qquad (x>0) \tag{10.2.15a}$$

所以 $\boldsymbol{E}$ 是一个常数矢量，与观察点坐标位置无关。当 $x<0$ 时，有

$$\boldsymbol{E}(x) = \frac{\rho_s}{2\varepsilon}(-\boldsymbol{x}_0) \qquad (x<0) \tag{10.2.15b}$$

所以电场 $\boldsymbol{E}$ 与 z 无关，面电荷密度为 ρ_s 的无限大平面产生的电力线如图 10－7(c)。如果电荷密度 ρ_s 为正，其电力线与平面垂直，指向离开平面。

10.2.3　高斯定律及其应用

如果电荷分布产生的场具有对称性，利用高斯定理则可很容易计算电荷产生的电场。

积分形式的高斯定理为

$$\oint_S \mathrm{d}S\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{D} = \int_V \rho_v \mathrm{d}V \tag{10.2.16}$$

式(10.2.16)的右边表示体积 V 内包含的电荷 $q = \int_V \rho_v \mathrm{d}V$，左边表示穿过包围该体积闭曲面 S 的电通量。

图 10－8 给出高斯定理的图解。假定由 4 个点电荷产生的场总和为 $\boldsymbol{E}_t$，应用高斯定理，不用精确计算 $\boldsymbol{E}_t$，根据式(10.2.16)即可得出

$$\oint_{S_1} \mathrm{d}S\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{E}_t = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$\oint_{S_2} \mathrm{d}S\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{E}_t = 0$$

$$\oint_{S_3} \mathrm{d}S\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{E}_t = \frac{Q}{\varepsilon}$$

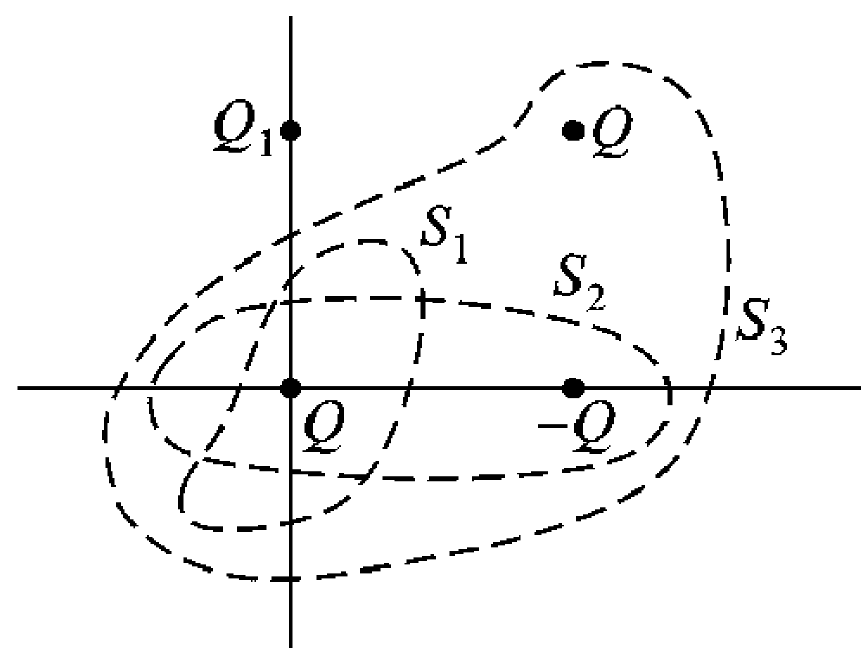


图 10－8　高斯定理应用于不同的闭曲面

注意，$\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{E}_t$ 沿闭曲面 S_1、S_2、S_3 的积分不受 Q_1 的影响，因为 Q_1 虽然对 $\boldsymbol{E}_t$ 有影响，但是只要这些闭曲面不包含 Q_1 就不影响 $\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{E}_t$ 沿闭曲面的积分。高斯定理的积分形式式(10.2.16)在求解电荷对称分布系统中的场问题特别有用。包围电荷分布的闭曲面叫做高斯面。在下面的例题中我们将看到，正确利用电荷分布的对称性并巧妙选择高斯面，根据式(10.2.16)就会很容易求

出电场 $\boldsymbol{E}$。

例 10-5　求点电荷 q 产生的电场。

解：设待研究的点电荷放在球心，包围点电荷的闭曲面——高斯面为球面，距球心为 r，应用式(10.2.16)有

$$\oint_S \boldsymbol{r}_0 \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho_v \mathrm{d}V = \frac{q}{\varepsilon}$$

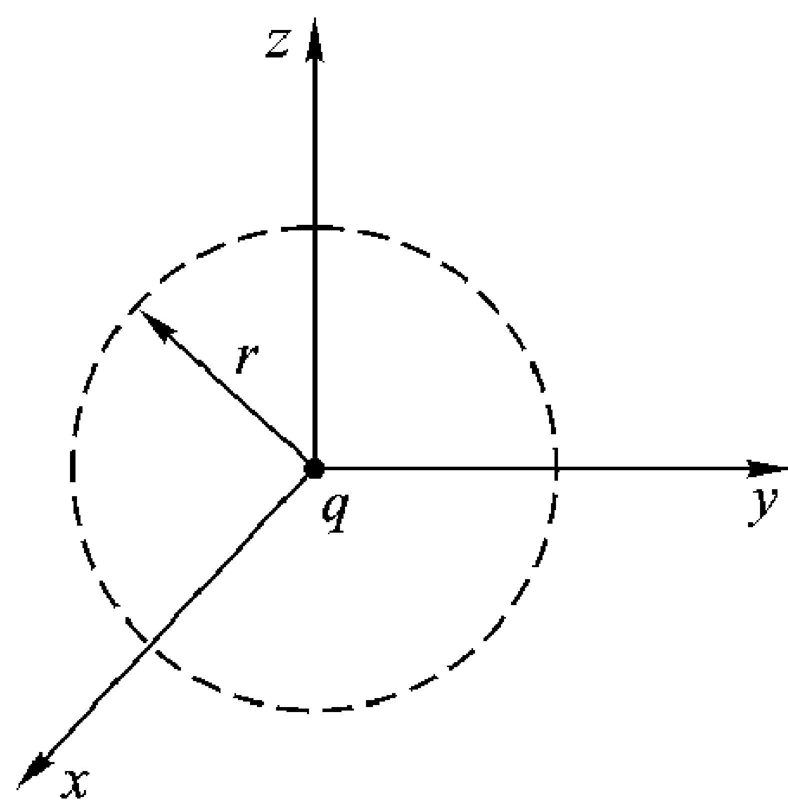


图 10-9　包围点电荷 q 的球面

或

$$\oint_S E_r \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon}$$

式中 E_r 是电场的 r 分量。

利用对称性，E_r 在高斯面上为常数。所以 E_r 可拿到积分号外，即

$$E_r \oint_S \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon}$$

左边积分为 $4\pi r^2$，所以

$$E_r 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon}$$

或

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

从对称性还可知，电场只有 r 分量，所以

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{r}_0$$

此式与式(10.2.8)一致。

例 10-6　求线电荷密度 ρ_l 的线电荷产生的电场 $\boldsymbol{E}$。

解：选择圆柱坐标系，线电荷置于 z 轴，高斯面为圆柱面，半径为 ρ（见图 10-10），当线电荷长度 $2h \to \infty$，应用高斯定理式(10.2.16)可得

$$\oint_S \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}S = \frac{\rho_l (2h)}{\varepsilon}$$

利用对称性，$\boldsymbol{E} = \rho_0 E_\rho$，所以

$$E_\rho (2\pi\rho)(2h) = \frac{\rho_l (2h)}{\varepsilon}$$

所以

$$E_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\rho}$$

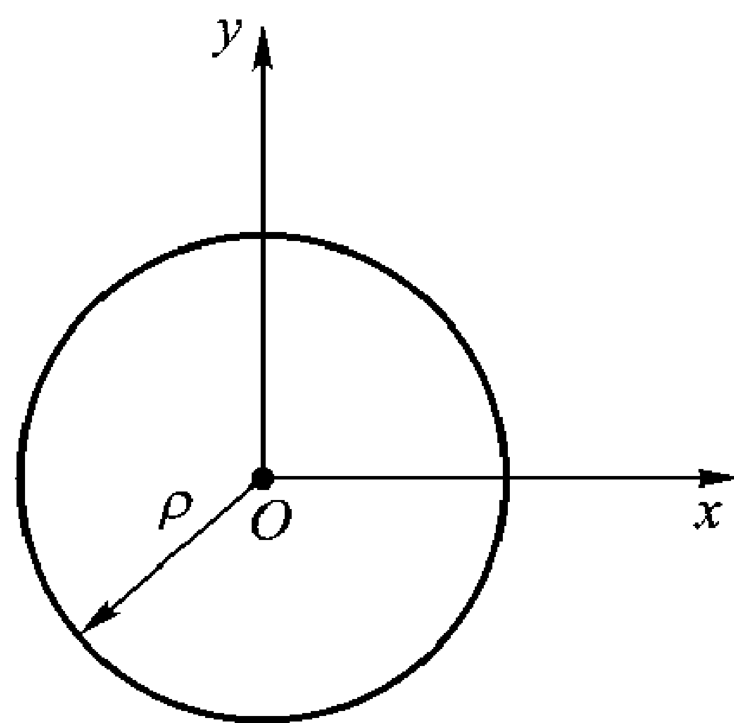


图 10-10　包围线电荷的圆柱闭曲面

此式与式(10.2.12)一致。

例 10-7　求置于 $y-z$ 平面的面电荷 ρ_s 产生的电场 $\boldsymbol{E}$（见图 10-11）。

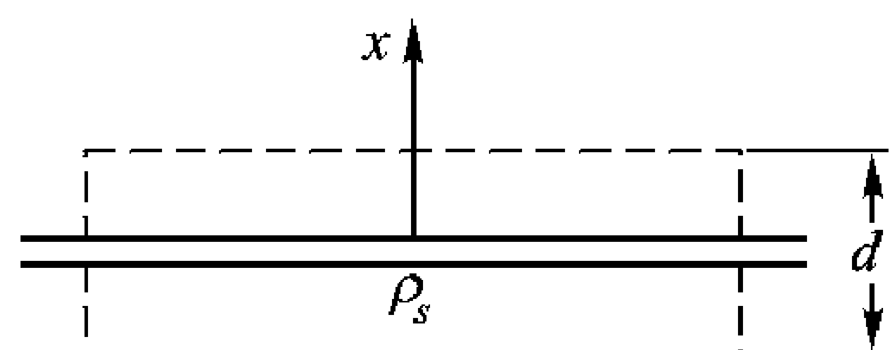


图 10-11　包围面电荷的矩形闭曲面

解：将包围电荷的闭曲面——高斯面取为矩形，其厚度为 d 而面积 $A\to\infty$。利用对称性，$\boldsymbol{E}$ 只有 $+x$ 分量(当 $x>0$)或只有 $-x$ 分量(当 $x<0$)。应用高斯定理式(10.2.16)可得

$$\boldsymbol{x}_0\cdot(\boldsymbol{x}_0E_x)A+(-\boldsymbol{x}_0)\cdot(-\boldsymbol{x}_0E_x)A=\frac{\rho_sA}{\varepsilon}$$

注意，厚度 d 不在上式中出现，因为电场没有平行于 $y-z$ 平面(即穿过侧面)的分量。所以

$$E_x=\frac{\rho_s}{2\varepsilon}$$

此式也与式(10.2.15)一致。

例 10-8　证明在完纯导体内部没有电荷。


图 10-12　完纯导体内不可能有电荷

解：假定在完纯导体内某处有电荷 q，那么根据高斯定理(10.2.16)得到

$$\oint_S \boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{E}=\frac{q}{\varepsilon}$$

但是完纯导体内不可能有电场，因此上式积分为零，这就要求 $q=0$。所以完纯导体内不可能有电荷存在。

例 10-9　半径为 a 的导电球表面带 $+q$ 电量(见图 10-13)，求 $r>a$ 处电场 $\boldsymbol{E}$。

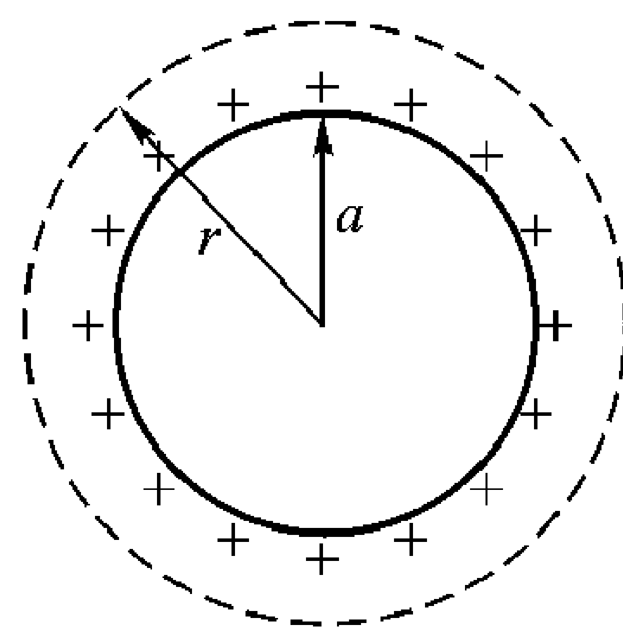


图 10-13　带电量为 q 的导电球

解：因为导电球由完纯导体构成，球体内电场 $\boldsymbol{E}=0$，电荷只能存在于导电球表面。

取半径为 r $(r>a)$ 的球面作为高斯面，应用高斯定理式(10.2.16)可得

$$\oint_S \boldsymbol{r}_0\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}S=\frac{q}{\varepsilon}$$

或

$$\oint_S E_r\mathrm{d}S=\frac{q}{\varepsilon}$$

利用对称性，在高斯面，E_r 是常数，可拿到积分号外，于是

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{r}_0\qquad(r>a)$$

所以在 $r > a$ 处，带电量为 q 的导电球产生的场与在球心点电荷 q 产生的场相同。

例 10－10　图 10－14 所示同轴线，内导体半径为 a，外导体半径为 b，内外导体单位长度携带的电荷密度分别为 ρ_l（单位为 C/m）和 $-\rho_l$，求同轴线内外导体间电场 $\boldsymbol{E}$。

解：选高斯面为半径 ρ 的柱面，$a < \rho < b$，应用高斯定律可得

$$\oint_S \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho_v \mathrm{d}V = \rho_l \frac{h}{\varepsilon}$$

式中 h 为同轴线长度，左边的积分可分解为柱面与两个端面积分之和，即

$$\int_{\text{柱面}} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}S + \int_{\text{端面}z=h} \boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}S + \int_{\text{端面}z=0} -\boldsymbol{z}_0 \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}S = \rho_l \frac{h}{\varepsilon}$$

由结构的对称性可知，电场只有 ρ 分量 E_ρ。而且在半径为 ρ 的高斯面上 E_ρ 为常数。所以上式左边第二、三项积分为零，第一项积分 $\boldsymbol{E}$ 可移到积分号外，其积分为 $2\pi\rho h$，最终结果为

$$E_\rho 2\pi\rho h = \rho_l \frac{h}{\varepsilon}$$

或

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\rho}_0 \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\rho}$$

所以内导体携带 ρ_l 电荷密度的同轴线，其内外导体间电场与轴线上放置无限长线电荷（ρ_l）产生的电场相同。

在 $\rho < a$ 的导体内，电场 $\boldsymbol{E} = 0$，$\rho > b$ 的区域，应用高斯定律可得

$$\oint_S \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{E} \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon} h \left(\rho_l + (-\rho_l)\right) = 0$$

即　$\boldsymbol{E} = 0$，$\rho > b$。图 10－14（b）给出 E_ρ 随 ρ 的变化关系。

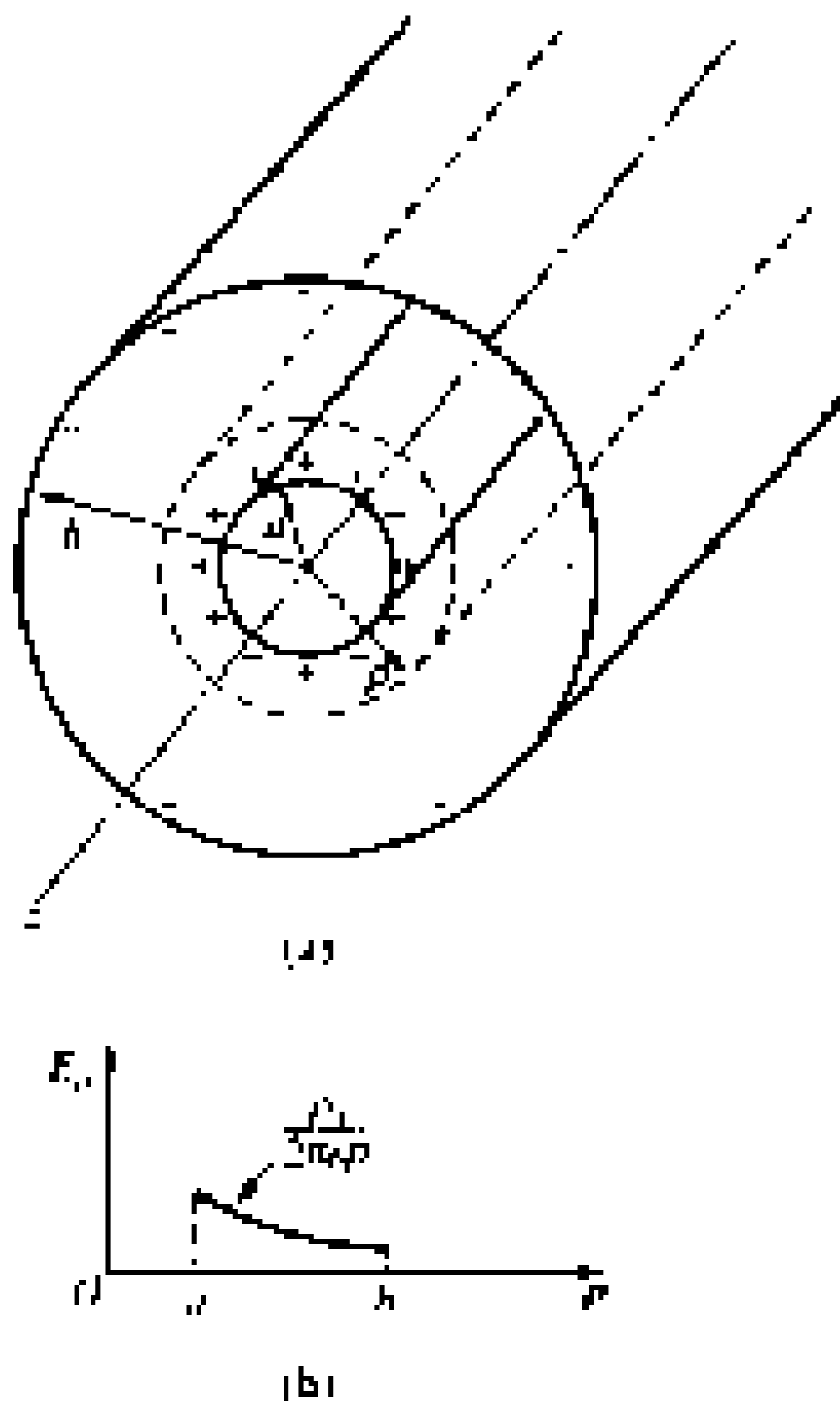


图 10－14　同轴线中的电荷与电场
（a）电荷分布　（b）电场分布

例 10－11　间距为 d 的两块平行导电板，［见图 10－15（a）］，其内表面分别带有面电荷密度为 $+\rho_s$ 和 $-\rho_s$，求电场 $\boldsymbol{E}$。

解：如图 10－15（b），选择高斯面为一方盒子，并跨越一导电板，上下底面分别为 S_1、S_2，应用高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon}\int_V \rho_v \mathrm{d}V = \frac{-1}{\varepsilon}\rho_s A$$

A 为 S_1 或 S_2 的面积。假定导电板无限大，电场只有 x 分量，所以高斯面侧面积分等于零，有

$$\oint_S \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{E}\mathrm{d}S = \int_{S_1} E_x \mathrm{d}S + \int_{S_2} (-E_x)\mathrm{d}S = -\frac{\rho_s A}{\varepsilon}$$

又因为导电板外表面没有电荷，S_1 面上的 $E=0$，而在 S_2 面上，E_x 是常数。这样上式积分成为

$$-E_x A = -\frac{\rho_s A}{\varepsilon}$$

即

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_s}{\varepsilon}\boldsymbol{x}_0 \quad (0 < x < d) \tag{10.2.17}$$

与式(10.2.15)比较，电场相差一因子 2，因为本节讨论的系统有上下两块带电板。

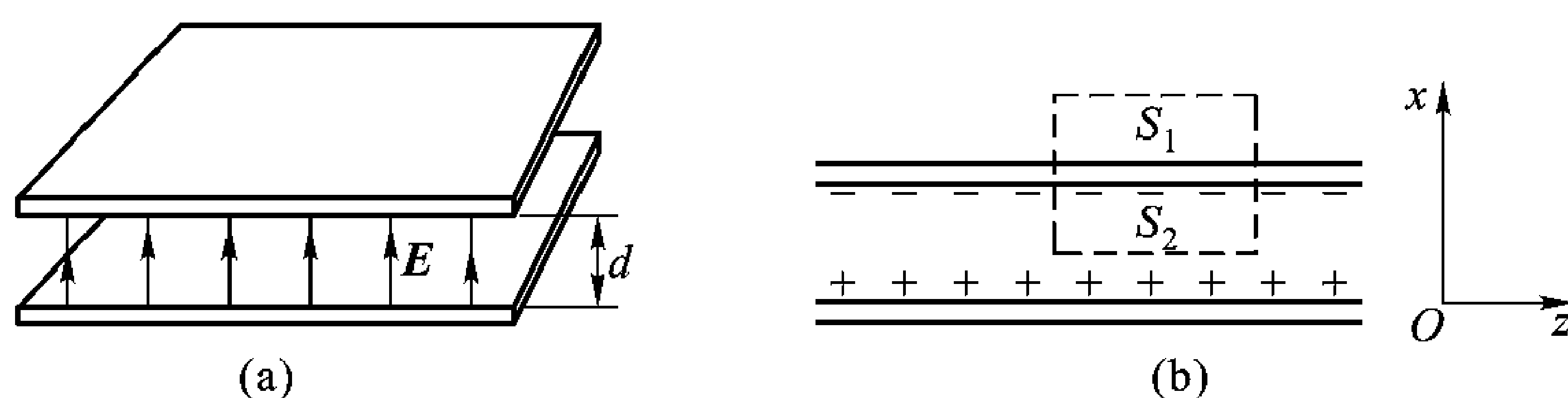


图 10-15　平行导电板系统

(a) 平行导电板间电场　(b) 求电场 $\boldsymbol{E}$ 的高斯面

10.2.4　从电场的线积分计算电位

10.2.1 节定义了 A、B 两点间电位差为

$$V_{\mathrm{AB}} = \Phi_{\mathrm{A}} - \Phi_{\mathrm{B}}$$

当电场已知时，电位可由式(10.1.7)求出

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi = -\boldsymbol{x}_0\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \boldsymbol{y}_0\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \boldsymbol{z}_0\frac{\partial\Phi}{\partial z} \tag{10.2.18}$$

用 $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{x}_0\mathrm{d}x + \boldsymbol{y}_0\mathrm{d}y + \boldsymbol{z}_0\mathrm{d}z)$ 点乘式(10.2.18)得到

$$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathrm{d}z\right) = -\mathrm{d}\Phi \tag{10.2.19}$$

所以

$$V_{\mathrm{AB}} = \Phi_{\mathrm{A}} - \Phi_{\mathrm{B}} = -\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{10.2.20}$$

积分沿 d$\boldsymbol{r}$ 增加的路径进行（见图 10－16）。如果积分路径处处与电场 $\boldsymbol{E}$ 垂直，$\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$，则其积分值为零。如果积分路径处处与电场 $\boldsymbol{E}$ 平行，则积分值最大。

考虑一种特殊情况，A、B 两点间积分路径为一直线。因 V_{AB}是 B 作参考点时 A 点的电位。所以如果 $\boldsymbol{E}$ 指向 A，则 V_{AB}是负的，反之，如果 $\boldsymbol{E}$ 离开 A，则 V_{AB}是正的。例如图 10－4 点电荷的电场为

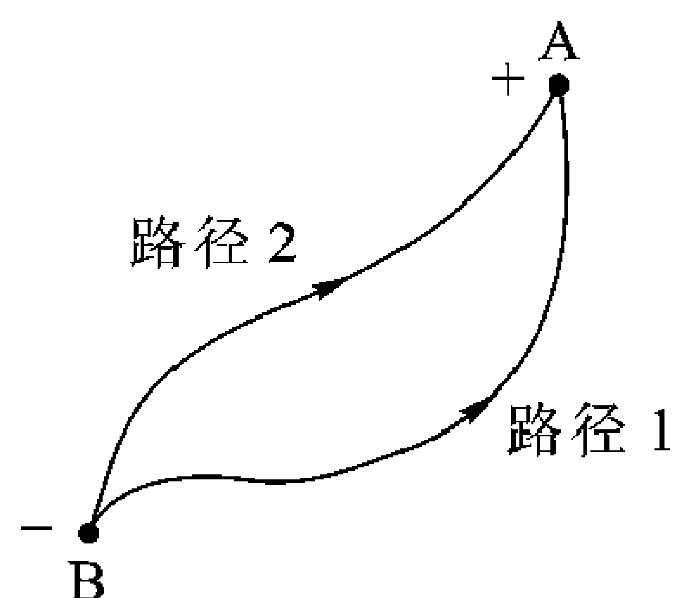


图 10－16　B 与 A 之间的线积分

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{r}_0\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

电位为

$$\Phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向与 $\boldsymbol{r}_0$ 方向一致，越靠近电荷，电位越大，即电位随 r 的增加而减小。上述点电荷的电位可由点电荷电场的积分得出

$$\Phi(\boldsymbol{r})-\Phi(\infty)=-\int_{\infty}^{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\frac{q}{4\pi\varepsilon r'^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

这里我们把无穷远的点作为参考点，其电位设为零。

完纯导体的电位

因为完纯导体内没有电场。所以根据式（10.2.20），完纯导体内任何两点间电位差都为零。完纯导体的电位一定是常数。当然孤立的两个完纯导体可以有不同的常数电位，但当它们用导线连起来后，只能处于同一电位。如果一导体通过导线与大地相连，我们就说导体接地。因为在低频或 DC 情况下，大地是一个良导体，其各处的电位接近一常数，这个电位通常取作零电位。

例 10－12　如图 10－15 所示平行导电板，假定 $V(0)=0$，求 $V(x)$。

解：从式（10.2.17）可知

$$\boldsymbol{E}=\frac{\rho_s}{\varepsilon}\boldsymbol{x}_0$$

所以

$$V(x)=-\int_0^x E_0\mathrm{d}x=-E_0x \tag{10.2.21}$$

式中 $E_0=\rho_s/\varepsilon$。

例 10－13　如图 10－14 中的同轴线，假定 $V(b)=0$，求 $V(\rho)$。

解：根据例 10－10 得到的结果

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\rho}_0\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\rho}$$

所以

$$V(\rho) = -\int_b^{\rho} \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\rho'}\mathrm{d}\rho' = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\left(\frac{b}{\rho}\right) \tag{10.2.22}$$

例 10－14　半径分别为 a 和 b、相距很远的两个导电球用很长很细的导线连起来（见图 10－17），如使该系统带电 q，求每个球所带电量及表面电场 $\boldsymbol{E}$。

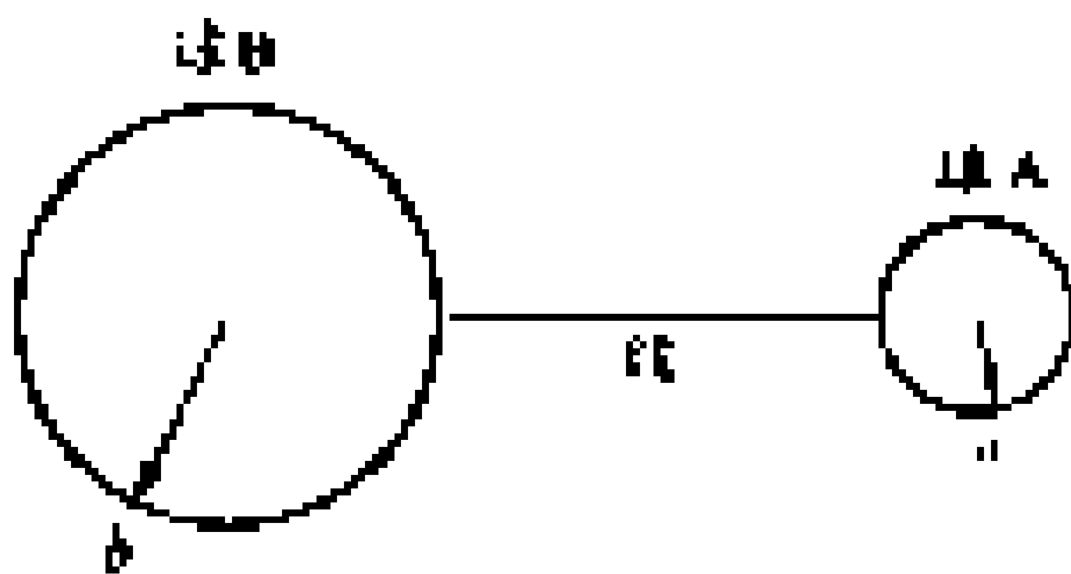


图 10－17　用很长很细的导线连接的两导电球

解：因为两导电球相距很远，可认为彼此相距无穷远，因而可假定每个导电球表面电荷均匀分布，设 q_a 为导体球 A 表面的电荷，q_b 为导体球 B 表面的电荷，如果连接两导体球的导线很细，可以设线上的电荷为零。于是有

$$q_a + q_b = q \tag{10.2.23}$$

导电球 A 的电位为

$$V_a = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon a}$$

同样

$$V_b = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon b}$$

因为两导电球被导线相连，其电位必须相等，所以

$$\frac{q_a}{4\pi\varepsilon a} = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon b} \tag{10.2.24}$$

解式（10.2.23）、式（10.2.24）可得

$$q_a = q\left(\frac{a}{a+b}\right)$$

$$q_b = q\left(\frac{b}{a+b}\right)$$

两导电球表面电场为

$$E_a = \frac{q_a}{4\pi\varepsilon a^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon(a+b)a}$$

$$E_b = \frac{q_b}{4\pi\varepsilon b^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon(a+b)b}$$

所以如果 $b >> a$，则 $E_a >> E_b$。

避雷针

由上例得出的结果可以得出如下结论，如果一个导体包含尖端，那么尖端

处电场强度比导体光滑部分电场强度大得多，这就是避雷针的工作原理。

避雷针是一个具有尖端的导体棒，一端安放在建筑物的顶，另一端接地[见图 10－18 (a)]，当带电云层接近建筑物时，避雷针从大地吸引与云层异号的电荷到尖端，使尖端电场强度大大高于周围任何地方的场强，当这个场强超过大气击穿强度时，尖端附近空间被电离并成为导体，因而给云层中电荷提供了一条与地相连的安全通道。图 10－18 (b)是纽约帝国大厦顶端避雷针工作的照片。



图 10－18　避雷针
(a) 避雷针　(b) 避雷针保护大厦的安全

静电场的线积分

下面我们证明静电场的一个基本性质：静电场中 A、B 两点电位差 V_{AB}与积分路径无关。这一性质可从麦克斯韦方程(10.1.1)导出。因为将斯托克斯定理应用到式(10.1.1)可得

$$\oint_c \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E} = 0 \qquad (10.2.25)$$

上式表示静电场的保守性。将式(10.2.25)应用于图 10－16 所示的积分闭合曲线，得到

$$\int_{\text{路径}1} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E} - \int_{\text{路径}2} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E} = 0$$

因此

$$\Phi_A - \Phi_B = -\int_{\text{路径}1} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E} = -\int_{\text{路径}2} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E}$$

注意，连接 B 和 A 两点的路径 1 和 2 是任意的，所以 V_{AB}与积分路径无关。

基尔霍夫电压定律

在电路理论中，式(10.2.25)就是基尔霍夫电压定律。因为式(10.2.25)来自式(10.1.1)，所以式(10.2.25)只在静电场中是正确的。如果存在时变磁场，式(10.2.25)不再成立，所以基尔霍夫定理有它的局限，这就是当时变磁场与电路存在耦合时，基尔霍夫定理不能用，除非将时变磁场效应考虑进去。

例 10-15　假定电场在 z_0 方向，且等于 1 V/m，求电位 V_{AB}。B 点在原点，A 点坐标为(3.0,5)，见图 10-19。

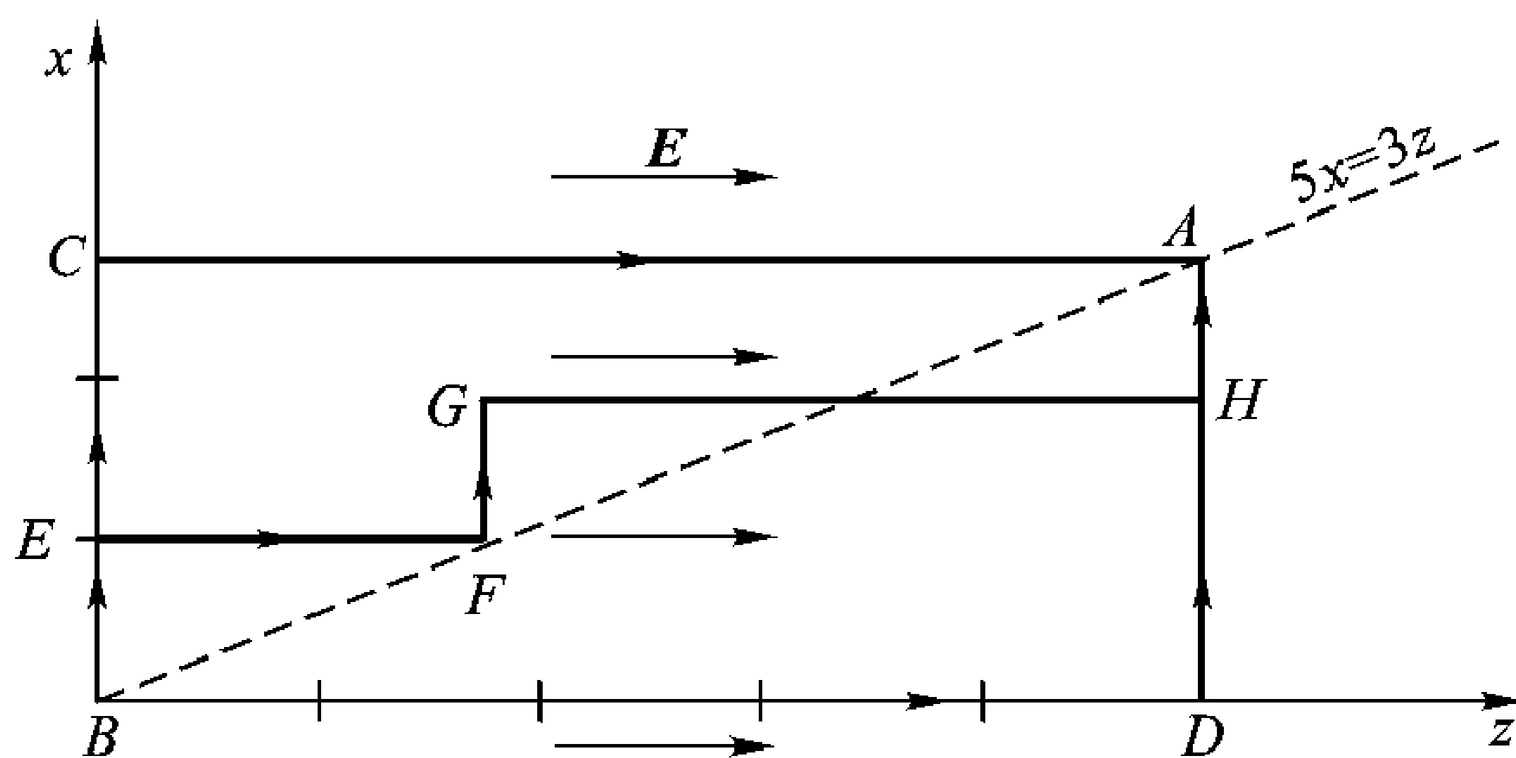


图 10-19　沿不同路径电场 $\boldsymbol{E}$ 的积分

解：从 B 到 A 选择 3 个不同的积分路径。路径 1 为 $BECA$，电场 $\boldsymbol{E}$ 垂直于 BEC，但平行于 CA，所以

$$V_{AB}=(-3\times 0-5\times 1)\text{V}=-5\ \text{V}$$

路径 2 为 $BDHA$，电场 $\boldsymbol{E}$ 平行于 BD，但垂直于 DHA，所以

$$V_{AB}=(-5\times 1-3\times 0)\text{V}=-5\ \text{V}$$

路径 3 为 $BEFGHA$，电场平行于 EF，GH，但垂直于 BE、FG 及 HA，所以

$$V_{AB}=(-1\times 0-2\times 1-1\times 0-3\times 1)\text{V}=-5\ \text{V}$$

读者可选择其他任何路径，其结果一定都是 -5 V，因为所给出的场是静电场，满足 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$。

例 10-16　上例中，如果 $\boldsymbol{E}=z_0\,(x+2)\text{V/m}$，电场指向仍然在 z_0 方向，但不均匀，求沿路径 $BECA$ 积分的电位并与沿 $BDHA$ 路径积分的电位比较。

解：路径 BC 与电场 $\boldsymbol{E}$ 垂直，对积分没有贡献，沿路径 CA，$x=3$，$\boldsymbol{E}=5z_0$，所以

$$V_{AB}=0-5\times 5\ \text{V}=-25\ \text{V}$$

沿路径 $BDHA$，可得

$$V_{AB} = (-5\times 2-0)\text{V} = -10\ \text{V}$$

这两个数值不等，因为在所研究区域内 $\nabla\times\boldsymbol{E}$ 不等于零，所给出的场不是静电场。

例 10－17　考虑图 10－20 所示的由导体围成一任意形状的空腔，证明腔内电场为零，腔内表面没有电荷。

解： 从例 10－2，在导体内 $\boldsymbol{E}=0$，$\rho_v=0$，选择 S' 为高斯面，应用式(10.2.16)可得

$$\oint_{S'}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}x = q/\varepsilon = 0$$

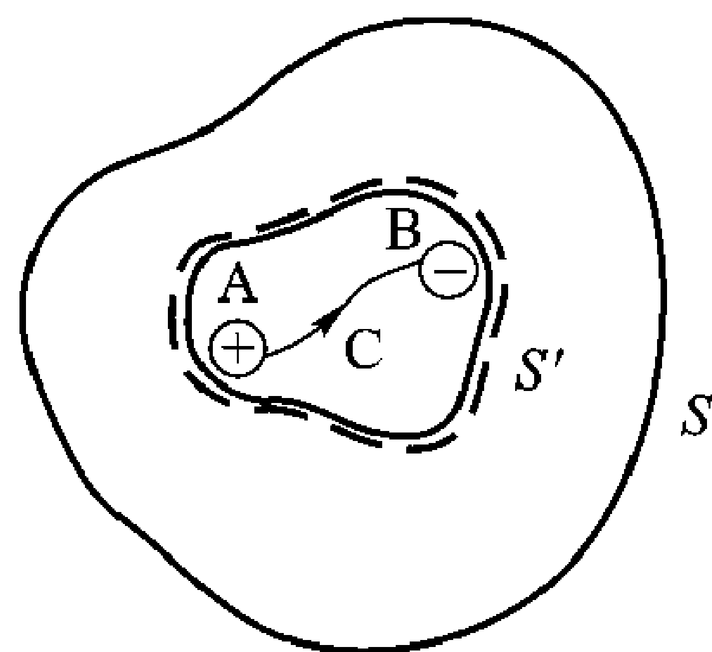


图 10－20　导体围成的空腔内表面不能存在符号相反的电荷

所以在高斯面 S' 内总电荷为零，但这不等于空腔内表面没有电荷，因为如果空腔内表面分布有等量的正、负电荷，其总电荷量也是零。下面将证明空腔内表面分布等量不同符号电荷是不可能的。如果在空腔内表面有彼此分开的正、负电荷，那么就有从正电荷 A 到负电荷 B 的电力线 C。如果我们沿力线对电场积分，就得到一非零的正数，即

$$\int_c\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = V_{\mathrm{AB}} > 0 \tag{10.2.26}$$

但是我们又知道，导体一定是一个等位体，导体上任何两点间不可能有电位差，因而与式(10.2.26)矛盾，所以空腔内表面不可能有异种电荷，只能有同种电荷。这个结论不管空腔内是空的，还是包含某种电荷，都是适用的。

根据上面讨论可知，第一，高斯面 S' 包围的体积内总电荷为零，第二，如果空腔内表面带电荷，不是正的就是负的。从以上两点只能得出一个结论，空腔内表面不可能有电荷。空腔内也不可能有电场，因为电场必须从正电荷出发并终止于负电荷。

10.3　在一定边值条件下解泊松方程与拉普拉斯方程

10.2 节讨论当边界趋于无穷远时，如何由电荷分布求静电位与静电场。本节研究如果边界不是趋于无穷远，如何根据给定的边界条件求静电位与静电场。

边界趋于无穷远时泊松方程

$$\nabla^2\Phi(\boldsymbol{r}) = -\rho_v/\varepsilon$$

的解已在 10.2 节给出。如果边界不是趋于无穷远，就要在一定边值条件下解泊松方程。

如果所研究空间电荷密度 $\rho_v=0$，泊松方程变为拉普拉斯方程

$$\nabla^2\Phi(\boldsymbol{r})=0$$

其解由所研究空间边界条件决定。那么，静电场的边界条件怎么表示呢？

10.3.1 静电场的边界条件

静电场是时变场 $t=0$ 的特例，边界条件仍为式(5.1.4)、(5.1.5)描述，即

$$\boldsymbol{n}_0\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)=0$$

$$\boldsymbol{n}_0\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_s$$

在两种不同介质的分界面上，没有自由电荷，$\rho_s=0$，上两式可写为

$$E_{1t}=E_{2t}$$

$$D_{1n}=D_{2n}$$

也就是说在介质交界面，电位移的法向分量、电场强度的切向分量连续。将 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$ 代入，得到介质交界面用电位 Φ 表示的边界条件

$$\Phi_1=\Phi_2 \tag{10.3.1}$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \tag{10.3.2}$$

现在有一个问题，在一定边界条件下求解泊松方程或拉普拉斯方程，是否只有一个解，换句话说其解是否惟一？答案是，只有一个解，即解是惟一的，这就是惟一性定理。

10.3.2 静电场的惟一性定理

第 3 章从复矢量形式的麦克斯韦方程导出过时变场的惟一性定理。下面给出静电场这一特别情况下，惟一性定理的表述。

假定有两个解 Φ_1 和 Φ_2 在所研究区域 V 内都满足泊松方程及边界条件，即

$$\nabla^2\Phi_1=-\rho_v/\varepsilon \quad (\text{在 } R \text{ 内}) \tag{10.3.3a}$$

$$\nabla^2\Phi_2=-\rho_v/\varepsilon \quad (\text{在 } R \text{ 内}) \tag{10.3.3b}$$

$$\Phi_1=V \quad (\text{在 } R \text{ 的边界上}) \tag{10.3.4a}$$

$$\Phi_2=V \quad (\text{在 } R \text{ 的边界上}) \tag{10.3.4b}$$

定义 Φ_3 是 Φ_1 和 Φ_2 的差，即

$$\Phi_3=\Phi_1-\Phi_2 \quad (\text{在 } R \text{ 内}) \tag{10.3.5}$$

显然

$$\nabla^2\Phi_3=\nabla^2(\Phi_1-\Phi_2)=\nabla^2\Phi_1-\nabla^2\Phi_2 \tag{10.3.6}$$

将式(10.3.3a)和式(10.3.3b)代入上式得到

$$\nabla^2 \Phi_3 = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \tag{10.3.7}$$

根据式(10.3.4a)和(10.3.4b)，可知

$$\Phi_3 = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 边界上}) \tag{10.3.8}$$

利用标量第一格林定理式(1.6.57)，并令 $\Phi = \Psi = \Phi_3$，得到

$$\int_V (\Phi_3 \nabla^2 \Phi_3 + \nabla \Phi_3 \cdot \nabla \Phi_3)\, \mathrm{d}V = \oint_S \Phi_3 \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} \mathrm{d}S \tag{10.3.9}$$

因为 $\nabla^2 \Phi_3 = 0$,并且 Φ_3 (或 Φ_3 的法向导数)沿界面处处等于零，故上式简化为

$$\int_V |\nabla \Phi_3|^2 \mathrm{d}V = 0 \tag{10.3.10}$$

式(10.3.10)右边被积函数 $|\nabla \Phi_3|^2$ 是非负的。要使式(10.3.10)成立，只有

$$\nabla \Phi_3 = 0 \tag{10.3.11}$$

所以在 V 内

$$\Phi_3 = C$$

但式(10.3.8)要求 V 边界上 $\Phi_3 = 0$，所以常数 C 只能取零，即

$$\Phi_3 = 0 \ (V \text{ 内}) \tag{10.3.12}$$

因为 $\Phi_3 = 0$，根据 Φ_3 定义，$\Phi_1 = \Phi_2$，这就证明了满足一定边界条件的泊松方程的解是惟一的。

10.3.3 镜像法

镜像法解静电场问题的依据是惟一性定理。

如图 10－21，$z = 0$ 平面为无限大接地导电板[即 $\Phi\ (z = 0) = 0$]，在 $z = d$ 处置一点电荷 q，求 $z > 0$ 空间的电位分布。

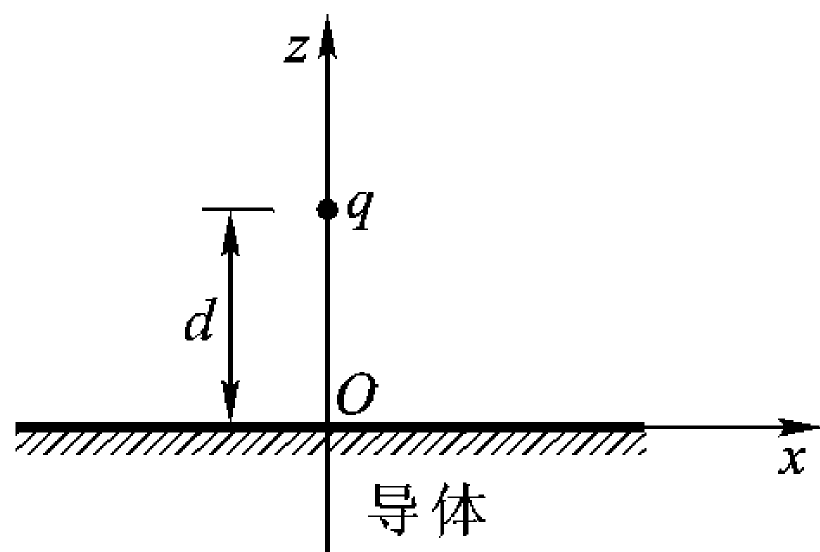


图 10－21 距无限大接地导电板 d 的点电荷 q

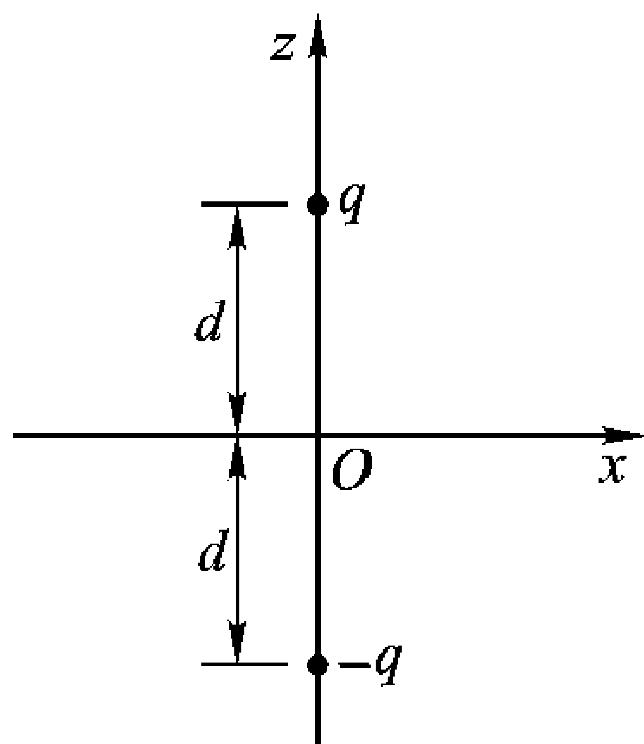


图 10－22 两点电荷(q，$-q$)组成的偶极子系统

用镜像原理解此问题不是直接在 $z > 0$ 空间求解泊松方程，而是先研究图 10－22 所示的偶极子产生的场问题，在 $z = d$、$z = -d$ 各置点电荷 $+q$、$-q$，显然该偶极子产生的电位为

$$\Phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right] \qquad (10.3.13)$$

因此在 $z=0$ 平面，$\Phi(x,y,0)=0$。如果在 $z=0$ 平面放置一无限薄的完纯导电板，并使其接地，即导电板电位 $\Phi(z=0)=0$，那么该接地导电板不影响偶极子产生的电位分布。根据惟一性定理，图 10－22 所示的偶极子在 $z>0$ 空间的电位分布与图 10－21 点电荷 q 在接地导电板上方产生的电位分布是相同的。因为两者在 $z=0$ 平面满足同样的边界条件，即 $\Phi(z=0)=0$。我们称 $z=-d$ 处点电荷 $-q$ 为 $z=d$ 处点电荷 $+q$ 以 $z=0$ 为平面镜的像。这样求距无限大接地导电板上方 d 的 $+q$ 在 $z>0$ 空间产生的电位就变为求点电荷 $+q$ 及其镜像 $-q$ 组成的偶极子在 $z>0$ 空间的电位。

如图 10－23，点电荷 q 距水平导电板距离为 b，距垂直导电板距离为 a，两导电板均接地，即导电板电位为零，求点电荷所在象限($x>0$，$z>0$)的电位分布。

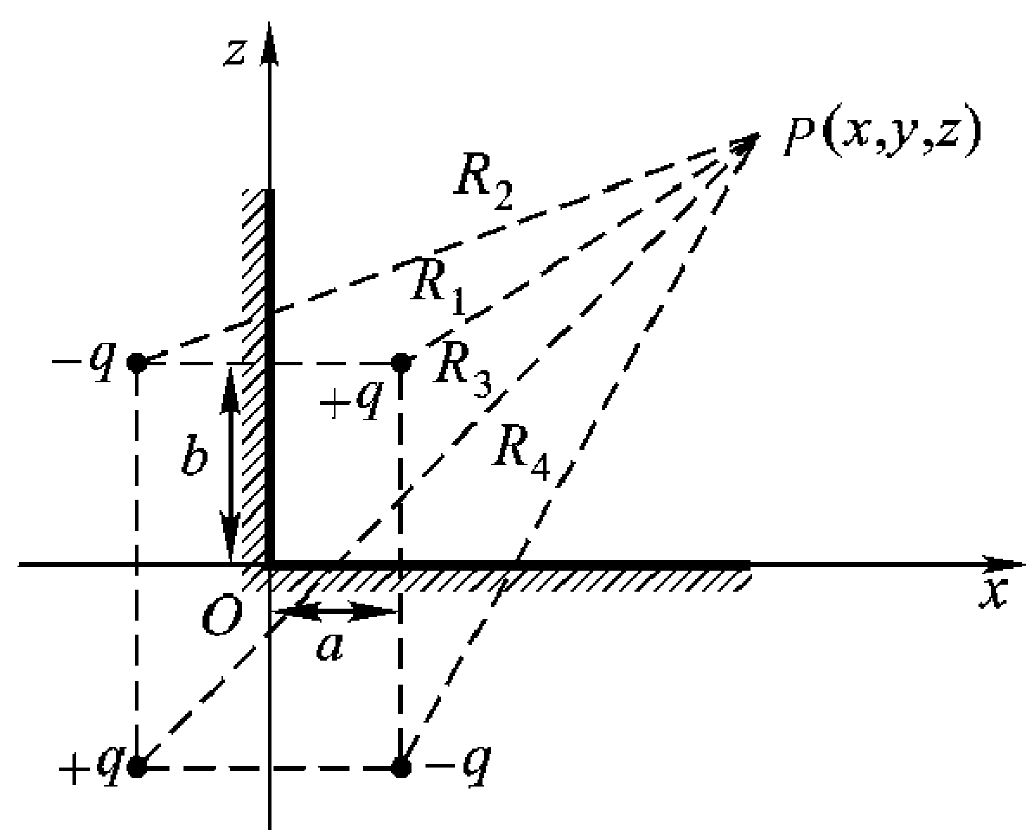
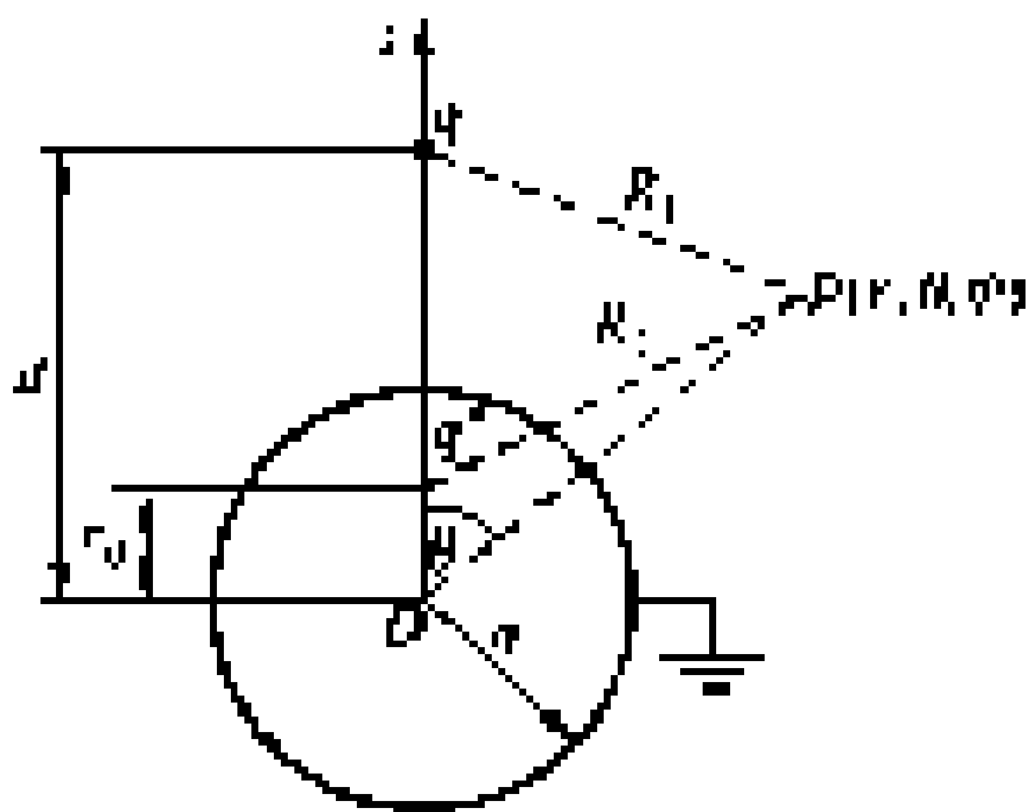


图 10－23　距水平导电板为 b，垂直导电板为 a 的点电荷 q，两导电板均接地

如果在($x=-a$，$z=b$)与($x=a$，$z=-b$)各设置镜像电荷 $-q$，在($x=-a$，$z=-b$)设置镜像电荷 $+q$，那么这 4 个点电荷系统在 $z=0$，$x=0$ 平面产生的电位为零，根据惟一性定理，这 4 个点电荷系统在第一象限($x>0$，$z>0$)产生的电位与距 $x=0$ 接地导电板 a，距 $z=0$ 接地导电板 b 点电荷 q 在 $x>0$、$z>0$ 空间产生电位一样。

例 10－18　求点电荷与接地导电球系统的电位分布。如图 10－24，接地导电球的半径为 a，点电荷 q 离开接地导电球球心距离为 d。


图 10－24　点电荷与接地导电球系统，镜像电荷 q' 置于离球心 r_0 处

解：用镜像法解上述问题的基本思想是，在接地导电球球心与点电荷 q 的连线(图中定义为 z 轴)上，找离开球心 r_0 的一点，并在该点上置电荷 q'，使得 q、q' 联合作用在 $r=a$ 的球面上的电位为零，按惟一性定理，q、q' 在 $r>a$ 区域产生的场与点电荷 q 及接地导电球系统在 $r>a$ 区域产生的场相同，现在的问题是镜像电荷 q' 为多大？q' 距球心 $r_0=$？

因为 q、q' 产生的位场为

$$\Phi(r,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q}{R_1}+\frac{q'}{R_2}\right)$$

式中

$$R_1=(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{1/2}$$

$$R_2=(r^2+r_0^2-2r_0r\cos\theta)^{1/2}$$

这里我们用了球坐标。r 是所研究场点的坐标，R_1、R_2 分别是点电荷、镜像电荷到所研究场点的距离。

如果要使 $r=a$ 处电位为零，则有方程

$$\Phi(a,\theta)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q}{(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{1/2}}+\frac{q'}{(a^2+r_0^2-2r_0a\cos\theta)^{1/2}}\right]$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{q}{\sqrt{2ad}\left(\frac{a^2+d^2}{2ad}-\cos\theta\right)^{1/2}}+\frac{q'}{\sqrt{2ar_0}\left(\frac{a^2+r_0^2}{2ar_0}-\cos\theta\right)^{1/2}}\right]=0$$

使上式成立的条件是

$$\frac{a^2+d^2}{2ad}=\frac{a^2+r_0^2}{2r_0a}$$

$$\frac{q}{\sqrt{2ad}}=\frac{-q'}{\sqrt{2ar_0}}$$

解上述两方程得到

$$r_0=\frac{a^2}{d}$$

$$q'=-q\left(\frac{a}{d}\right)$$

10.3.4　拉普拉斯方程解法举例

如图 10－25 所示两无限大平行导电板，其间距为 d，上电极板电位 $\Phi(y=d)=V_0$，下电极板接地，$\Phi(y=0)=0\ \mathrm{V}$，求两导电板间电位分布与电场。

两导电板间没有电荷，故平板间电位 Φ 分布满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

因为平行电极板在 x、z 方向趋于无穷，电位只是 y 的函数，故上式成为

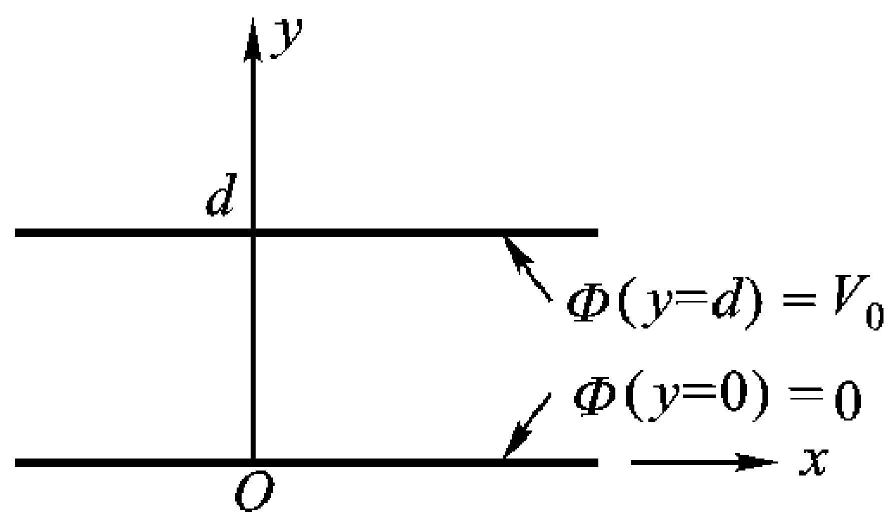


图 10－25　平行平板电极系统

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 \tag{10.3.14}$$

积分两次得到

$$\Phi = C_1 y + C_2$$

利用边界条件 $\Phi(y=0)=0$，$\Phi(y=d)=V_0$，得到

$$\Phi = \frac{V_0}{d}y \tag{10.3.15}$$

电场 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{y}_0 = -\frac{V_0}{d}\boldsymbol{y}_0 \tag{10.3.16}$$

所以电场在 $-\boldsymbol{y}_0$ 方向。

对电磁问题的求解分离变量法是一种十分有用的方法。现以求图 10－26 所示的矩形槽中电位分布为例进一步说明分离变量法的应用。矩形槽侧面与底面连成一体，电位 $\Phi=0\ \mathrm{V}$；顶盖与槽绝缘，电位 $\Phi=V_0$；槽底宽为 a，高为 b。矩形槽中电位分布满足拉氏方程

$$\nabla^2\Phi(x,y)=0\ (0<x<a, 0<y<b) \tag{10.3.17}$$

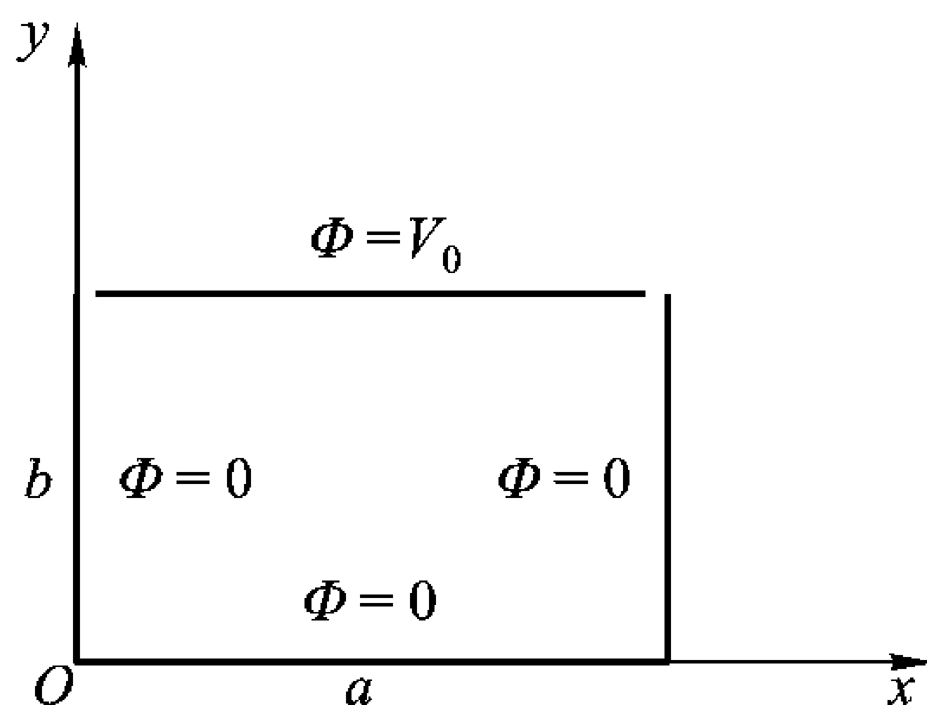


图 10－26 矩形金属槽，底和侧壁连成一体并接地，顶盖与槽绝缘，电位为 V_0

边界条件为

$$\Phi(0,y)=0\ (0<y<b) \tag{10.3.18a}$$

$$\Phi(a,y)=0\ (0<y<b) \tag{10.3.18b}$$

$$\Phi(x,0)=0\ (0<x<a) \tag{10.3.18c}$$

$$\Phi(x,b)=V_0\ (0<x<a) \tag{10.3.18d}$$

注意，槽内 $\rho_v=0$，但槽壁表面有面电荷。

因为 Φ 是 (x,y) 的函数，所以式(10.3.17)成为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi(x,y)=0 \tag{10.3.19}$$

假定 $\Phi(x,y)$ 可分离成

$$\Phi(x,y)=X(x)Y(y) \tag{10.3.20}$$

将式(10.3.20)代入式(10.3.19)，并用 $\Phi(x,y)$ 除，得到

$$\frac{\dfrac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{X(x)}+\frac{\dfrac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}{Y(y)}=0 \tag{10.3.21}$$

式(10.3.21)左边两项第一项只是 x 的函数，第二项只是 y 的函数，要使它们之和为零，只有

$$\frac{\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}}{X(x)} = -k^2 \tag{10.3.22a}$$

$$\frac{\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}}{Y(y)} = k^2 \tag{10.3.22b}$$

或

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + k^2 X(x) = 0 \tag{10.3.23a}$$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} - k^2 Y(y) = 0 \tag{10.3.23b}$$

式(10.3.23)的通解为

$$X(x) = A_1 \sin kx + B_1 \cos kx \tag{10.3.24a}$$

$$Y(y) = A_2 \sinh ky + B_2 \cosh ky \tag{10.3.24b}$$

从边界条件式(10.3.18a、b)可知电位 Φ 在 $x=0$ 和 a 必为零，因此 $X(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant a$ 范围内至少取两个零值。式(10.3.22a)常数取 $-k^2$，使得式(10.3.23a)的解取 $\sin kx$、$\cos kx$ 形式的解，在 $0 \leqslant x \leqslant a$ 范围内可以有无限多个零点。

将式(10.3.24)代入式(10.3.20)得到

$$\Phi(x, y) = (A_1 \sin kx + B_1 \cos kx)(A_2 \sinh ky + B_2 \cosh ky) \tag{10.3.25}$$

利用边界条件式(10.3.18a)得

$$\Phi(0, y) = 0 = B_1 Y(y)$$

所以 $B_1 = 0$，同样从式(10.3.18c)得到 $B_2 = 0$，所以式(10.3.25)成为

$$\Phi(x, y) = A \sin kx \sinh ky \tag{10.3.26}$$

A 和 k 是任意常数，利用边界条件式(10.3.18b)得到

$$0 = A \sin ka \sinh ky \quad (0 < y < b)$$

所以

$$k = \frac{m\pi}{a} \tag{10.3.27}$$

将式(10.3.27)代入式(10.3.26)得到

$$\Phi(x, y) = A \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \tag{10.3.28}$$

式中 $m = 1, 2, 3, \cdots$，对应于 m 的每一个解都满足拉氏方程及边界条件式(10.3.18a、b、c)，它们的线性组合也满足拉氏方程及边界条件式(10.3.18a、b、c)，有

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{m\pi}{a}y\right) \tag{10.3.29}$$

再利用边界条件式(10.3.18d)得到

$$V_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{m\pi b}{a}\right) \tag{10.3.30}$$

式(10.3.30)可决定待定系数 A_m，为此在式(10.3.30)两边同乘$\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$并在0到 a 范围内积分，利用三角函数正交性，得到

$$\int_0^a V_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{d}x = A_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\frac{a}{2}$$

由此可得

$$A_n = \frac{2V_0\left[1-\cos(n\pi)\right]}{n\pi\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \tag{10.3.31}$$

当 n 取偶数时 $A_n=0$，最终 Φ 的解为

$$\Phi(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=\text{奇数}}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}{n\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \tag{10.3.32}$$

式(10.3.32)的解是惟一的，因为它满足式(10.3.18)所有的边界条件。如当 $y=b$ 时

$$\Phi(x,b) = V_0,\quad (0\leqslant x\leqslant a),$$

式(10.3.32)成为

$$\sum_{n=\text{奇数}}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{a} = 1$$

$\Phi(x, b)$的图解示于图10-27。

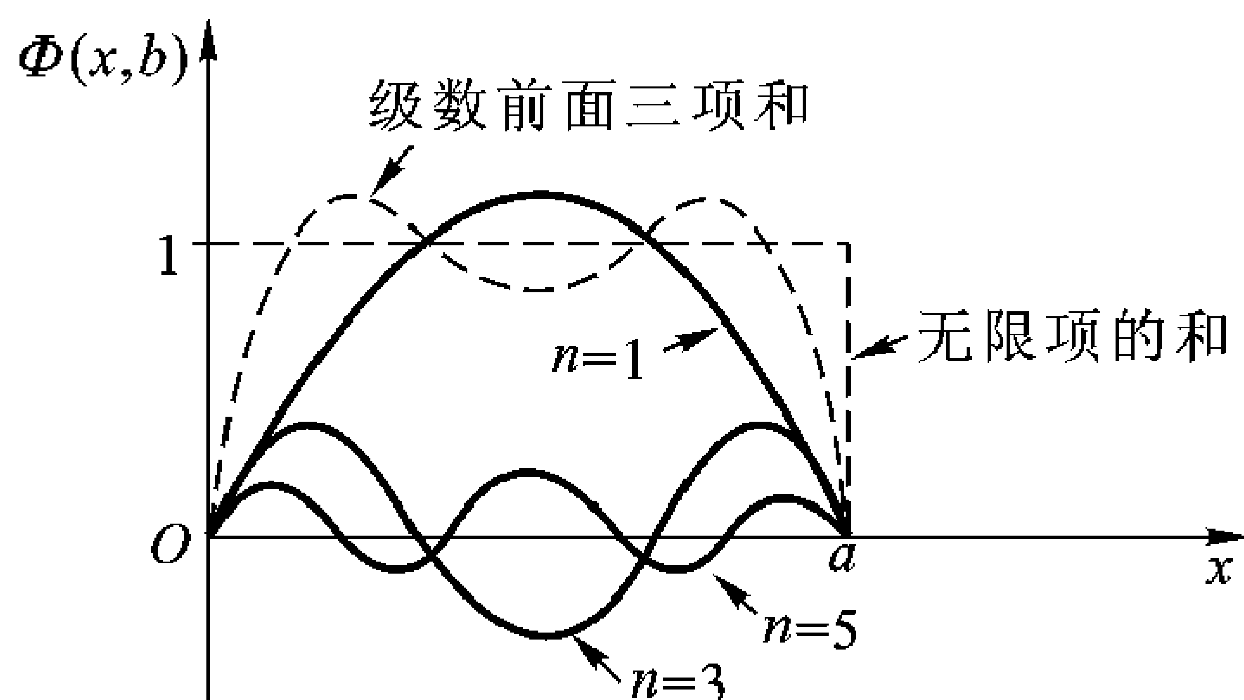


图10-27　式(10.3.32)给出的 $\Phi(x,b)$和它的傅里叶分量

10.3.5　泊松方程解法举例

图10-28为平板真空二极管简图，阴极位于 $y=0$，电位为0，阳极位于 $y=d$，电位为 V。求在空间电荷限制下阳极电流与阳极电压关系。所谓空间电荷限制就是阴极有无限发射能力。

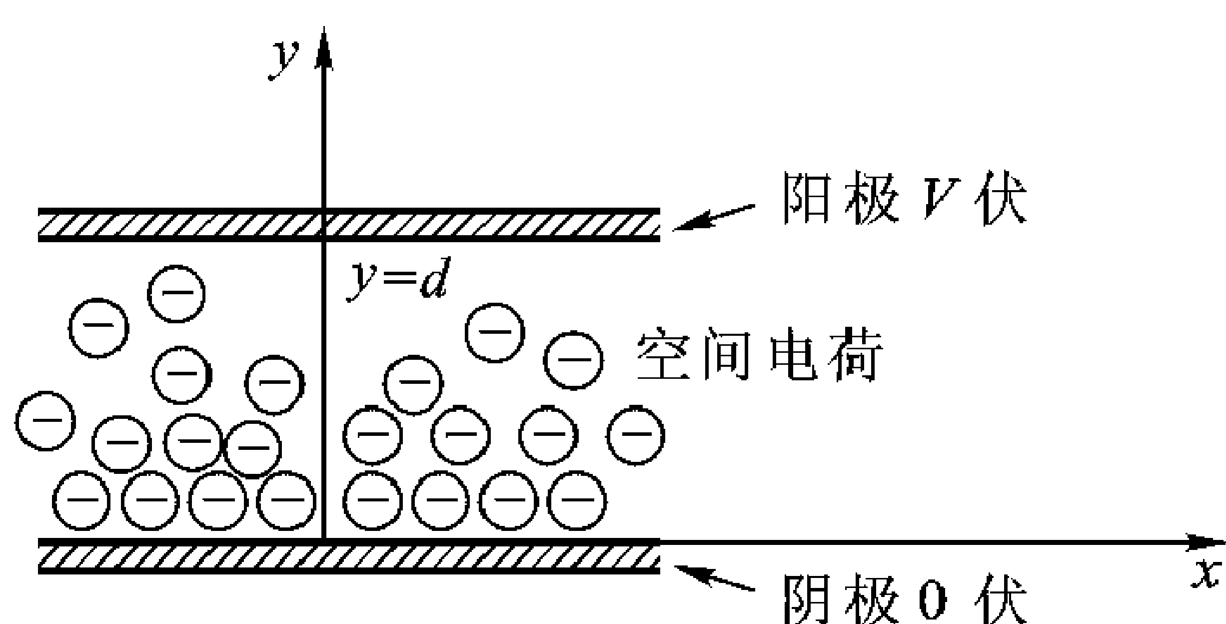


图10-28　空间电荷限制平板二极管系统

阴极不发射电子时，阴极和阳极没有电荷，阴极和阳极可看成一平行板电极系统，故阴极和阳极间电位 $\Phi(y)$、电场 $\boldsymbol{E}(y)$为

$$\Phi(y) = \frac{V}{d}y$$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{y}_0 \frac{V}{d}$$

如果阴极发射电子能力很强，阳极电流也比较大，那么极间由电子产生的所谓“空间电荷”对电位及电场的影响不能忽略。因此要通过解泊松方程

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

才能求得考虑空间电荷影响后真空二极管的电位分布。为此要先确定 ρ_v 的表达式及考虑空间电荷后的边界条件。

阴极表面电场的存在使阴极发射的电子由阴极飞向阳极。随着阴极、阳极间空间电子的增加，尤其是阴极表面电子的增加，使阴极表面电位降低，电场减小，最终到达一个平衡点，阴极发射的电子数使阴极表面合成电场（阳极加电压 V 在阴极表面产生的电场以及阴极表面电子电荷产生的电场）为零。于是我们得到考虑空间电荷后真空二极管的边界条件为

$$E_y(0) = -\left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0} = 0 \tag{10.3.33a}$$

$$\Phi(0) = 0 \tag{10.3.33b}$$

$$\Phi(d) = V \tag{10.3.33c}$$

电子由阴极飞向阳极过程中动能的增加等于电子位能的减小，即

$$\frac{1}{2}m\,[v(y)]^2 = e\Phi(y)$$

所以

$$v(y) = \sqrt{\frac{2e\Phi(y)}{m}} \tag{10.3.34}$$

式中 m 为电子质量（9.11×10^{-31} kg），e 为电子电荷（1.6×10^{-19} C），$\Phi(y)$ 为 y 处的电位，$v(y)$ 为电子运动到 y 位置的速度。二极管中电流密度 J 与电子电荷密度 ρ_v 及电子运动速度 $v(y)$ 有如下关系

$$J = -\rho_v v(y) \tag{10.3.35}$$

式中负号是因为电子电荷是负的。将式（10.3.35）代入，得到

$$\rho_v = -J\sqrt{\frac{m}{2e\Phi(y)}} \tag{10.3.36}$$

式（10.3.36）代入泊松方程得到

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}y^2} = \frac{J}{\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{2e\Phi}} \tag{10.3.37}$$

式（10.3.37）两边同乘 $2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y}$ 得到

$$2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}y^2}=a\Phi^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y}$$

式中

$$a=\frac{2J}{\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{2e}} \tag{10.3.38}$$

积分一次得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y}\right)^2=2a\Phi^{1/2}+C_1$$

应用边界条件式(10.3.33a)，$C_1=0$，上式成为

$$\Phi^{-1/4}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}y}=\sqrt{2a}$$

再积分一次，得到

$$\frac{4}{3}\Phi^{3/4}=\sqrt{2a}y+C_2$$

应用边界条件式(10.3.33b)，$C_2=0$，再根据边界条件式(10.3.33c)，上式成为

$$\frac{4}{3}V^{3/4}=\sqrt{2a}d \tag{10.3.39}$$

从式(10.3.38)、(10.3.39)消去 a，得到 J 与 V 关系

$$J=\frac{4\varepsilon}{9d^2}\sqrt{\frac{2e}{m}}V^{3/2} \tag{10.3.40}$$

注意，二极管电流密度 J 与阳极电压不是线性关系。式(10.3.40)表示的真空二极管电流与电压关系叫做 Child-Langmuir 定律，也叫二分之三次方定律。

电位 $\Phi(y)$ 也可表示成

$$\Phi(y)=\left(\frac{3}{4}\sqrt{2a}y\right)^{4/3}=\left(\frac{V^{3/4}}{d}y\right)^{4/3}=V\left(\frac{y}{d}\right)^{4/3} \tag{10.3.41}$$

电场 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{y}_0\frac{4}{3}\frac{V}{d}\left(\frac{y}{d}\right)^{1/3} \tag{10.3.42}$$

显然，阴极表面 $y=0$，$\boldsymbol{E}=0$。

由上面分析可见，边界条件(式 10.3.33b、c)指定了阴极和阳极上电位，而式(10.3.33a)决定了当阳极电压一定时二极管中电流的大小。

10.4 电场力

前面两节我们着重讨论在给定电荷分布与边值条件下如何计算静电场，我们之所以对静电场精确计算感兴趣是因为在许多实际应用中，静电场作用下荷电质点的运动起主要作用。例如在阴极射线管中，正是作用于电子束的静电场

使电子束偏转打到荧光屏从而显示出图像，本节着重讨论荷电粒子与电场的相互作用。

在静电场作用下，带电量 q 的质点受力为

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{10.4.1}$$

上式是矢量方程，如果电荷为正，则力的方向与电场方向一致，反之，如果电荷为负，力的方向与电场方向相反。

注意式(10.4.1)中的场 $\boldsymbol{E}$ 是外部电场，是由其他电荷产生的场，不包括受力作用的电荷本身产生的场。

10.4.1 在均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 作用下荷电质点的运动

考察质量为 m，带电量为 q 的荷电质点在均匀电场 $\boldsymbol{E}$ 作用下的运动。假定 $t=0$ 时荷电质点的初速为 $\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\boldsymbol{x}_0 + v_{0y}\boldsymbol{y}_0 + v_{0z}\boldsymbol{z}_0$，电场 $\boldsymbol{E}$ 只有 z 分量 $\boldsymbol{E} = E_0\boldsymbol{z}_0$，现要求任何时刻荷电质点的运动速度及位置。

根据式(10.4.1)，荷电质点在电场 $\boldsymbol{E}$ 作用下受的力为

$$\boldsymbol{F} = qE_0\boldsymbol{z}_0 \tag{10.4.2}$$

因为力在 $\boldsymbol{z}_0$ 方向，仅 $\boldsymbol{z}_0$ 方向速度有变化，根据牛顿定律

$$F_z = m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \tag{10.4.3}$$

将式(10.4.2)、(10.4.3)结合起来，得到

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}E_0 \tag{10.4.4}$$

对式(10.4.4)积分一次，得到

$$v_z(t) = \left(\frac{q}{m}E_0\right)t + C$$

初始条件是 $v_z(0) = v_{0z}$，由此可决定积分常数 C，所以

$$v_z(t) = v_{0z} + \frac{qE_0}{m}t$$

总的速度就是

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{x}_0 v_{0x} + \boldsymbol{y}_0 v_{0y} + \boldsymbol{z}_0\left(v_{0z} + \frac{qE_0}{m}t\right) \tag{10.4.5}$$

任何时刻荷电质点位置 $\boldsymbol{r}$ 就是

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_0(v_{0x}t + x_0) + \boldsymbol{y}_0(v_{0y}t + y_0) + \boldsymbol{z}_0(v_{0z}t + z_0 + \frac{qE_0}{2m}t^2) \tag{10.4.6}$$

(x_0, y_0, z_0)是 $t=0$ 时荷电质点的位置坐标。

例 10－19 具有 $\boldsymbol{v}_0 = 2\times10^7$ m/s 初速的电子进入平行平板电容器，两平板间加有 100 V 电压(见图 10－29)，两平板间距为 1 cm，平板在 $\boldsymbol{x}_0$ 方向是 4 cm，

求电子运动轨迹。

解：平板电容器内电场强度 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E}=\frac{V_0}{d}\boldsymbol{z}_0=10^4\boldsymbol{z}_0\quad \text{V/m}$$

因为电场在 z 方向，电子在 $\boldsymbol{x}_0$ 方向运动速度不变，电子的初始位置设为 $x_0=y_0=z_0=0$，初速 $v_{0x}=2\times10^7$ m/s，根据式(10.4.6)，t 时刻电子位置为

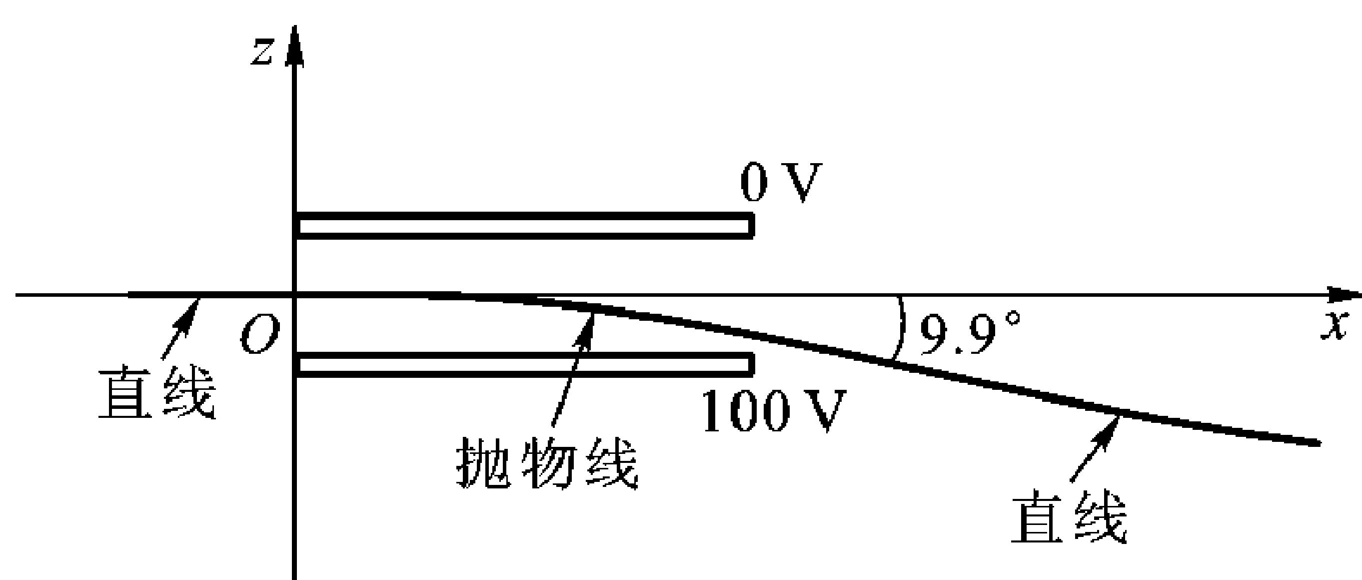


图 10－29　在静电场作用下的电子轨迹(例 10－19)

$$x=2\times10^7 t$$

$$z=\frac{-1.6\times10^{-19}\times10^4}{2\times9.1\times10^{-31}}t^2=-8.8\times10^{14}t^2$$

从上两式消去 t，得到电子的轨迹方程

$$z=-2.2x^2 \tag{10.4.7}$$

这是一个抛物线。电子在 t_0 时刻飞出电容器极板空间，则

$$t_0=\frac{4\times10^{-2}}{2\times10^7}=2\times10^{-9}\text{ s}$$

t_0 时刻离开电容器极板空间的位置是

$$x_e=0.04\text{ m}$$

$$z_e=-0.0035\text{ m}$$

电子飞出平行板电容器后不再受电场力作用，作直线运动，与轴夹角

$$\theta=\arctan\frac{v_z(t_0)}{v_x(t_0)}=-9.9°$$

图 10－29 给出整个电子运动轨迹。

例 10－20　如果例 10－19 中电容器极板在 x 方向长度为 6 cm，将发生什么结果?

解：电子将打上下极板。因为根据式(10.4.7)，当 $z=-0.005$ m 时，$x=0.048$ m，即电子还没飞出电容器极板空间就打上电容器下极板。

10.4.2　电场力应用举例

电晕

有雾或雨天，在高压输电线上会形成小水滴，这些小水滴对于输电线的其他平滑部分犹如尖端。从例 10－14 我们已知在导体尖端电场最强。所以小水

滴附近电场比其他地方强得多，足以对周围的空气产生电离，其结果是使周围的空气加热，同时在夜间可观察到微弱的模糊不清的辉光。这种辉光放电叫做电晕放电。它是由很强的电场产生的一种气体放电。

导体尖端或很细导线周围的强电场有两个特点：一是不均匀，二是仅局限于尖端或细导线附近一个很小的区域，离开尖端或细导线一个很小的距离，电场就降得很弱。所以这种气体放电仅限于一个局部的区域。模糊不清的辉光通常构成一个环，如同发光的皇冠——日晕，这就是电晕放电名称的由来。绕高压输电线的电晕放电将导致输电线的附加损耗，这是不利的。有时电晕放电也可得到应用。下面分析电晕放电的机制。考虑图 10 – 30 所示的同轴线，V_0 为内外导体间电压，我们把它叫做电晕管，它的内导体很细且处于高电位，细导线附近强电场产生正电晕，如果电池极性改变，细导线附近激励起负电晕。

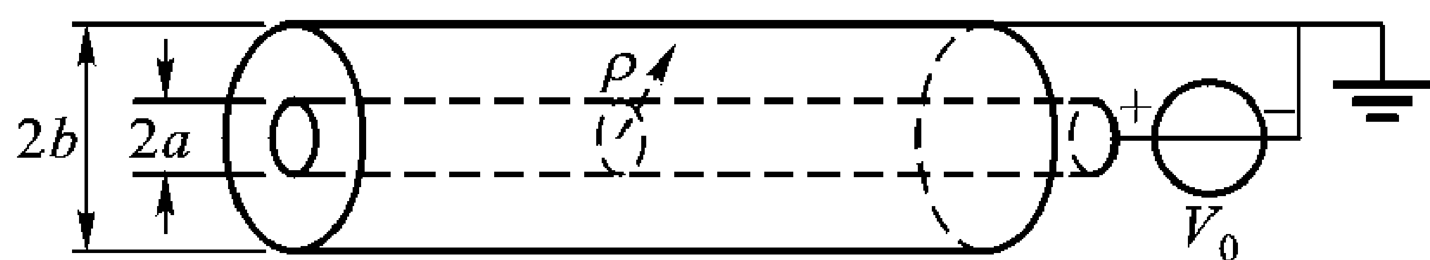


图 10 – 30　电晕管

由例 10 – 10 可得

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon\rho}\boldsymbol{\rho}_0 \tag{10.4.8}$$

及

$$V(\rho) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{\rho} \tag{10.4.9}$$

ρ_l 是导体的线电荷密度单位为 C/m，b 为外导体内半径，因为 $V(a) = V_0$，a 为内导体半径，所以

$$V_0 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{b}{a} \tag{10.4.10}$$

$$E_\rho = \frac{V_0}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{\rho} \tag{10.4.11}$$

显然，内导体表面电场最强，如果 a 很小，E_ρ 就可能很大。作为经验公式，空气中产生电晕放电所需电场为

$$E_c = 3\times10^6\, m\left(\delta + 3\times10^{-2}\sqrt{\frac{\delta}{a}}\right)\ \text{V/m} \tag{10.4.12}$$

式中 m 为导线的粗糙度系数，一般在 0.5 ~ 0.9 之间。对于光滑导线，$m = 1$。δ 为相对空气密度，$\delta = (T_0/T)(P/P_0)$。P 为空气压力，以大气压为单位。T 为空气温度。$T_0 = 298$ K。$P_0 = 1$ 大气压。

用式(10.4.12)，可以计算出同轴线内导体附近产生电晕的最小电压 V_0。参看图 10－30，设 $b=10$ cm，$a=0.5$ cm，$m=0.9$，在室温(20 ℃)及标准气压条件下($P=1$ 大气压)，(10.4.12)给出

$$E_c = 3.9\times10^6\ \mathrm{V/m}$$

再从式(10.4.11)可得产生电晕的最低电压 V_0 为

$$V_0 = E_c a \ln\frac{b}{a} = 58.4\ \mathrm{kV}$$

由于宇宙射线等原因，大气中总有少量气体分子被电离，尽管被电离的气体分子的比例很小，但在强电场的作用下，电子被加速，当加速的电子和中性气体分子碰撞时，使气体分子电离又释放出游离电子，这些电子又被进一步加速，这个过程继续下去将最终导致“雪崩”而产生电晕。

静电过滤

静电过滤器在工业中得到广泛应用。图 10－31 示出了静电过滤的基本过程。要净化的气体或空气从同轴线的内外导体间通过，内导体是很细的导线，内外导体间加上电压后，作为内导体的细导线附近产生很强的电场并导致电晕放电，电晕放电产生的正离子在移向负电极的过程中，跟气体或空气中质点碰撞，并吸附这些质点，最终到达集电极，从而被滤除。

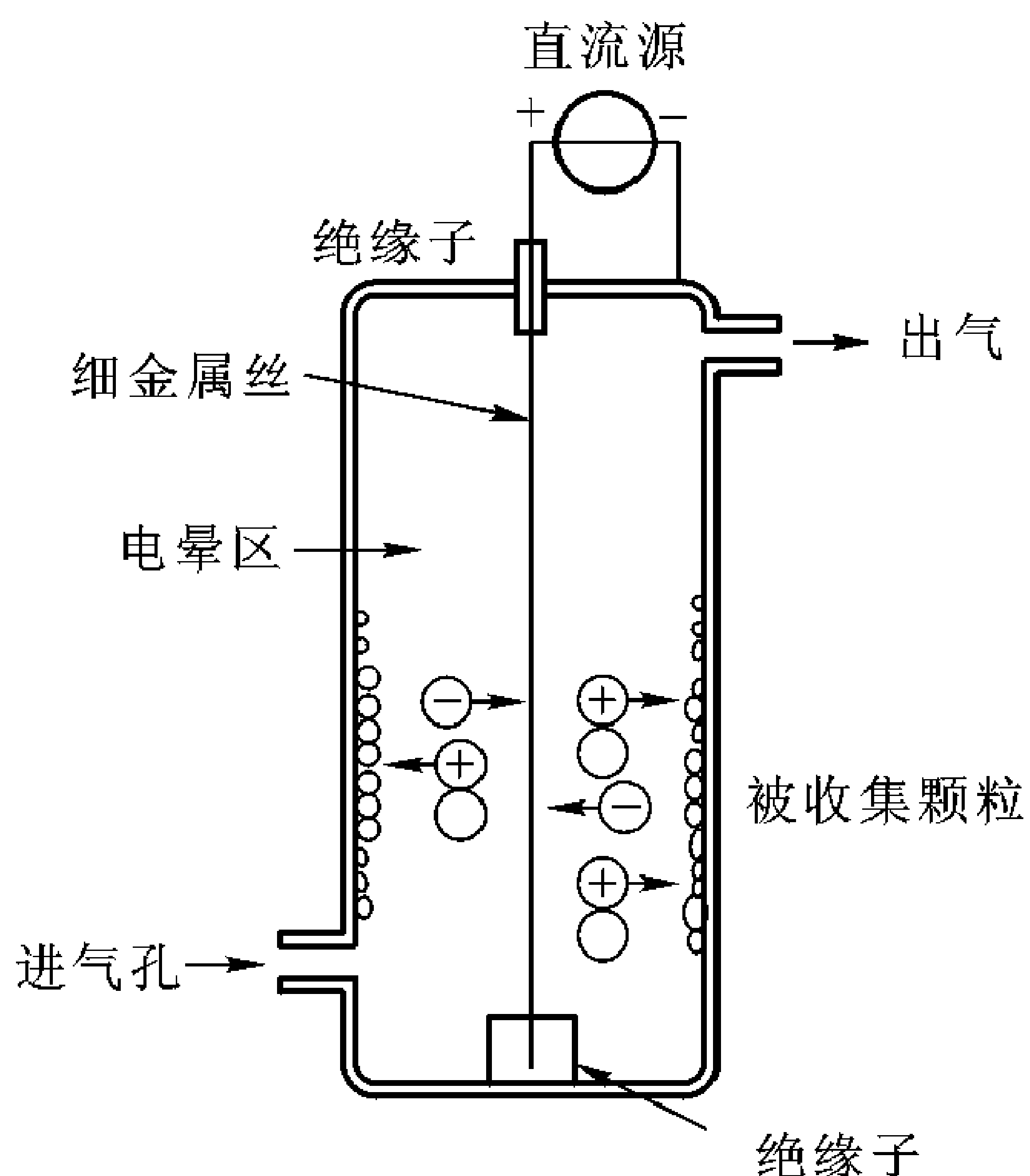


图 10－31 静电过滤

静电喷涂

与静电过滤同样的工作原理，从喷枪口喷出的涂料质点流由于电晕放电而带电，并喷向低电位的靶。由于静电力的作用涂料质点流最终着落在靶上。静电喷涂与常规涂复方法相比，效率从 40%提高到 70%，图 10－32 给出静电喷涂一种可能的结构装置。

静电复印

静电复印是一种利用光导材料的静电特性记录图像的技术，由本世纪 30 年代发明，至 50 年代得到推广应用。静电复印机是现代办公室不可缺少的设备，其工作原理见图 10－33。

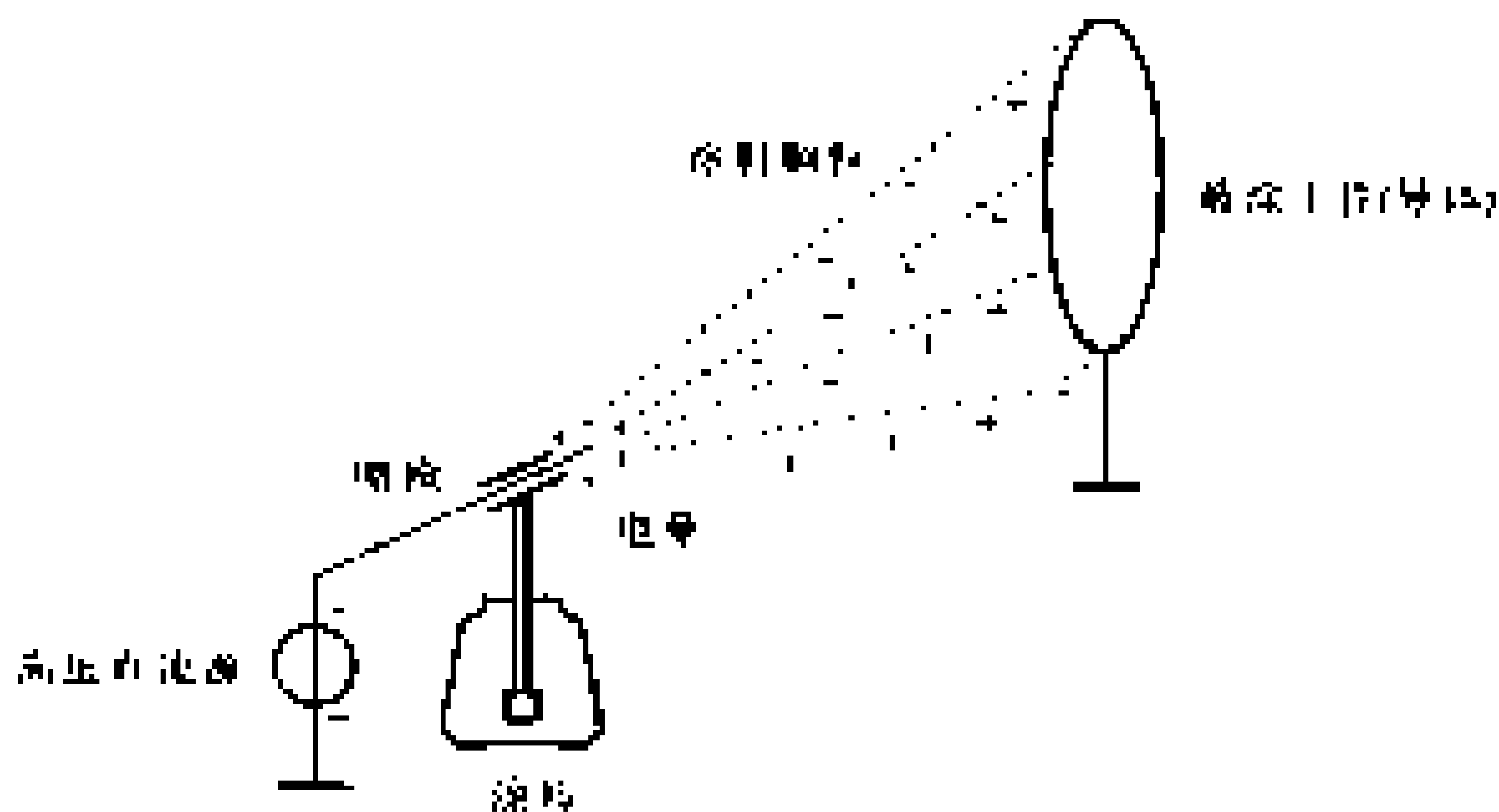


图 10 - 32 静电喷涂原理图

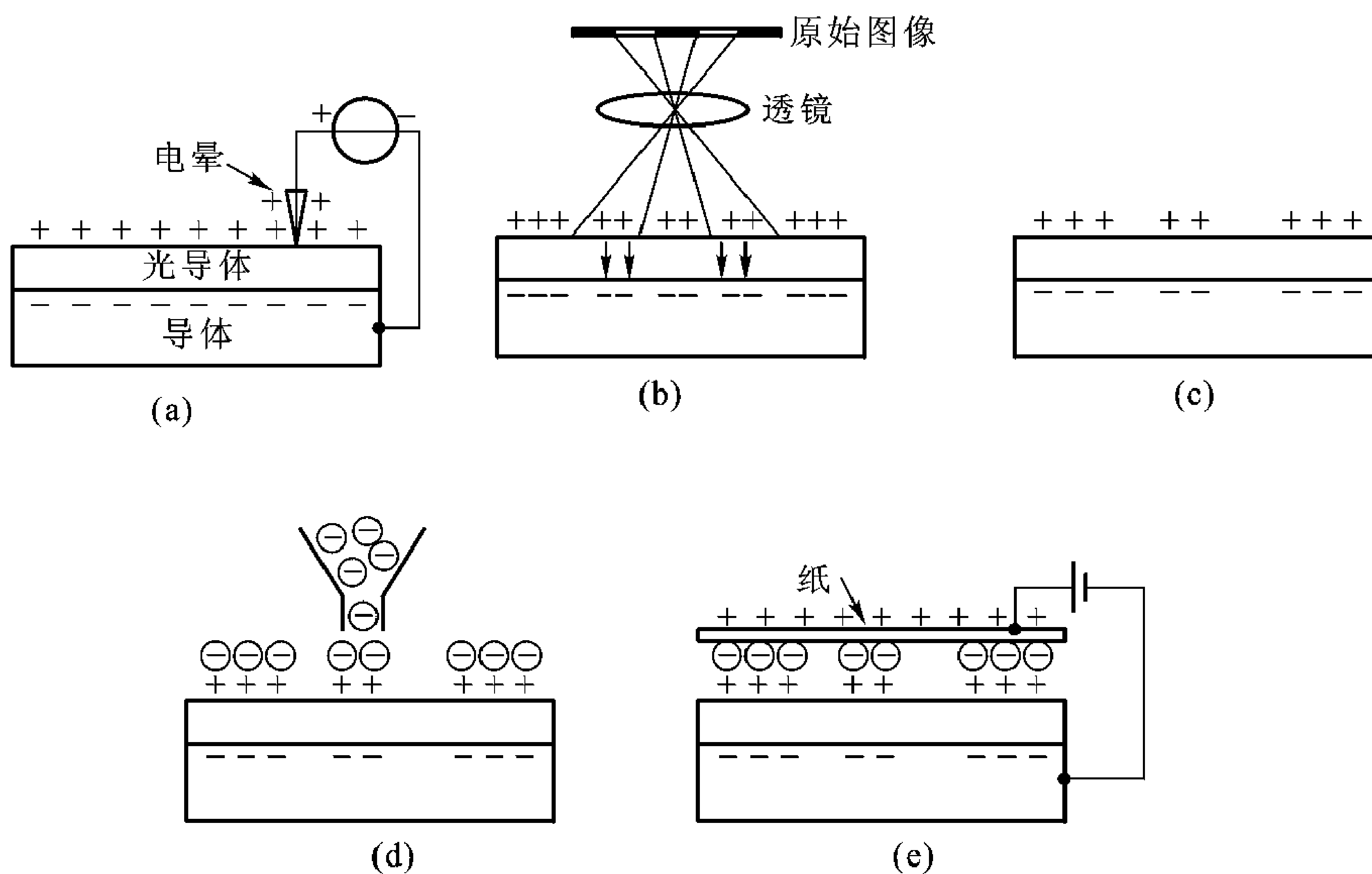


图 10 - 33 静电复印

(a) 光导体带电 (b) 光导鼓曝光 (c) 形成静电像 (d) 碳粉颗粒淀积到荷电的图像上 (e) 碳粉颗粒转移到纸上

先看图 10 - 33 (a)，厚度为 20 ~ 100 μm 的光导材料，如无定形硒已涂复在导体表面。光导材料有一个重要特性，被光照射的亮区变成导体，而没有光照的暗区仍是一个绝缘体。静电复印的第一步是使光电导材料通过电晕放电而带电，这个过程是在暗中进行的，所以符号相反的电荷均匀分布于光导板的两面，正如图 10 - 33 (a)所示。

第二步，在光电导板上成像，曝光的区域成为导体，该区域两表面电荷将以漏电形式被中和，没有曝光的区域仍维持原来的状态[见 10 – 31 (b)]。给定区域以漏电形式中和的电荷正比于该区域的光强，这样就形成一个带电的潜像[如图 10 – 33 (c)]，然后将带负电的碳粉粒子喷到静电潜像表面，如图 10 – 33 (d)，光导板表面电荷越多的区域吸引的碳粉粒也越多，最后将带正电的纸放到靠近图像的表面，碳粉粒子被吸引并粘附到纸上[图 10 – 33 (e)]，经过以上几个步骤在光电导板上的像就转移到纸上。下次复印时先把光导板上的图像清除，再充电。

硅微机械

根据库仑定理，两带电体之间的作用力与两带电体之间距离的平方成反比，即 $F \propto 1/r^2$。因此只有 r 很小时，静电力才起作用。随着微电子工艺的进步，两带电体之间距离可精确控制到微米量级，这时静电力就起作用了。从 20 世纪 80 年代末发展起来的硅微机械正是利用静电力驱动的。所谓硅微机械是以高纯硅作机械构件材料，运用微电子工艺在硅片上制作的各种机械。硅微马达就是用静电力驱动的，它的线度只有头发丝直径那么大，要用显微镜才能观察到它的转动。基于这种微马达，有可能制成直径在厘米量级的机器人。

全光通信中光交换是关键器件，在业已提出的各种光交换方案中，基于硅微机械的光交换器有可能成为最佳候选器件。图 10 – 34 是基于硅微机械的平面结构的二维阵列光交换器。在硅片上用先进的微电子工艺制作出可自由旋转或上下自由运动的反射镜阵列，控制反射镜阵列各反射镜状态，即可实现光交换。由于硅片上制作的微机械质量很小，其响应速度是很快的。



图 10 – 34　基于硅微机械的光交换器

10.5　电场中的介质

第 3 章讨论过物质的本构关系，在介质中 $\boldsymbol{D}$ 跟 $\boldsymbol{E}$ 满足如下关系：

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{10.5.1}$$

ε 称为材料的介电常数。水的介电常数比自由空间介电常数大 80 倍。不过到现在为止，还没有说明为什么水的介电常数比空气的介电常数会大如此之多。将介质材料看成一媒体并用如 ε、μ 等特征参数进行表征，这是从宏观角度对介质材料的描述。

为了说明为什么一些材料的 ε 要高于另外一些材料的 ε，务必要从微观角度研究这些材料。从微观看，水实际上是一个被很多水分子占有的自由空间。同样，空气也可看成是充满了像氧、氮诸多分子的自由空间。对单原子气体，原子可以用带负电的电子云包围带正电荷的核的模型表示[图 10 – 35 (a)]，当电场 $\boldsymbol{E}$ 作用于原子时，负电荷趋向与 $\boldsymbol{E}$ 相反的方向，原子就成为一个静电偶极子[图 10 – 35 (b)]。所以单原子气体在电场作用下等效为一偶极子[图 10 – 35 (c)]。这样产生的偶极子叫感应偶极子，注意在两电荷之间的区域感应偶极子产生的电场与外加的电场方向相反。如果有很多原子，其总的作用效果是使外加电场有所降低。

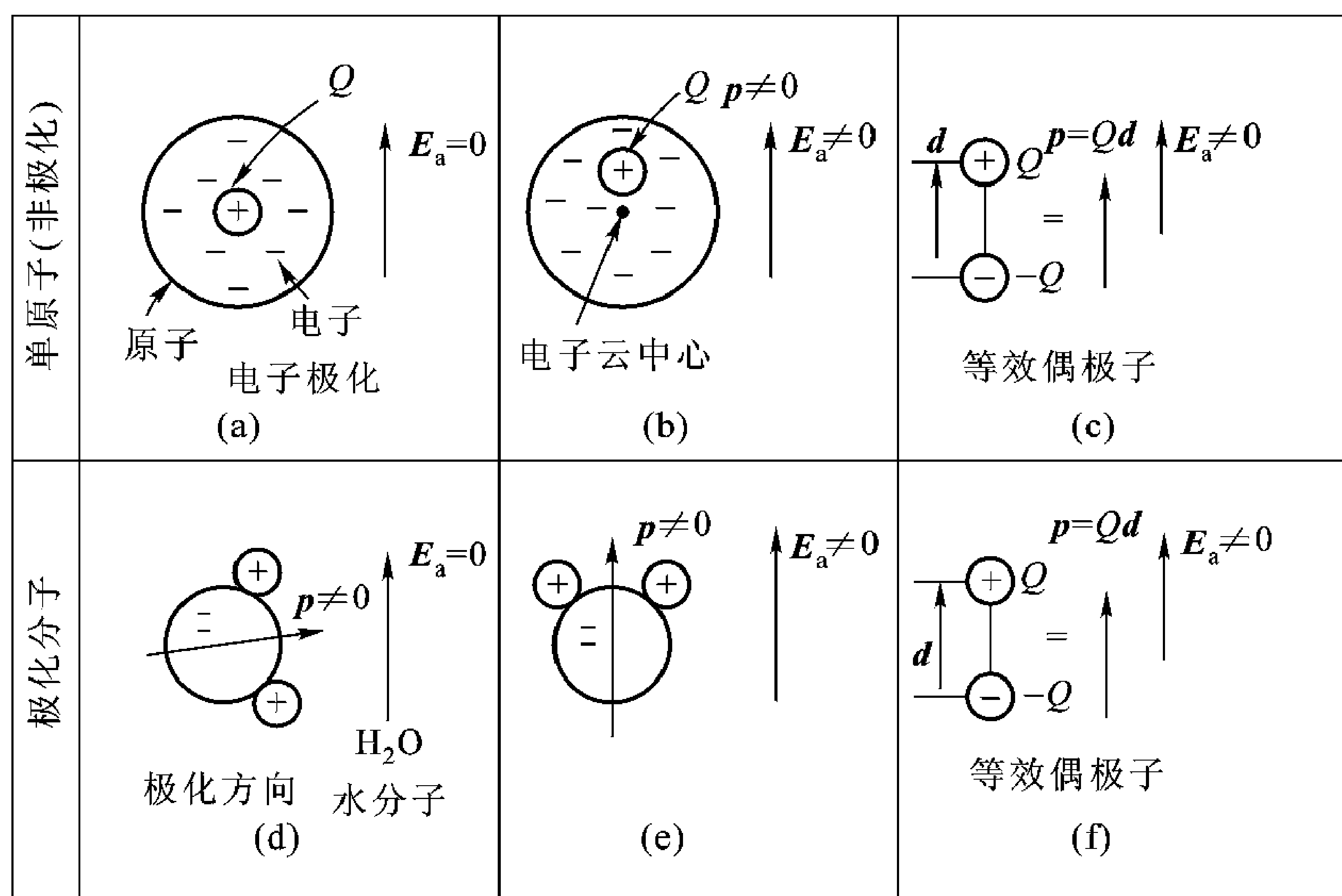


图 10 – 35　电场对原子、分子极化的影响

另一类偶极子称作永久偶极子。例如水分子由两个氢原子和一个氧原子构成[图 10 – 35 (d)]，两个氢原子在氧原子旁边，但并不构成 180°的排列，而是构成 105°夹角的排列，所以氧原子一侧有净的负电荷，氢原子一侧有净的正电荷，产生了一个永久偶极矩，由于这些偶极子的随机取向，净的偶极矩还是为零。但是在外加电场作用下，这些偶极子趋于按电场方向排列起来[图 10 – 35 (e)]，净的偶极矩就不再为零。

总之，从微观看，介质材料是基于分子的偶极子 $\boldsymbol{p}$ 的集合，其偶极矩或如水分子那样永久性的，或如单原子分子那样是被电场感应而产生的。只要电场足够强，所有偶极子 $\boldsymbol{p}$ 都按电场方向有序排列，那么单位体积内总偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 为

$$\boldsymbol{P} = n\boldsymbol{p} = nQ\boldsymbol{d} \tag{10.5.2}$$

式中

$$\boldsymbol{p} = Q\boldsymbol{d}$$

为单个偶极子的电矩。

由图 10－36 可见介质的极化，不管极化均匀还是不均匀，在介质表面产生束缚面电荷 ρ_{sb}，而图 10－37 则说明，由于介质极化的不均匀，在介质体内出现束缚体电荷 ρ_{vb}。束缚电荷束缚在原子、分子尺度范围内，跟不束缚于特定分子、原子的“自由”电子是不同的。下面求束缚面电荷 ρ_{sb}、束缚体电荷 ρ_{vb}与电偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 的关系。

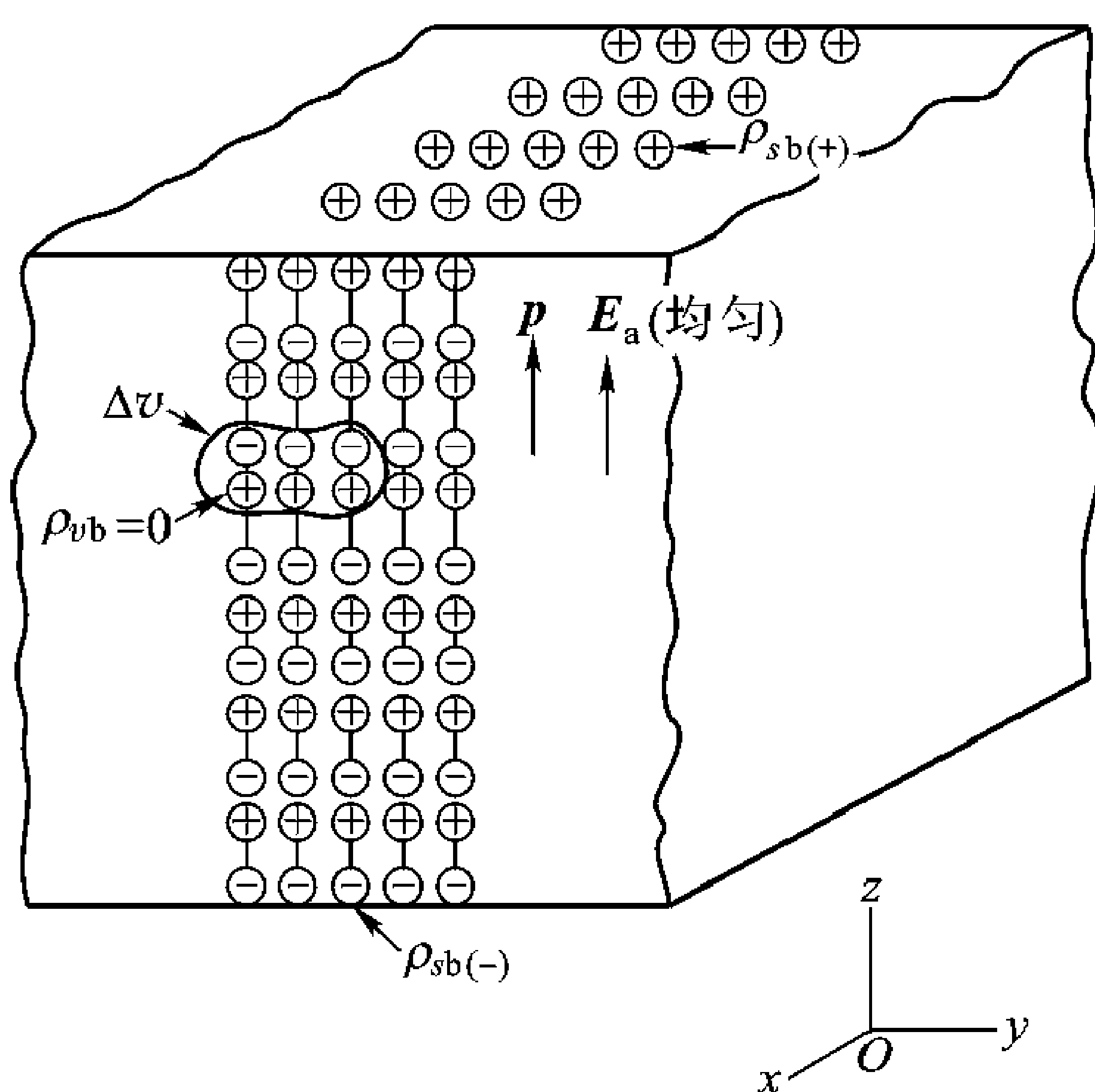


图 10－36　介质极化在介质表面产生束缚面电荷

参看图 10－38，设区域 V 中的介质的电极化强度为 $\boldsymbol{P}$，在 V 中的点 $\boldsymbol{r}'$，取体积元 $\mathrm{d}V'$，该体积元内的电偶极矩为 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V'$，根据式[10.2.7 (b)]，其在 $\boldsymbol{r}$ 点产生的电位为

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{R}_0\mathrm{d}V'}{4\pi\varepsilon_0R^2}$$

区域 V 内诸多极化后的偶极子产生的电位为

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{R}_0\mathrm{d}V'}{R^2} \tag{10.5.3}$$

式中 $R = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，$\boldsymbol{R}_0 = \dfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$，将 $\nabla'\dfrac{1}{R} = \dfrac{\boldsymbol{R}_0}{R^2}$代入上式，得

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')\cdot\nabla'\frac{1}{R}\mathrm{d}V' \tag{10.5.4}$$

利用矢量恒等式 $\nabla\cdot(f\boldsymbol{A}) = f\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla f$，上式可整理为

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V\nabla'\cdot\left(\frac{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}\right)\mathrm{d}V+\int_V\frac{-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V'\right]$$

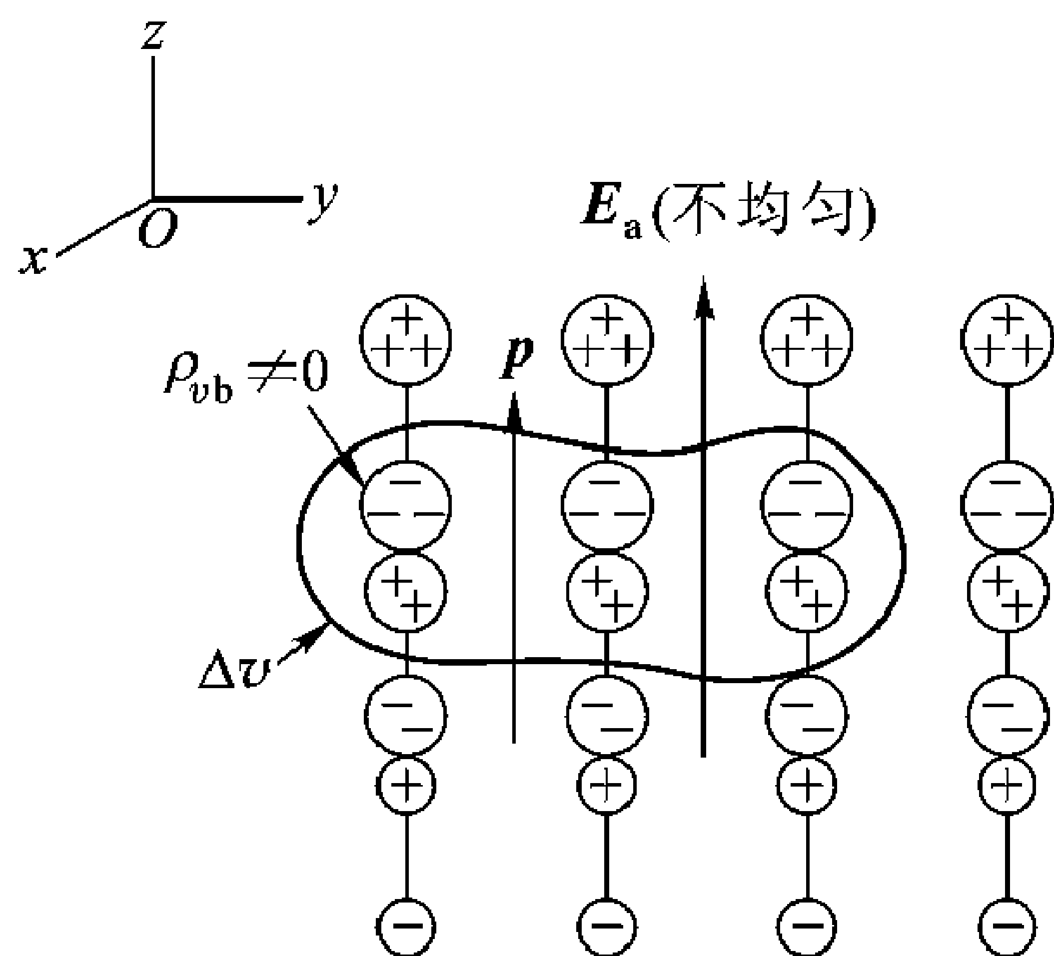


图 10－37　极化不均匀在介质体内出现束缚体电荷

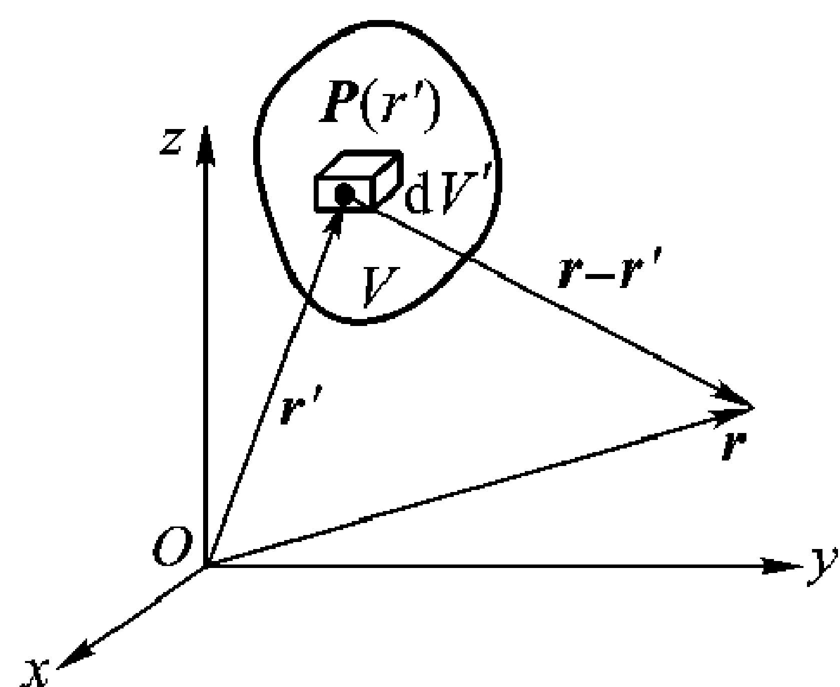


图 10－38　束缚电荷产生的电位

对上式右边第一项用散度定理，可得到

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}_0}{R}\mathrm{d}S'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{-\nabla'\cdot\boldsymbol{P}(r')}{R}\mathrm{d}V' \tag{10.5.5}$$

$\boldsymbol{n}_0$ 为包围区域 V 界面 S 的法向单位矢量。上式也可写为

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\rho_{sb}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}S'+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho_{vb}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}V' \tag{10.5.6}$$

式中

$$\rho_{vb}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{10.5.7}$$

$$\rho_{sb}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}_0 \tag{10.5.8}$$

这就是我们要求的束缚体电荷密度 ρ_{vb}与束缚面电荷密度 ρ_{sb}与电偶极矩 $\boldsymbol{P}$ 的关系，ρ_{vb}、ρ_{sb}也可分别叫作极化电荷体密度和面密度。可以看出，式(10.5.5)为区域 V 中电荷密度ρ_{vb}及在区域 V 的表面上电荷面密度ρ_{sb}的电荷分布产生的电位。这说明介质极化使介质中及其表面上出现了(净)束缚电荷，其密度分别满足式(10.5.7)和式(10.5.8)。极化后的介质产生的电场就是这些束缚电荷产生的电场。

在介质中取一体积 V，在介质未发生极化时，呈电中性，区域 V 中的电荷为零。但在发生极化时，该区域中可能出现束缚电荷，由式(10.5.7)，区域 V 中的束缚电荷 q_v 为

$$q_v=\int_V\rho_{vb}\mathrm{d}V=-\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{P}\mathrm{d}V \tag{10.5.9}$$

利用高斯定理，将体积分化为面积分后，可得到介质中封闭面 S 所包围的区域 V 中的束缚电荷 q_v 为

$$q_v=-\oint_S\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{10.5.10}$$

设介质中单位体积中的分子数为 N，发生极化时，取每个分子的电偶极矩同为 $q\boldsymbol{d}$，则极化强度为 $\boldsymbol{P}=Nq\boldsymbol{d}$。代入式(10.5.10)得

$$q_v=-\oint_S Nq\boldsymbol{d}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-Nq\oint_S\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S \tag{10.5.11}$$

可以看出，上式右边的面积分为区域 V 的表面附近厚度为 $\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{n}_0$ 的薄层的体积，该体积再乘以 $-qN$ 就是表面薄层中的总负电量。在介质极化时，由于分子中的负电荷受电场作用位移为 $\boldsymbol{d}$，这就使表面薄层中的全部负电荷集中到表面上，那么上式就是在极化过程中从区域 V 中出来的负电荷。也就是说，区域 V 中的束缚电荷是极化时负电荷从其表面穿出而留在该体积中的净电荷。

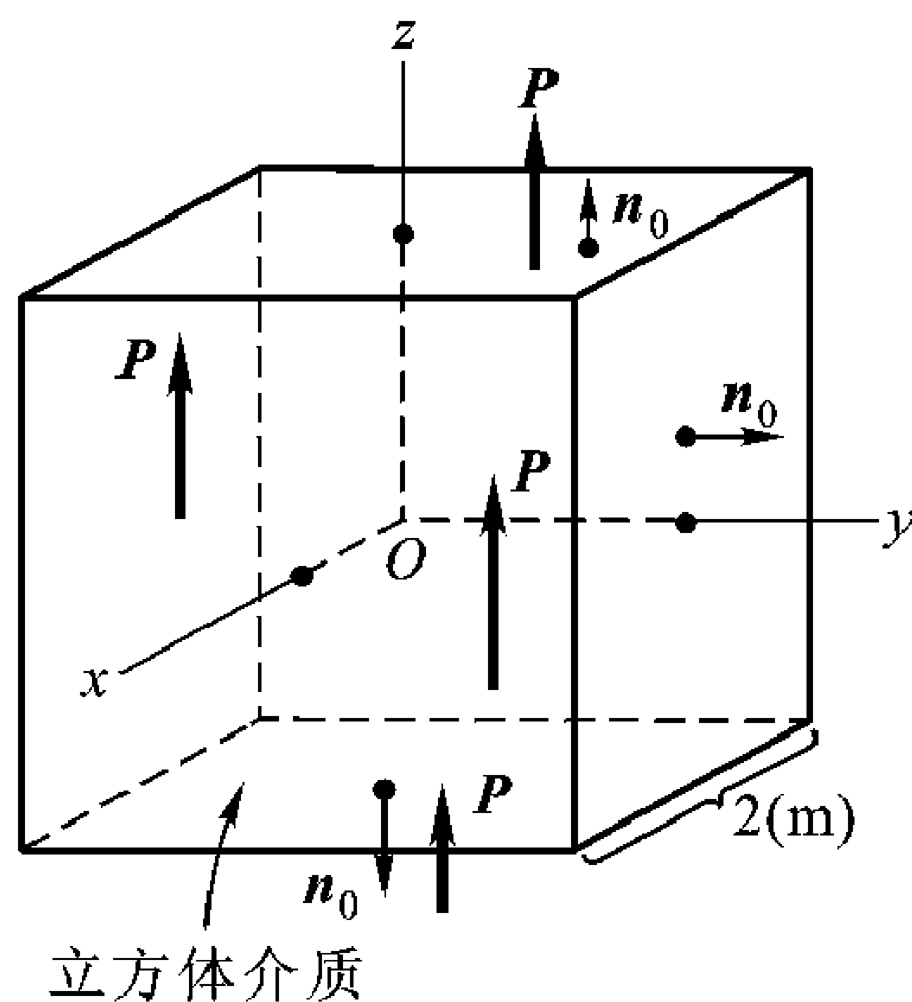


图 10－39　例 10－21 图

例 10－21　如图 10－39 所示立方体介质，已知 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{z}_0 10^{-2}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$，求立方体介质的 $\rho_{s\mathrm{b}}$，$\rho_{v\mathrm{b}}$。

解：上底

$$\rho_{s\mathrm{b}}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{z}_0 10^{-2}\cdot\boldsymbol{z}_0=10^{-2}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$$

下底

$$\rho_{s\mathrm{b}}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{z}_0 10^{-2}\cdot(-\boldsymbol{z}_0)=-10^{-2}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$$

侧面

$$\rho_{s\mathrm{b}}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}_0=0$$

$$\rho_{v\mathrm{b}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\left(\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_y}{\partial y}+\frac{\partial p_z}{\partial z}\right)=0$$

$$\begin{aligned}Q_{s\mathrm{b}}&=\oint_S\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S\text{侧面}}\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{\text{上底}}\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{\text{下底}}\boldsymbol{P}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\int_{S\text{侧面}}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S+\int_{S\text{上底}}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S+\int_{S\text{下底}}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S\\&=\int_{\text{上底}}10^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\text{下底}}10^{-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\end{aligned}$$

因为

$$\rho_{v\mathrm{b}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=0,\quad Q_{v\mathrm{b}}=0$$

所以

$$Q_{s\mathrm{b}}+Q_{v\mathrm{b}}=0$$

考虑介质极化感应的束缚电荷后，高斯定理为

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_v+\rho_{v\mathrm{b}} \tag{10.5.12}$$

因为 $\rho_{v\mathrm{b}}=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$，故得

$$\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_v-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$$

或

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} + \nabla \cdot \boldsymbol{P} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_v$$

定义

$$\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} \tag{10.5.13}$$

就得到介质中高斯定理

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_v$$

在线性介质中，电矩 $\boldsymbol{P}$ 与外加电场成正比，即

$$\boldsymbol{P} = x_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

代入式(10.5.13)就得到

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \varepsilon_0 x_e \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 (1 + x_e) \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E}$$

$$\varepsilon_r = 1 + x_e \tag{10.5.14}$$

ε_r 就是介质相对介电系数。

例 10－22　相对介电系数为 ε_r 的介质中一有强度为 $\boldsymbol{E}$ 的均匀电场，介质内有一球形空腔，见图10－40，求球面上束缚电荷及球心电场 E'。

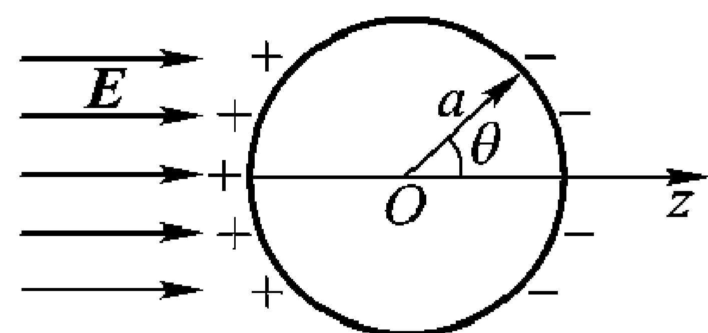


图 10－40　均匀介质中有一球形空腔

解：

$$\boldsymbol{P} = x_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \boldsymbol{E}$$

$$\rho_{sb} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}_0 = -P\cos\theta$$

$\boldsymbol{n}_0$ 指向球心,局部面电荷 $\rho_{sb}\mathrm{d}S$ 在球心处产生的电场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}' = \frac{\rho_{sb}\mathrm{d}s}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\boldsymbol{r}_0$$

由于结构对称性，$\boldsymbol{E}$ 只有 z 分量，所以

$$E' = \int_S -\mathrm{d}E'\cos\theta = \int_S \frac{\rho_{sb} a^2 \sin\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon a^2}\cos\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \frac{P\cos^2\theta \sin\theta a^2}{4\pi\varepsilon a^2}\mathrm{d}\theta = \frac{\varepsilon_r - 1}{3}E$$

故

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\varepsilon_r - 1}{3}\boldsymbol{E}$$

10.6　功和能及电容

10.6.1　功和能

带电量为 q 的质点在静电场 $\boldsymbol{E}$ 作用下受的力为

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$$

将质点从 A 移到 B 要作的功是

$$W = -\int_A^B q\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{10.6.1}$$

式(10.6.1)前负号要略作说明。如果质点移动方向与力方向相反，$\boldsymbol{E}$ 跟 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 点积是负的，就得到一个正的功 W，所以在这个方向移动电荷，需要从外部注入能量。反之，如果 $\boldsymbol{E}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在同一方向，$\boldsymbol{E}$ 与 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 点积为正，计算得到的功是负的，表示电荷对外部作了功，即外部系统得到能量。

式(10.6.1)也可写成

$$W = -q\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = q\,(\Phi_{\mathrm{B}} - \Phi_{\mathrm{A}}) \tag{10.6.2}$$

换句话说，将电荷从低电位 A 移到高电位 B，外部要对系统作功，即需要从外部对系统注入能量。这种情况类似于重力场中将一重物从地面搬到高处，外部需要对此作功一样。

重力场中把重物从地面搬到高处所作功并没有白做而是变成了重物的势能，因为当我们把手放开，重物将落下，其得到的动能等于将它搬到高处所作的功。同样的原理，将一个电荷从低电位移向高电位，该电荷得到的储能并等于外部力所作的功。而当这个电荷回到原来的低电位时将得到动能，其动能等于它释放的储能。

注意计算功的公式(10.6.1)与从电场计算静电位的公式一样，跟电荷移动的路径无关，仅与端点的电位有关，这是式(10.2.25)的直接结果。式(10.2.25)只对静电场成立。所以无需多说，上面的结论对于非静电场是不成立的。

荷电 q 库仑的质点从点 A（电位为 Φ_{A}）移到点 B（电位为 Φ_{B}），假定荷电质点在 A 点的初速为 v_0，那么 B 点速度 v 满足

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + q\,(\Phi_{\mathrm{A}} - \Phi_{\mathrm{B}}) \tag{10.6.3}$$

式(10.6.3)是从能量守恒关系得到的。从式(10.6.3)求荷电质点在 B 点的速度 v 不用知道作用于荷电质点力的具体知识。在上一节，我们先计算洛伦兹力，然后由牛顿定律求得荷电质点运动轨迹。关于式(10.6.3)的讨论告诉我们，如果已知电位函数，而不是电场 $\boldsymbol{E}$，并只要求电子运动速度，那么用式(10.6.3)就够了。

例 10 – 23　荷电 q 的质点，初始状态处于静止，在电场 $\boldsymbol{E}$ 的作用下，将被加速并沿电场 $\boldsymbol{E}$ 的方向运动。当它从 B 点运动到 A 点，求荷电质点的速度，V 为 A、B 两点间电位差。

解：荷电质点在 A 点动能等于它在 A 点的位能 qV，所以

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV$$

$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \qquad (10.6.4)$$

对于电子，$q = -1.6\times10^{-19}$ C，$m = 9.1\times10^{-31}$ kg，如果电位差 $V = -100$ V，其速度

$$v = 5.93\times10^6 \text{ m/s}$$

当电子速度接近光速时，必须计及相对论效应，电子的质量与 v 有关，将修正为 $m(1-v^2/c^2)^{-1/2}$，此处 c 是光速。

电子伏特

在国际单位制中，能量用焦耳作单位，在原子物理中这个单位太大，常用电子伏特作能量单位。它等于电子经过 1 V 电位差所得到的能量。

从式(10.6.2)，可知

$$1 \text{ eV} = -1.6\times10^{-19}\times(-1)\text{J} = 1.6\times10^{-19} \text{ J}$$

因此 1 Bev (10^9 eV)的能量为 1.6×10^{-10} J。

例 10－24 求氢原子中电子的位能、动能以及总能，其轨道半径为 r。

解： 氢原子核产生的电位在无穷远处为零，在 r 处电位为 $q/4\pi\varepsilon r$，式中 $q = 1.6\times10^{-19}$ C，电子的位能(PE)为

$$PE = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon r}$$

负的位能表示将电子从无穷远移到半径 r 处要作负功，且 r 越小，电子越稳定，从式(10.6.1)可以计算在电场 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{r}_0 q/4\pi\varepsilon r^2$ 作用下将电子从无穷远移到 r 处所作功

$$W = -\int_{\infty}^{r} \frac{(-q)\,q}{4\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon r}$$

它就等于位能。电子在轨道半径 r 处所受力为 $-q^2/4\pi\varepsilon r^2$，这个力被离心力 $(mv^2)/r$ 平衡

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon r^2}$$

所以动能(KE)

$$KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon r}$$

这是位能的一半，所以氢原子的总能量为动能与位能之和

$$PE + KE = -\left(\frac{1}{2}\right)(q^2/4\pi\varepsilon r)$$

在最小轨道半径 $r=0.52$ Å 处，为 13.8 eV。

阴极射线管

阴极射线管通常称为 CRT，广泛用于显示器中，图 10－41 给出阴极射线管基本工作原理。电子注从阴极发射出来，然后被阳极加速，并从开孔的阳极通过，进入一对正交放置的平板电极，平板电极上所加的电压决定了电子轨迹的偏转，并最终决定电子注打到荧光屏并导致荧光屏上出现一个光点的位置。快速改变电极板上的电压 V_x、V_y，在荧光屏上就出现光点运动的图像。利用式(10.6.4)，可计算电子注通过阳极时的速度

$$v_z=\sqrt{\frac{2q_e V_A}{m_e}}$$

式中 $-q_e$，m_e 分别为电子电荷与质量，当阳极电压 $V_A=1$ kV，

$$v_z=1.87\times10^7\ \mathrm{m/s}$$

电子以 v_z 进入偏转板，并受到两个静电力 f_x，f_y 的作用，有

$$f_x=m_e\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=q_e\frac{V_x}{d_1}$$

$$f_y=m_e\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=q_e\frac{V_y}{d_2}$$

$$z=v_z t$$

式中 x，y，z 为电子在 t 时刻的坐标，($t=0$，电子刚进入偏转系统) d_1，d_2 分别为 x 方向偏转板与 y 方向偏转板的间距。如果偏转板长为 l，则电子离开偏转板的时刻

$$t_0=\frac{l}{v_z}$$

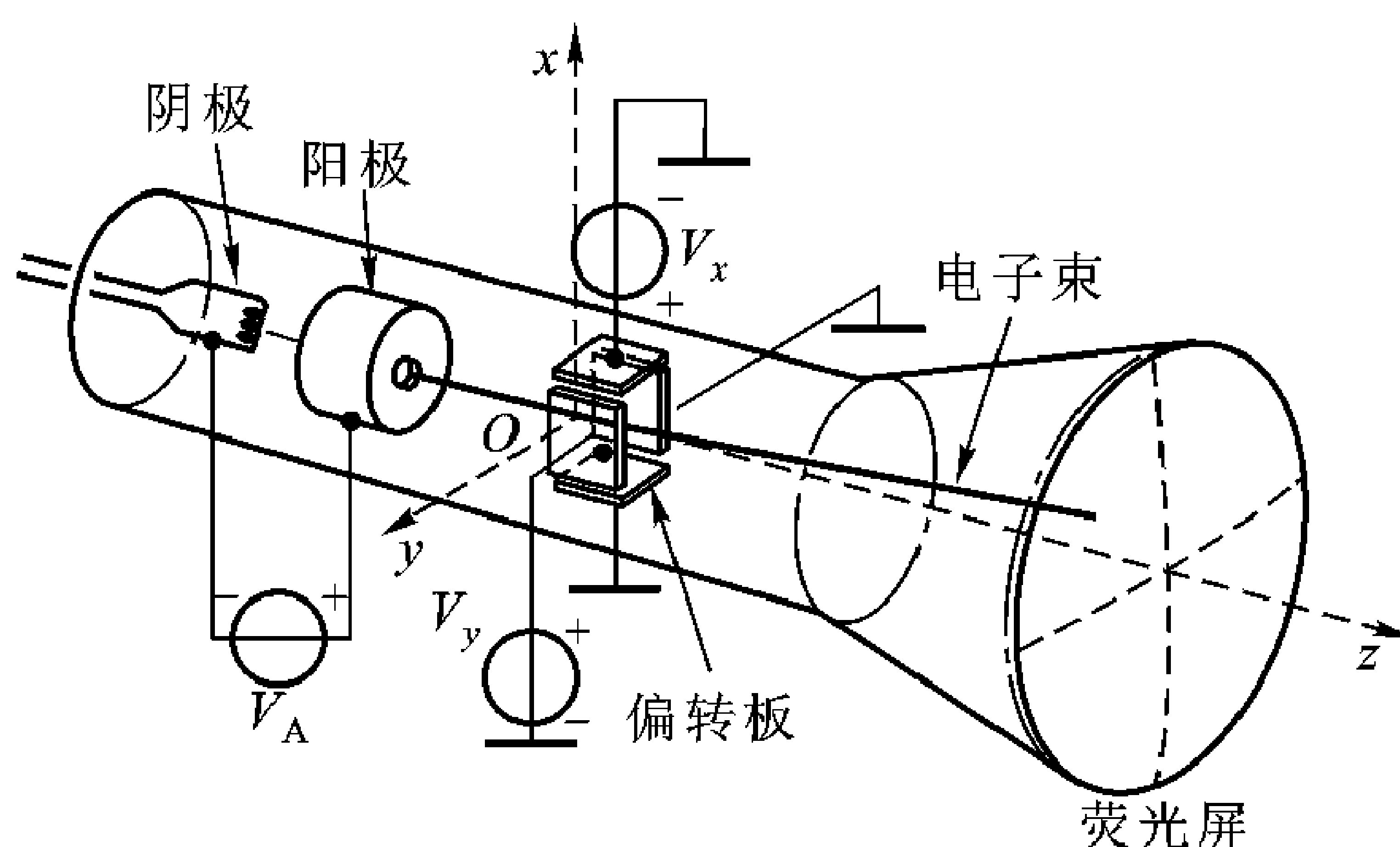


图 10－41 阴极射线管

时间常数 t_0 很重要，它决定偏转电压 V_x、V_y 变化导致屏上光点从一个位置到另一位置变化速率的上限。本例中，设 $l=3$ cm，所以 $t_0=1.6\times10^{-9}$ s。t_0 时刻电子从偏转板出口飞出的速度与位置可表示为

$$v_x=\frac{q_e V_x}{m_e d_1}t_0$$

$$v_y=\frac{q_e V_y}{m_e d_2}t_0$$

$$v_z=v_z$$

$$x=\frac{q_e V_x}{2m_e d_1}t_0^2$$

$$y=\frac{q_e V_y}{2m_e d_2}t_0^2$$

$$z=v_z t_0$$

注意，电子飞出偏转板后以恒速运动直到打上荧光屏。假定屏与偏转板之间距离为 15 cm，让我们计算电子打上屏的位置。取 $V_x=V_y=100$ V，$d_1=d_2=1$ cm，在 $t_0=1.6\times10^{-9}$ s（电子离开偏转板的时刻）

$$v_{x0}=v_{y0}=2.81\times10^6 \text{ m/s}$$

$$x_0=y_0=0.22 \text{ cm}$$

t_0 以后，有

$$x=x_0+v_{x0}(t-t_0)$$

$$y=y_0+v_{y0}(t-t_0)$$

$$z=z_0+v_z(t-t_0)$$

设 t_1 为电子打上荧光屏的时刻，此时 $x=x_1$，$y=y_1$，且

$$t_1=t_0+\frac{0.15}{v_z}=t_0+8.02\times10^{-9} \text{ s}$$

$$x_1=y_1=2.47 \text{ cm}$$

离子推进器

通常情况下火箭发动机利用燃料向后喷射的反作用力，使火箭得到前进推力，其推力

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

式中 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ 为向后喷出的燃料质量的速率，v 是喷出燃料的速度，一般是常数。对于化学燃料，喷出速度可以超过音速，约 10^3 m/s，要达到更高的速度就很困难。

离子推进器用离子化的质点流作推进剂。质点运动速度被静电场加速到很高的速度。离子推进器可以用较少的推进剂达到与化学燃料推进器同样推力的效果。

图 10-42 (a)给出离子推进器的基本工作原理。推进剂先进入离化室，在离化室中或用加热的方法或用电子轰击的方法使推进剂电离，正离子被加速并经过栅网(其电位为 V_a)喷射出去，而电子为阳极俘获。正离子喷出的同时，还必须有部分电子与正离子以同样的速度喷出，否则火箭将充电到很高的负电位，将喷出的正离子流吸引回推进器。电子由作为阴极的热丝发射出来。正离子的速度为

$$v_i = \left(\frac{2q}{m_i} V_a\right)^{1/2}$$

式中 q 是正离子带的电荷，m_i 是离子质量。电子速度 v_e 为

$$v_e = \left(\frac{2q_e}{m_e} \Delta V_a\right)^{1/2}$$

其中 $q_e = 1.6 \times 10^{-19}$ C，$m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg，为了中和喷出的离子流，v_e 必须等于 v_i，所以 V_a 与 ΔV_a 必须满足以下关系

$$\frac{V_a}{m_i} = \frac{\Delta V_a}{m_e}$$

注意，我们假定离子只带单个正电荷，因为 $m_i >> m_e$，所以 $V_a >> \Delta V_a$。

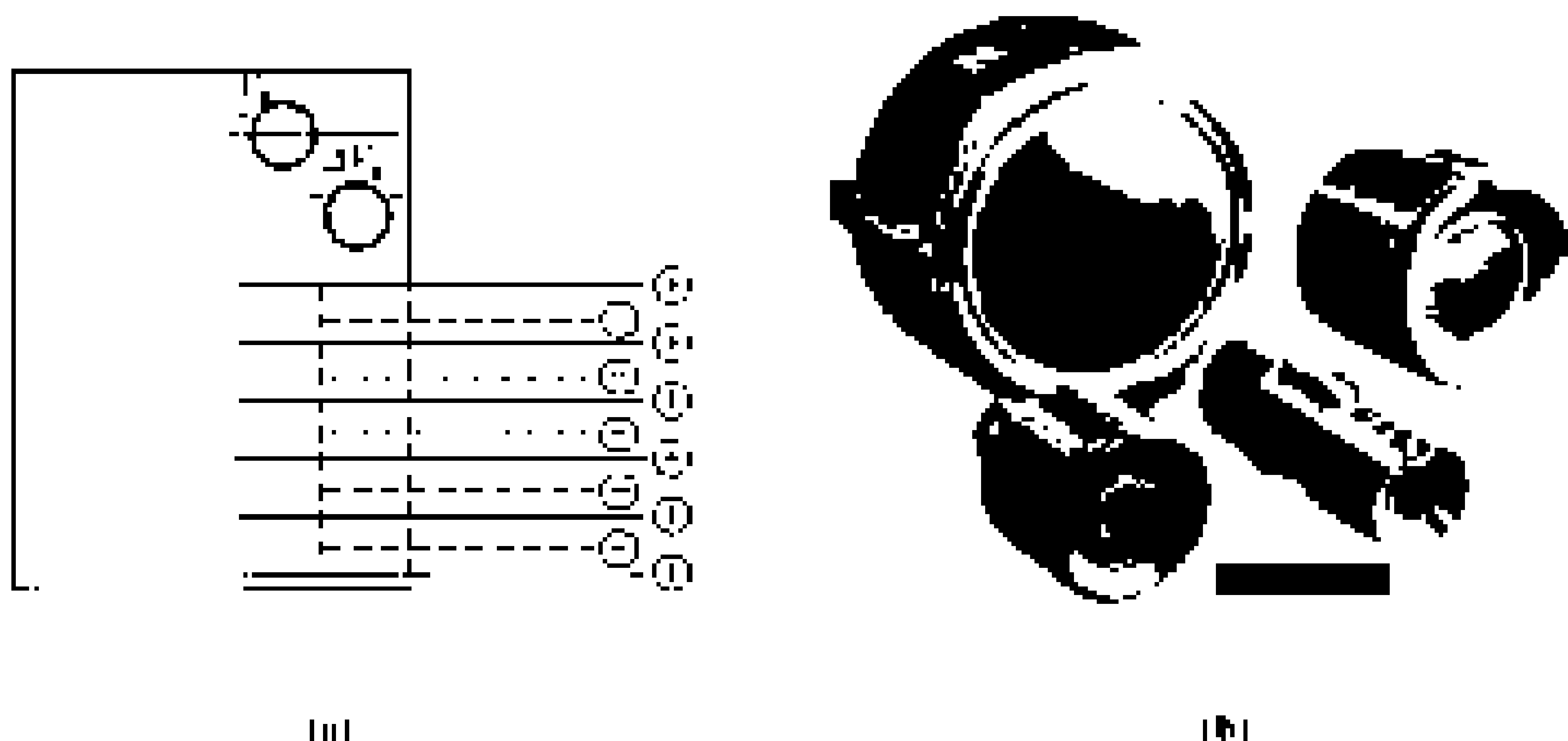


图 10-42　离子推进器

(a) 离子推进器工作原理　(b) 星载离子推进器实例

为了估计喷出的离子和电子混合物的速度，设

$$V_a = 2\ 500\ \text{V}$$

$m_i = 133 \times 1.67 \times 10^{-27}$ kg（相当于铯原子的质量）

$$q = 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

可得

$$v_i = 0.6 \times 10^5\ \mathrm{m/s}$$

化学燃料推进器喷出的粒子流不可能达到如此高的速度。

为估计离子推进器推力的大小，假定离子流为 0.1 A，进一步假定每一个铯离子带一个正电荷，现在可估计产生 0.1 A 离子流单位体积内的离子数

$$I = n\, v_i q A$$

式中 A 是离子流截面，喷出离子流的速率是

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = n\, v_i m_i A$$

所以

$$F = v_i \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{v_i m_i I}{q}$$

用上面给出的数据，可得

$$F = 8.3 \times 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

这是一个很小的数。离子推进器用于同步卫星中以调整它的位置和天线指向。在深空探测中，离子推进器特别有用，因为离子推进器较之化学燃料推进器有更大的推力燃料质量比。图 10－42（b）是卫星应用离子推进器的实例。

两电荷系统的贮能

假定电量为 q_1 的点电荷放在坐标原点，电量为 q_2 的点电荷从无穷远移到距 $q_1 r$ 米处，设 q_1、q_2 同号，q_1、q_2 间作用力为斥力，可表示为

$$\boldsymbol{f}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{r}_0$$

将 q_2 从无穷远移到 r 处克服斥力所作功为

$$W = -\int_{\infty}^{r} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r}$$

这个功变为贮存于两电荷系统的能量，设 U_E 为该系统贮藏能，则

$$U_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r}$$

N 个点电荷系统的储能

接下去考虑由 N 个点电荷构成的系统的贮能，也就是计算将 N 个点电荷从无穷远移到系统中所处位置所作的功，因为移动 N 个点电荷所作的功的总

和就等于系统贮藏的电场能。先将 q_1 放在系统中所处位置，所有其他电荷处于无穷远，此时系统中没有任何电场贮能。

现在将点电荷 q_2 由无穷远移到系统中，设 r_{12}为点电荷 q_1 与 q_2 间距离。移动 q_2 所作的功为

$$W_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r_{12}} \tag{10.6.5}$$

再将 q_3 从无穷远移到系统中，此时必须克服源于 q_1、q_2 的洛伦兹力而作功。设 Φ_{12}为 q_1、q_2 建立的电位，则

$$\Phi_{12} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon r_2}$$

式中 r_1、r_2 为到 q_1、q_2 的距离。按式(10.6.2)将 q_3 放到 q_1、q_2 产生的场中，需要作的功是 $\Phi_{12}q_3$。所以将 q_1、q_2、q_3 放到系统中，所作功的总和是

$$W_{123} = \left(\frac{q_1 q_3}{4\pi\varepsilon r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\varepsilon r_{23}}\right) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r_{12}} \tag{10.6.6}$$

上式可写成

$$W_{123} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{3}\sum_{n=1}^{3}\frac{q_m q_n}{4\pi\varepsilon r_{mn}} \tag{10.6.7}$$

第二个求和中 m 从 1 到 3，但 $n = m$ 除外，系数为 1/2 是因为式(10.6.7)中共 6 项，式(10.6.7)中每一项计算了两次。

依此类推，对于 N 个点电荷

$$W = U_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq n}}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_m q_n}{4\pi\varepsilon r_{mn}} \tag{10.6.8}$$

电荷连续分布系统中电场贮能

设电荷密度为 ρ_v (C/m^3)，将电荷所在区域分成无限个小体积元 ΔV。每一个小体积元 ΔV 带电量 $\rho_v \Delta V$，当 $\Delta V \to 0$ 时，可作点电荷系统处理，因而可用式(10.6.8)计算系统电场能。

仔细分析式(10.6.8)，第一个求和实际上就是除第 n 个电荷外，其他 $N-1$ 个电荷产生的电位，所以第一个求和可用电荷密度分布 ρ_v 产生的电位 Φ 代替

$$U_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Phi q_n \tag{10.6.9}$$

因为 q_n 是无限小，Φ 中是否包括在 q_n 产生的电位并不重要。式(10.6.9)的求和又可用积分代替，如此

$$U_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}\int_v \Phi \rho_v \mathrm{d}V \tag{10.6.10}$$

积分遍及整个包含电荷的区域，因为$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_v$，所以上式又可写成

$$U_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}\int_{\text{全空间}} \Phi \nabla \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}V \tag{10.6.11}$$

为方便数学分析，上式积分遍及整个空间，因为产生电场的源——电荷以外的区域，$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$，利用下面的矢量恒等式

$$\nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{D}) = \nabla \Phi \cdot \boldsymbol{D} + \Phi \nabla \cdot \boldsymbol{D} \tag{10.6.12}$$

式(10.6.11)成为

$$U_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}\int_{\text{全空间}} \nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{D}) \mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_{\text{全空间}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}V \tag{10.6.13}$$

得出上式时利用关系 $\boldsymbol{E} = -\nabla \Phi$。利用散度定理式(1.6.32)，第一个体积分转变为面积分

$$\frac{1}{2}\int_{\text{全空间}} \nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{D}) \mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_{\text{全空间}} \Phi \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{10.6.14}$$

从无穷远处观察，有限空间的电荷分布相当于一个点电荷，因此

$$\Phi \to \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r} \qquad (\text{当 } r \to \infty \text{ 时})$$

$$D_r \to \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad (\text{当 } r \to \infty \text{ 时})$$

Q 是有限体积中总电荷。

所以当 $r \to \infty$ 时，乘积 $\Phi \boldsymbol{D}$ 按 $1/r^3$ 减小，但积分表面按 r^2 增加，不足以补偿被积函数按 $1/r^3$ 减小的速度，所以式(10.6.14)中积分为零。注意到这一点，式(10.6.13)中积分的第一项可略去，只保留第2项，即

$$U_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}\int_{\text{全空间}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}V = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\text{全空间}} (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}) \mathrm{d}V \tag{10.6.15}$$

这里我们应用了 $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$ 关系。

例 10－25 一个速度为10^5 m/s的电子对准很远处另一处于静止状态的电子运动，问该运动电子离静止电子多少距离时折回并离开静止电子。

解： 两个电子越靠近，储能也越大。但两电子间的斥力将阻止两电子靠近，使运动电子减速，其减小的动能转换为两电子系统的电场贮能，当运动电子动能全部转化为两电子系统电场贮能时，运动电子速度减小为零，并在电子斥力作用下，沿原来路径但方向相反的方向运动。设使电子运动速度减小到零这一点运动电子与静止电子之间距离为 r_0，则按式(10.6.5)有

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon r_0} \tag{10.6.16}$$

将 $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg，$v_0 = 10^5$ m/s，$q_1 = q_2 = -1.6 \times 10^{-19}$ C，$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times$

10^{-9} F/m，代入得到 $r_0 = 5.1 \times 10^{-8}$ m。

例 10－26 平行板电容器充电到100 V，两板间距为 1 cm，极板面积为 100 cm^2，媒质是空气，求电容器中总的电场储能。

解： 可用式(10.6.15)计算电场储能，电容器极板间电场为

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = 10^4 \text{ V/m}$$

$$U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\text{平行板空间}} (10^8)\, dV = 4.42 \times 10^{-8} \text{ J}$$

10.6.2 电容

前面我们已证明完纯导体的电位是常数，两个孤立的完纯导体，其常数电位可以不同，因此存在一电位差 $V = \Phi_A - \Phi_B$，两导体间有电位差意味着两导体间有电场，如图 10－43，所有电力线与导体表面垂直，因为导体表面边界条件要求切向电场等于零。假定两导体所带电荷量相等，但符号相反，每一导体带电量均为 Q，两导体构成的电容定义为

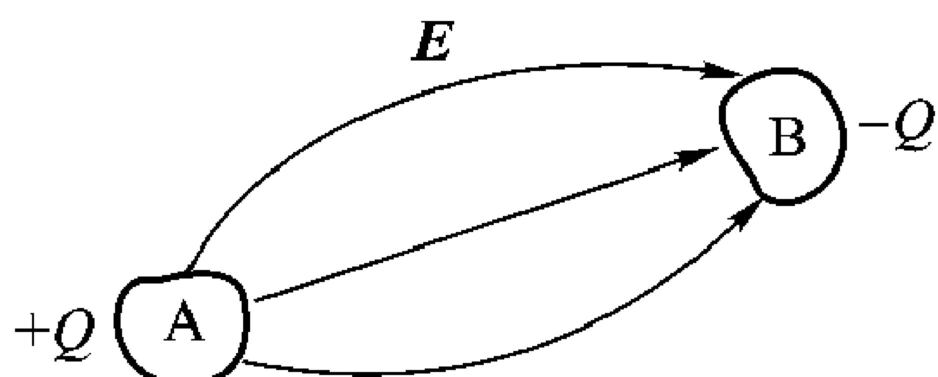


图 10－43 带 $+Q$、$-Q$ 两导体构成一个电容器

$$C = Q/V \tag{10.6.17}$$

因为电压 V 正比于电量 Q（麦克斯韦方程是关于源的线性方程），所以式(10.6.17)定义的电容是常量，由两导体的几何结构决定。

平行板电容器

面积为 A 被间距 a 分开的两平行导电板构成的电容叫做平行板电容器（见图 10－44），忽略边缘场效应，两板间电场为 x 方向常矢量

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{x}_0 E_0$$

两板间电位差为

$$V = \int_0^a dx E_0 = E_0 a$$

$x = 0$ 平板上总电荷按边界条件为

$$Q = \varepsilon E_0 A$$

所以平行板电容器的电容为

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon A}{a} \tag{10.6.18}$$

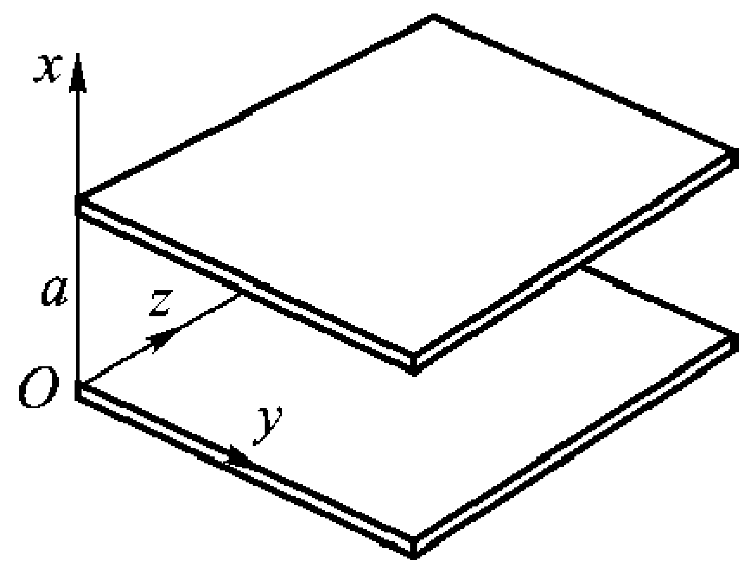


图 10－44 平行板电容器

注意，此电容与电容器的几何尺寸及平板间所填充介质的介电常数有关，

而与电场强度及板上电荷量无关。

例 10－27 求 $A=1\ \mathrm{cm}^2$，$a=1\ \mathrm{mm}$，$\varepsilon=9\varepsilon_0$ 平行板电容器的电容。

解： $C=\dfrac{\varepsilon A}{a}=7.96\times10^{-12}\ \mathrm{F}$

特种电容器

半径分别为 a 和 b 的两个同心导电球构成的电容器称为球形电容器（见图 10－45），假定半径为 a 的内导电球表面的电荷量为 Q，则两导电球间电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\boldsymbol{r}_0$$

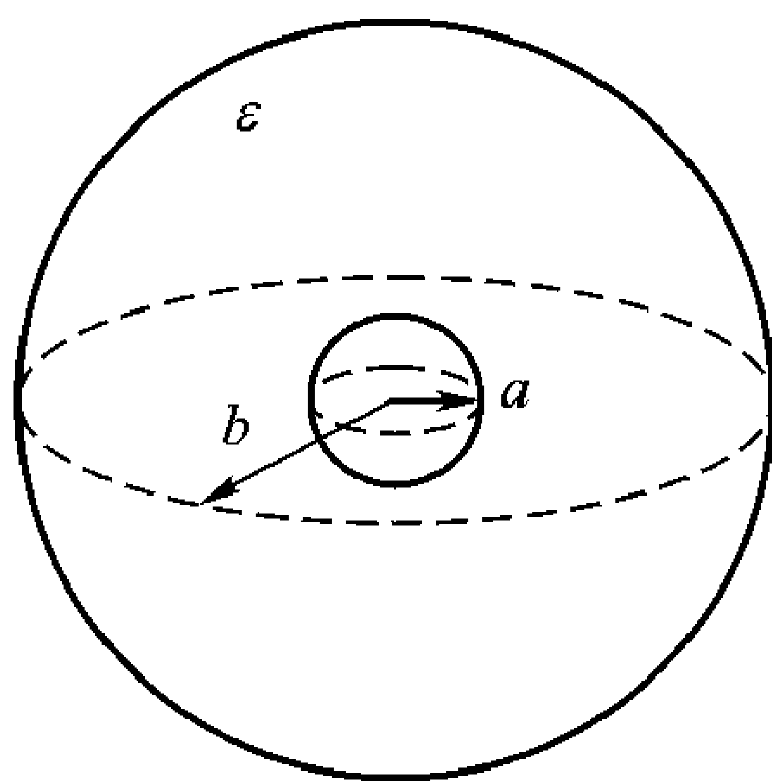


图 10－45 同心球形电容器

两导电球间电位差为

$$V=\int_a^b \mathrm{d}r\,\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

所以球形电容器的电容为

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{4\pi\varepsilon}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}} \qquad (10.6.19)$$

当外导电球半径 $b\to\infty$，电容量为

$$C=4\pi\varepsilon a \qquad (10.6.20)$$

例 10－28 地球作为球形导体（通常叫做接地导体），计算其电容量。

解： 根据式（10.6.20），ε 就是围绕地球空气的介电常数，$\varepsilon\approx\varepsilon_0$，地球的半径为

$a=6.5\times10^6\ \mathrm{m}$，所以

$$C=7.2\times10^{-4}\ \mathrm{F}$$

同轴圆柱电容器

同轴安置的两个导电柱体构成同轴圆柱电容器（见图 10－46）。内外圆柱导体的半径分别为 a 和 b。假定其长度为 h，两导电圆柱体间填充介质的介电常数为 ε，其电场强度

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\rho}_0\frac{V_0}{\rho} \qquad （圆柱坐标）$$

电位差

$$V=\int_a^b \mathrm{d}\rho\,\frac{V_0}{\rho}=V_0\ln\frac{b}{a}$$

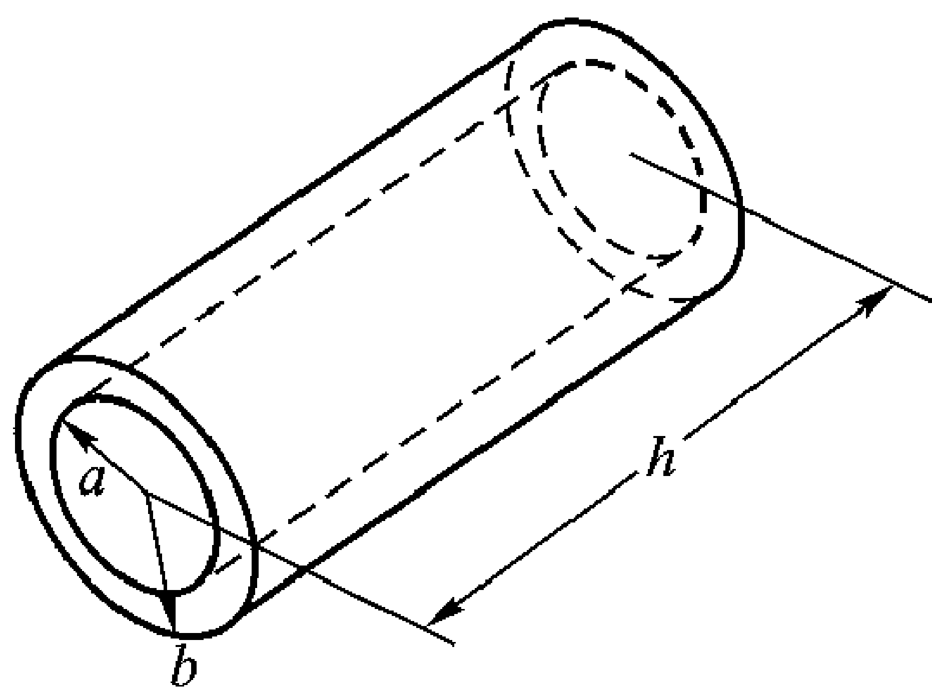


图 10－46 同轴圆柱电容器

内圆柱导体表面电荷为

$$Q = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} a\,d\varphi \frac{\varepsilon V_0}{a} = 2\pi h \varepsilon V_0$$

所以其电容

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon h}{\ln\dfrac{b}{a}} \tag{10.6.21}$$

电容器中储能

电容器可以看作是储藏电荷的器件，不过如果注意到电容器两极板上贮存的电荷符号相反，则总的电荷量实际为零，所以将电容器看成贮存电荷的器件似有不妥之处。电容器较为确切的定义是将电容器看作储存电能的器件，从式(10.6.10)及图 10－44 可得电容器的储能

$$U_E = \frac{1}{2}\int \Phi \rho_v \, dV$$

参看图 10－43，并记住极板 A 上电位为 Φ_A，极板 B 上电位为 Φ_B，则

$$U_E = \frac{1}{2}\left(\Phi_A \int_A \rho_v \, dV + \Phi_B \int_B \rho_v \, dV\right) = \frac{1}{2}(\Phi_A Q_A + \Phi_B Q_B)$$

对于电容器，$Q_A = Q$，$Q_B = -Q$，所以

$$U_E = \frac{1}{2}(\Phi_A - \Phi_B) Q = \frac{1}{2} Q V_{AB}$$

因为

$$C = \frac{Q}{V_{AB}}$$

所以

$$U_E = \frac{1}{2} C (V_{AB})^2 \tag{10.6.22}$$

例 10－29 假定图10－46所示同轴柱形电容器充电到100 V，$a = 0.5$ cm，$b = 0.6$ cm，$h = 2$ cm，$\varepsilon = 2\varepsilon_0$，求电容器储能。

解：可以用两种方法求解，第一种方法根据式(10.6.21)先计算电容

$$C = 6.09 \times 10^{-12}\ \text{F}$$

然后用式(10.6.22)计算 U_E

$$U_E = 3.05 \times 10^{-8}\ \text{J}$$

第二种方法是先求电场 $\boldsymbol{E}$，然后用式(10.6.15)计算 U_E，两种方法所得结果是一样的。第二种方法请读者作为练习自行计算。

介质击穿

描述电容器的特征参数除电容量外，还有充电电压的容许最大值，超过该

最大值，将电容器两极板分开的绝缘介质有可能被击穿，电容器将被短路或被烧坏。表 10－1 给出某些绝缘介质的击穿电场强度。介质击穿类似于气体电离，作为电容器的介质绝缘层，尽管其内部的自由电子很少，但其中的杂质或缺陷中却包含有一定数量的电子，这些电子在电场作用下被加速并跟绝缘介质的点阵碰撞。如果电场足够高，碰撞的结果在介质中产生电子－空穴对，这些电子－空穴被加速，又发生碰撞电离，导致更多的电子－空穴，最终导致介质击穿。

表 10－1 绝缘体的击穿电场强度

材　　料	相对介电系数	击穿电场 E (10^6 V/m)
空气	1.0	近似为 3
油	2.3	15
纸	1.5～4.0	15
光泽塑料	2.7	20
玻璃	6.0	30
云母	6.0	200

例 10－30 类似图 10－46 的同轴线，$a=5$ mm，$b=15$ mm，绝缘塑料 $\varepsilon_1=2.7$，击穿强度为 20×10^6 V/m，求同轴线内外导体间承受的最大电位差。

解： 从式(10.2.12)

$$E_\rho=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_1\rho}\qquad(a\leqslant\rho\leqslant b)\tag{10.6.23}$$

当 $\rho=a$，E_ρ 最大，它必须小于 20×10^6 V/m，即

$$2\times10^7=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_1 a}\tag{10.6.24}$$

内外导体间电压为电场强度从 a 到 b 的积分

$$V=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_1}\ln\frac{b}{a}\tag{10.6.25}$$

将式(10.6.24)代入式(10.6.25)得到

$$V=a\times\ln\frac{b}{a}\times2\times10^7=1.10\times10^5\ \text{V}$$

作用于介质材料的力

如图 10－47 所示平行板电容器，两平板之间的部分空间为一个介质板填充。该电容器与其他系统隔离，所以电容器极板上电荷总数是不变的。问此介质板受到的是拉力、推力，还是此介质板会静止不动？

假定平行平板内部区域电场是常数，极板边缘效应可忽略。边界面上切向

电场连续，所以空气和介质中电场相等。

如果介质板伸入极板空间长度 $x=0$，即电容器全部为空气填充，电场

$$E_0=\frac{Q}{\varepsilon_0 ah}$$

式中 h 为电容器极板长度，a 为宽度，d 为极板间距离，电压

$$V_0=E_0 d=\frac{Qd}{\varepsilon_0 ah}$$

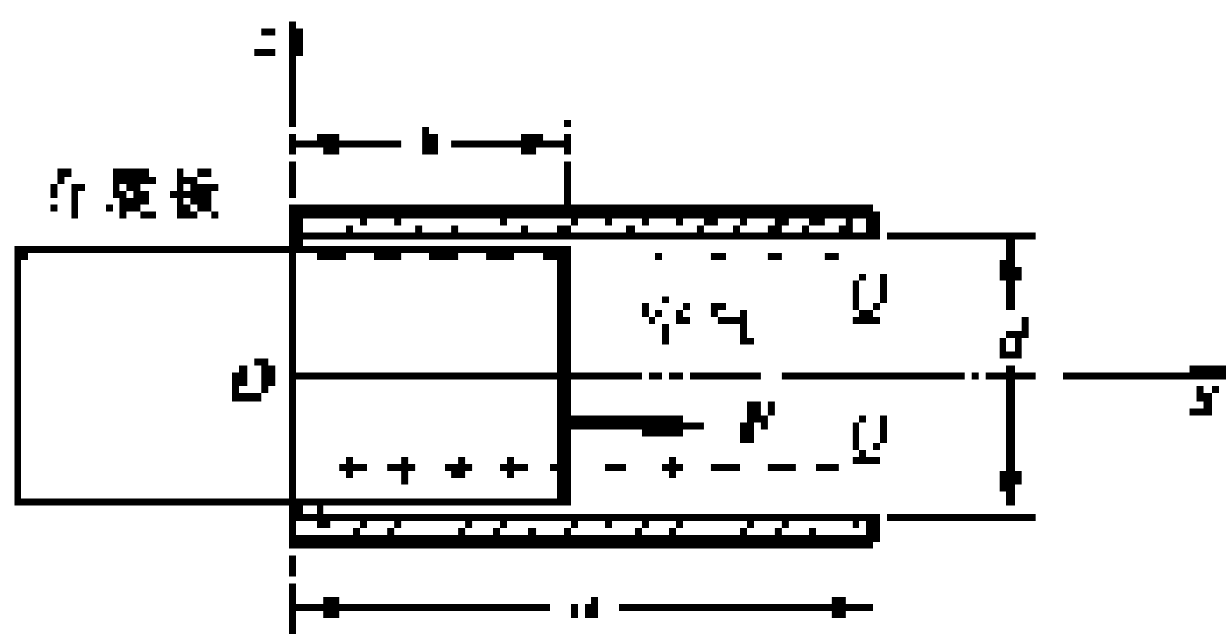


图 10－47 平行板电容器，上、下极板带电量分别为 $-Q$，$+Q$ 介质板将受到一个拉力

总的电场储能

$$U_{E0}=\frac{1}{2}\varepsilon_0\ (E_0)^2 adh=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 ah}$$

如果电容器极板间全部被介质板填满，相应地有

$$E_1=\frac{Q}{\varepsilon ah}\qquad V_1=\frac{Qd}{\varepsilon ah}\qquad U_{E1}=\frac{Q^2 d}{2\varepsilon ah}$$

注意填充介质板后，由于 $\varepsilon>\varepsilon_0$，电场强度、电压、电场储能三者都比填充空气时小。因为任何一个系统总倾向于处于能量最低的状态，则可得到如下结论：当介质板部分填充两极板之间的空间时(如图 10－47)电场力的作用将使介质板受到一个拉力，使介质板进一步填充电容器两极板之间的空间。

静电力可作如下计算

$$\boldsymbol{F}=-\nabla U_E$$

其物理解释类似于 $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$，电场指向电位降低方向，同样静电力指向电场储能降低的方向。

静电力的大小可按下述途径计算。对于图 10－47 所示的情况，储能

$$U_E\ (x)=\frac{1}{2}E^2\ [\varepsilon_0\ (a-x)+\varepsilon x]\ hd \qquad (10.6.26)$$

注意，由于介质与空气交界面切向场量连续，不管是介质填充还是空气填充的区域，电场 $\boldsymbol{E}$ 都在 z_0 方向。E 到底多大？如下式所示：

$$D=\begin{cases}\varepsilon E & (\text{介质中})\\ \varepsilon_0 E & (\text{空气中})\end{cases}$$

所以

$$\rho_s=\begin{cases}\varepsilon E & (\text{介质中})\\ \varepsilon_0 E & (\text{空气中})\end{cases}$$

由此可得

$$(\varepsilon E)xh + (\varepsilon_0 E)(a - x)h = Q$$

或者

$$E = \frac{Q}{[\varepsilon x + \varepsilon_0(a - x)]h}$$

将上式代入式(10.6.26)得到

$$U_{\mathrm{E}}(x) = \frac{Q^2 d}{2[\varepsilon x + \varepsilon_0(a - x)]h}$$

作用在介质上的力为

$$F = \frac{-\partial U_{\mathrm{E}}(x)}{\partial x} = \frac{Q^2 d}{2[\varepsilon x + \varepsilon_0(a - x)]^2 h}(\varepsilon - \varepsilon_0) \qquad (10.6.27)$$

以上所讨论的静电系统对部分填充电容器极板空间的介质板施加一个拉力，使介质板进一步伸入极板之间的空间，从而使系统能量进一步减小。本例讨论的是介质板在 x 方向受力，而在 y 方向由于两极板带不同电荷而产生的力不在此讨论。这里我们已经假定由于某种外力作用，两极板在 y 方向相对固定不动。必须指出，式(10.6.26)仅当 $x < a$ 时是成立的，所以式(10.6.27)也仅当 $x < a$ 时是成立的。

现在考虑如图 10－48 所示的略为不同的情况。在图 10－47 中，Q 是常量，而在图 10－48 中，电容器两极板与恒压源相连，即 V 是常数，电容器和电池构成一完整的系统。问此时介质板受到的是拉力、推力，还是介质板会静止不动？

先设 $x = 0$，即介质板没有进入电容器两极板之间的空间，因为 V 是常数，所以

$$E_0 = \frac{V}{d}$$

$$Q_0 = \varepsilon_0 E_0 ah = \varepsilon_0 Va\frac{h}{d}$$

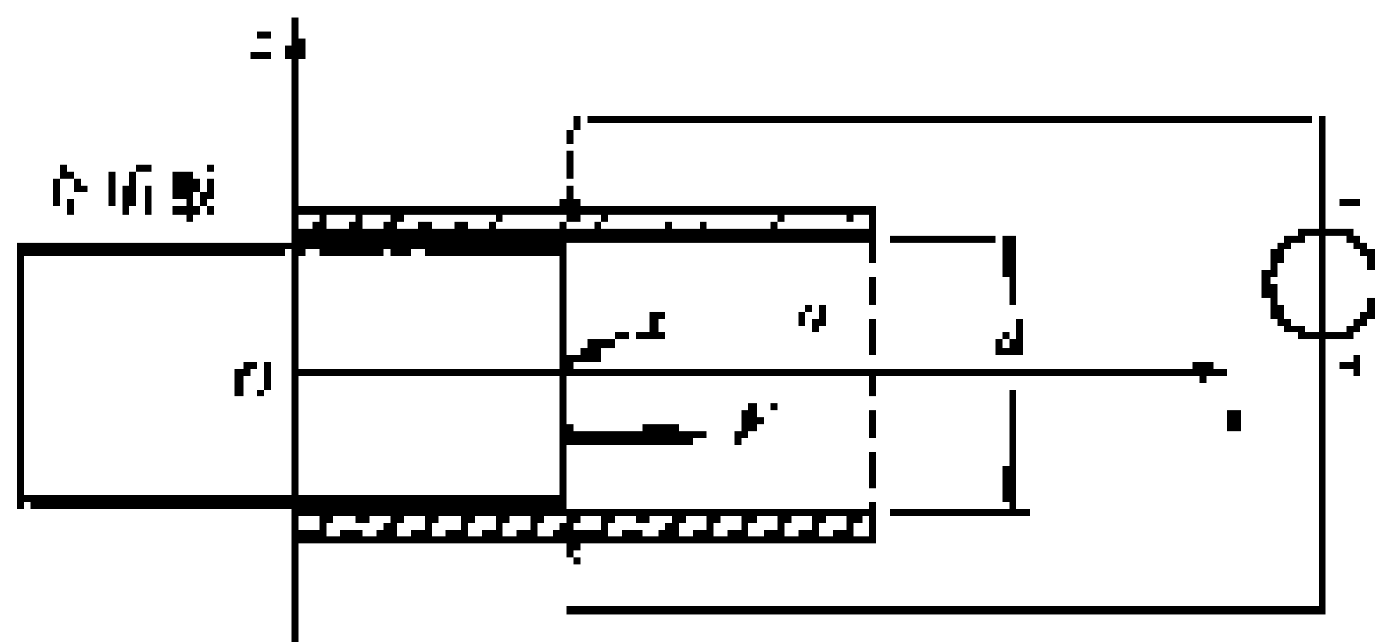


图 10－48　平行板电容器，两极板与恒压源相连，V 是常数，介质板受到的一个拉力

$$U_{E0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 ahd = \frac{V^2\varepsilon_0 ah}{2d}$$

再计算两极板之间全部为介质板填充时的 E_1，Q_1，U_{E1}，有

$$E_1 = \frac{V}{d} = E_0$$

$$Q_1 = \varepsilon E_1 ah = \varepsilon Va\frac{h}{d} > Q_0$$

$$U_{E1} = \frac{1}{2}\varepsilon E_1^2 ahd = \frac{V^2\varepsilon ah}{2d} > U_{E0}$$

不能简单地因为 $U_{E1} > U_{E0}$就得到结论，介质板将受到一个向外的推力，从而使系统趋向能量降低的状态，必须考虑系统的另一部分——电池中发生了什么。

如果介质全部填满两极板之间的空间，极板上的电荷由 Q_0 增加到 Q_1，此电荷由电池提供，电池为此减小 $V(Q_1-Q_0)$的储能，因此系统总储能为$U_{E1}+U_{EB}$，此处

$$U_{EB} = -V(Q_1-Q_0) = -V^2(\varepsilon-\varepsilon_0)a\frac{h}{d}$$

所以

$$U_{E1}+U_{EB} = \frac{V^2\varepsilon ah}{2d} - \frac{V^2(\varepsilon-\varepsilon_0)ah}{d} = U_{E0} - \frac{V^2a(\varepsilon-\varepsilon_0)h}{2d}$$

换句话说，介质板全部填满两极板空间后，系统总储能比空气填充时要小。所以图 10－48 的介质板也将受到一个拉力，使之进一步伸入极板空间，与图 10－47 所示情况相似。

可以证明，图 10－48 所示情况，介质板所受静电力为

$$F = -\frac{\partial U_E}{\partial x} = \frac{V^2(\varepsilon-\varepsilon_0)h}{2d} \tag{10.6.28}$$

从前面两例讨论可知，静电力总是要把介质拉进高电场区域。

静电吸附表面

图 10－49 表示的是埋在介质表面内的细导线阵列，所有偶数或奇数导线充正电，此充电的导线阵列在与空气接触的表面产生一静电场。如果此时将纸放到介质上面，静电力促使纸张靠近介质表面，即纸被介质表面吸附。当充电导线被放电，吸附力自然就消失了。

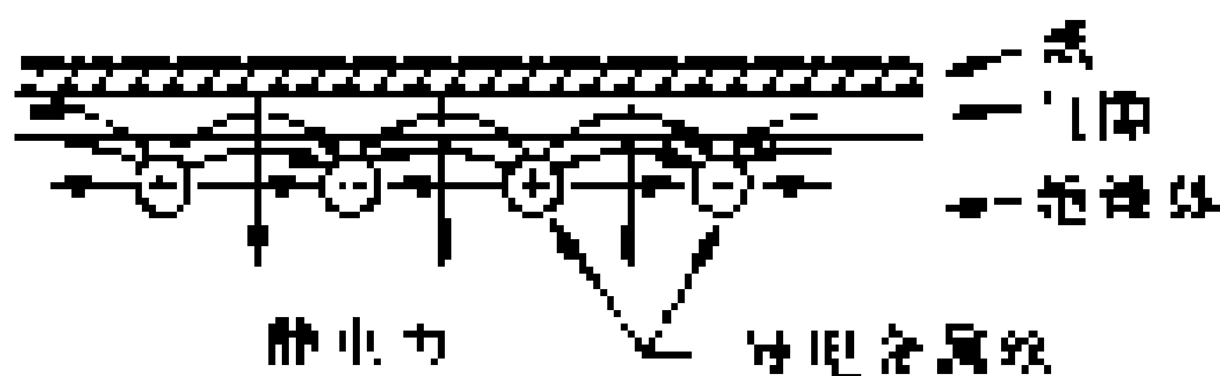


图 10－49　静电吸附表面

这种静电吸附表面的效应已得到广泛应用。埋在介质中的导线的充电电压的典型值为 300 V，导线间距为 2 mm。

本章要点

- 由静电荷激发的电场叫静电场，其支配方程是 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_v$，以及本构关系 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$。静电场的电场强度可用电位 Φ 的负梯度表示，即 $\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$。电位 Φ 满足泊松方程 $\nabla^2\Phi=-\rho_v/\varepsilon$。如果 $\rho_v=0$，就简化为拉普拉斯方程 $\nabla^2\Phi=0$。
- 静电场的计算，有两个途径：一是先求电荷 ρ_v 产生的电位 Φ，然后由 Φ 求电场强度 $\boldsymbol{E}$；二是直接由电荷源计算电场强度 $\boldsymbol{E}$，而电位 Φ 通过电场 $\boldsymbol{E}$ 的积分得到。静电场满足叠加原理。任何电荷源可以看成无限多点电荷的叠加，因此任意源产生的场可以由无限多点电荷产生的场的叠加得到。

  根据高斯定理，利用结构对称性，可找到一个高斯面，在其上电场强度相等，这样就可方便地由源求出电场。
- 满足特定边界条件的解只有一个解，这就是惟一性定理。在一定边值条件下解拉普拉斯方程、泊松方程其解就是惟一的。镜像法解电磁问题所依据的就是惟一性定理。
- 在静电场作用下，带电量 q 的质点受力为 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}$。
- 在电场作用下，介质会极化，介质材料可以看成电偶极矩 $\boldsymbol{p}$ 的集合。介质中的场由两部分构成：一是介质不存在时源产生的场；二是在场作用下介质极化，诸多偶极子 $\boldsymbol{p}$ 产生的场。其总的效果使外加电场有所降低。置于电场中的介质，由于极化作用，在介质表面出现面电荷，其值为 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$，在介质内部出现体电荷，其值为 $-\nabla\cdot\boldsymbol{P}$。
- 将带电量为 q 的质点从 A 移到 B 要作功，其值是 $W=-\int_A^B q\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=q(\Phi_\mathrm{B}-\Phi_\mathrm{A})$。$W>0$，需要从外部注入能量，$W<0$，表示电荷对外部作了功。如果荷电质点在 A 点初速为 v_0，那么 B 点的速度 v 满足关系 $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_0^2+q(\Phi_\mathrm{A}-\Phi_\mathrm{B})$。

在电场中移动电荷要作功，故电荷系统储存能量，N 个点电荷系统的储能为 $W=U_\mathrm{E}=\frac{1}{2}\sum_{\substack{m=1\\m\neq n}}^{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_mq_n}{4\pi\varepsilon r_{mn}}$。

当电荷连续分布时，其储能为 $U_\mathrm{E}=\frac{1}{2}\int_V\Phi\rho_v\mathrm{d}V=\frac{\varepsilon}{2}\int_V\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\mathrm{d}V$。

- 完纯导体的电位是常数，两孤立完纯导体其常数电位可不同，即两导体间存在电位差，两导体间有电场，因电力线与导体表面垂直，导体表面就有电荷，每孤立导体带电量 Q 与两导体间电压之比定义为电容 $C = Q/V$，它与两导体间电压无关，由两导体几何结构决定。
- 静电力总是要把介质拉进高电场区域。

习题

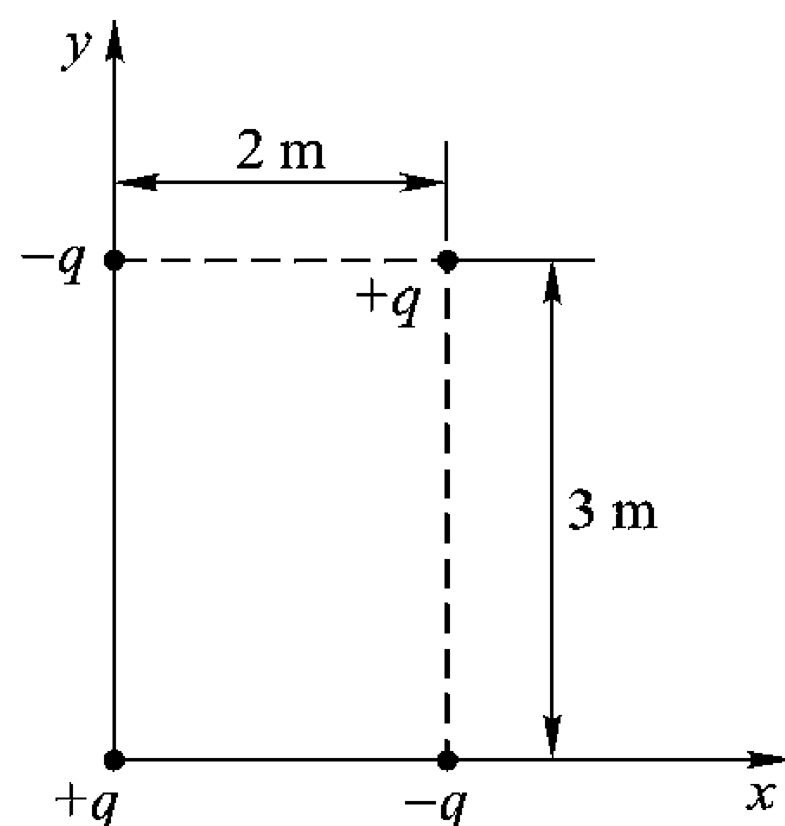
10.1　图 10－2 所示偶极子，假定 $q = 1.6\times10^{-19}$ C，用式(10.2.5)、(10.2.7)分别求当：

(1)　$x = 0.1$，$y = 0.1$，$z = 0.1$

(2)　$x = 1$，$y = 1$，$z = 1$

时的电位，比较计算结果，指出式(10.2.7)的近似性。

10.2　4 个点电荷分布如题图 10.2 所示，求电位等于零的等位面。



题图 10.2

10.3　如题图 10.3，两点电荷间距为 a，求

(1)　电位分布 Φ (x、y、z)；

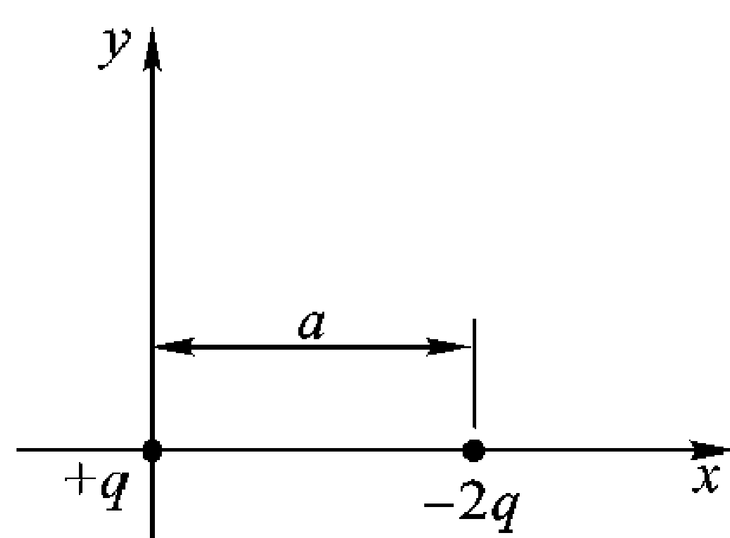
(2)　$x = 100a$，$y = 100a$，$z = 0$ 处电位；

(3)　当离开电荷距离 $r >> a$ 时，电位可近似表示为

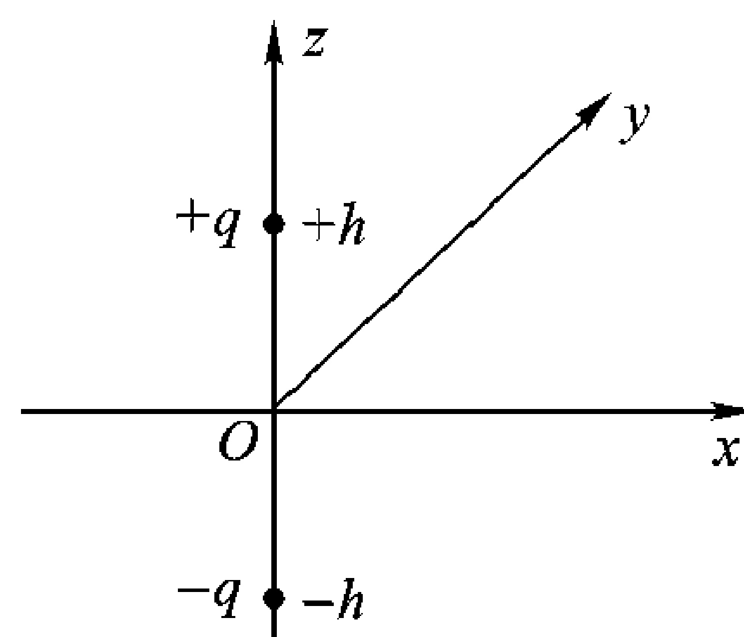
$$\Phi \approx -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

式中 $(x^2+y^2+z^2)^{1/2} >> a$。

10.4　如题图 10.4，两个点电荷位于 $(0.0, h)$、$(0.0, -h)$，$h = 1$ cm，利用 $\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$，证明在原点处 $\boldsymbol{E} = -z_0\left(\frac{q}{2\pi\varepsilon h^2}\right)$。



题图 10.3



题图 10.4

10.5　一线电荷长 $2h$，置于 z 轴，见图 10－6 (a)，线电荷密度为 ρ_l，求：

(1)　计算 $l = 0.1h$，$\varphi = 0$，$z = 0$ 处电场；

(2)　用无限长线电荷产生电场的公式近似计算该点电场；

(3)　比较(2)这种情况下计算该点电场的误差。

10.6　两无限薄平行平板，一个位于 $x = 0$，表面电荷密度为 ρ_s，另一个位于 $x = 1$，表面电

荷密度为 $-\rho_s$，计算 $x>1$、$1>x>0$ 和 $x<0$ 3 种情况下的电场。

10.7　空气中电荷密度分布如下：

$$\rho_v=\begin{cases}0 & (0<r<a)\\ 10^{-6} & (a<r<b)\\ 0 & (b<r)\end{cases}$$

求 $\boldsymbol{D}$。

10.8　假定空气中 $\rho_v=10^{-6}\mathrm{e}^{-r}\ \mathrm{C/m^3}$，求电场 $\boldsymbol{E}$。

10.9　一半径为 a 的球，其内部分布有体电荷，其电荷密度为

$$\rho_v=\begin{cases}\rho_{v0}\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right) & (r\leqslant a)\\ 0 & (r>a)\end{cases}$$

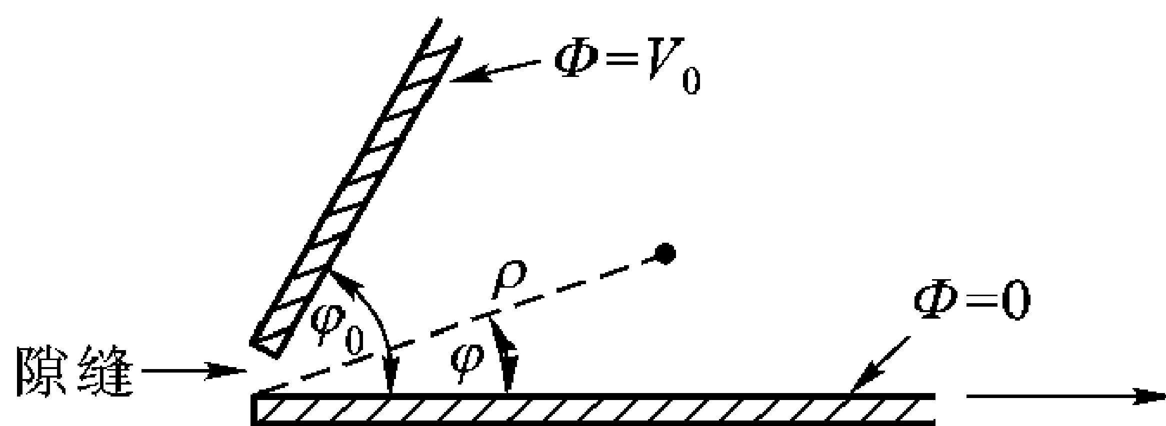
求：(1) 球内总电荷；

(2) 空间各处 $\boldsymbol{E}$、V；

(3) 计算 $\boldsymbol{E}=E_{\max}$时的 r 值。

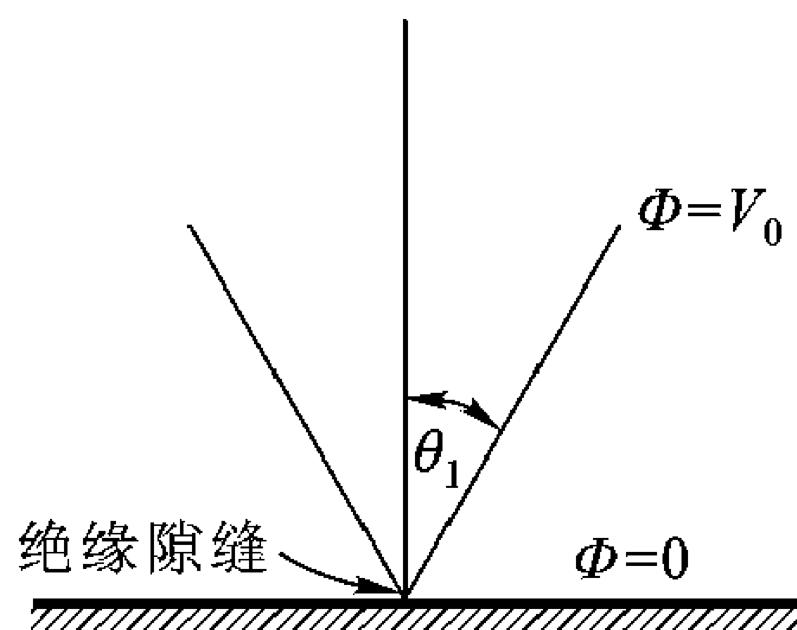
10.10　$\boldsymbol{E}=3\boldsymbol{x}_0+4\boldsymbol{y}_0-5\boldsymbol{z}_0$，$A$ 的坐标为(1,1,2)，B 的坐标(0,0,0)，求 V_A-V_B 是否与积分路径有关？

10.11　如题图 10.11，两彼此绝缘的无限大导电板夹角为 φ_0，一块导电板电位 $\Phi=0$，另一块导电板电位 $\Phi=V_0$，求导电板间电位分布与电场。



题图 10.11

10.12　如题图 10.12，有一个角度为 θ_1 的导电锥体，电位为 $\Phi=V_0$，锥体顶与下面电位 $\Phi=0$ 导电板有一小的隙缝绝缘，锥体轴与导电板垂直。求 $\theta_1<\theta\leqslant 90°$ 范围内电位 $\Phi(\theta)$。(在球坐标下，Φ 与 (r,φ) 无关，只是 θ 的函数)。



题图 10.12

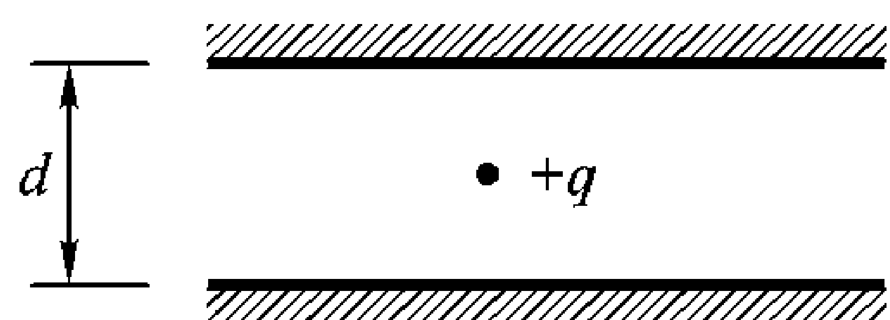
10.13　在两无限大平行导电板之间置一点电荷 q，用镜像法求两导电板之间的电位分布(d 为两电板之间距)见题图 10.13。

10.14　如题图 10.14，点电荷 q 偏心置于导电球空腔内，该导电球接地，用镜像原理求腔内电位分布。

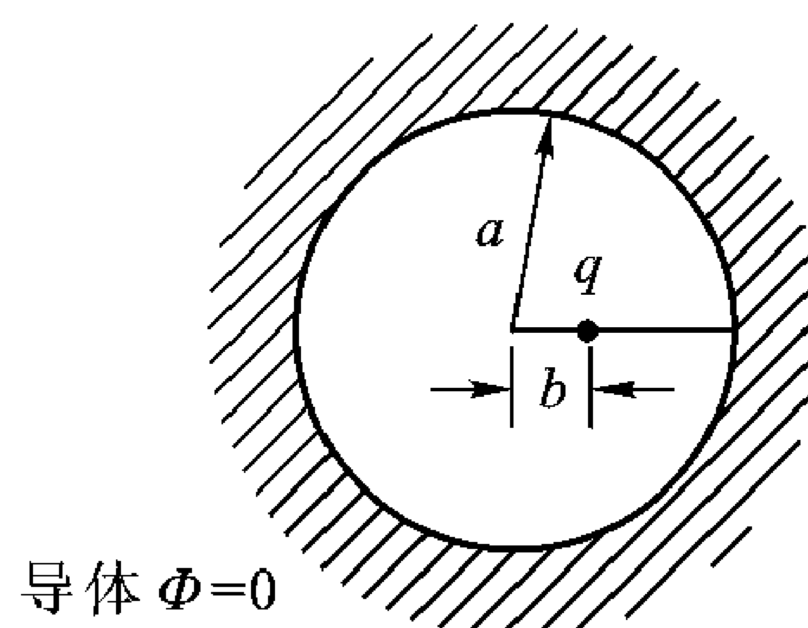
10.15　求由线电荷(其线电荷密度为 ρ_l)与柱形导体(半径为 a)构成的系统(见题图 10.15)的电位分布。

10.16　计算矩形空腔的电位分布，空腔 4 个侧面及底面电位为零，盖板电位为 V_0(见题图 10.16)。

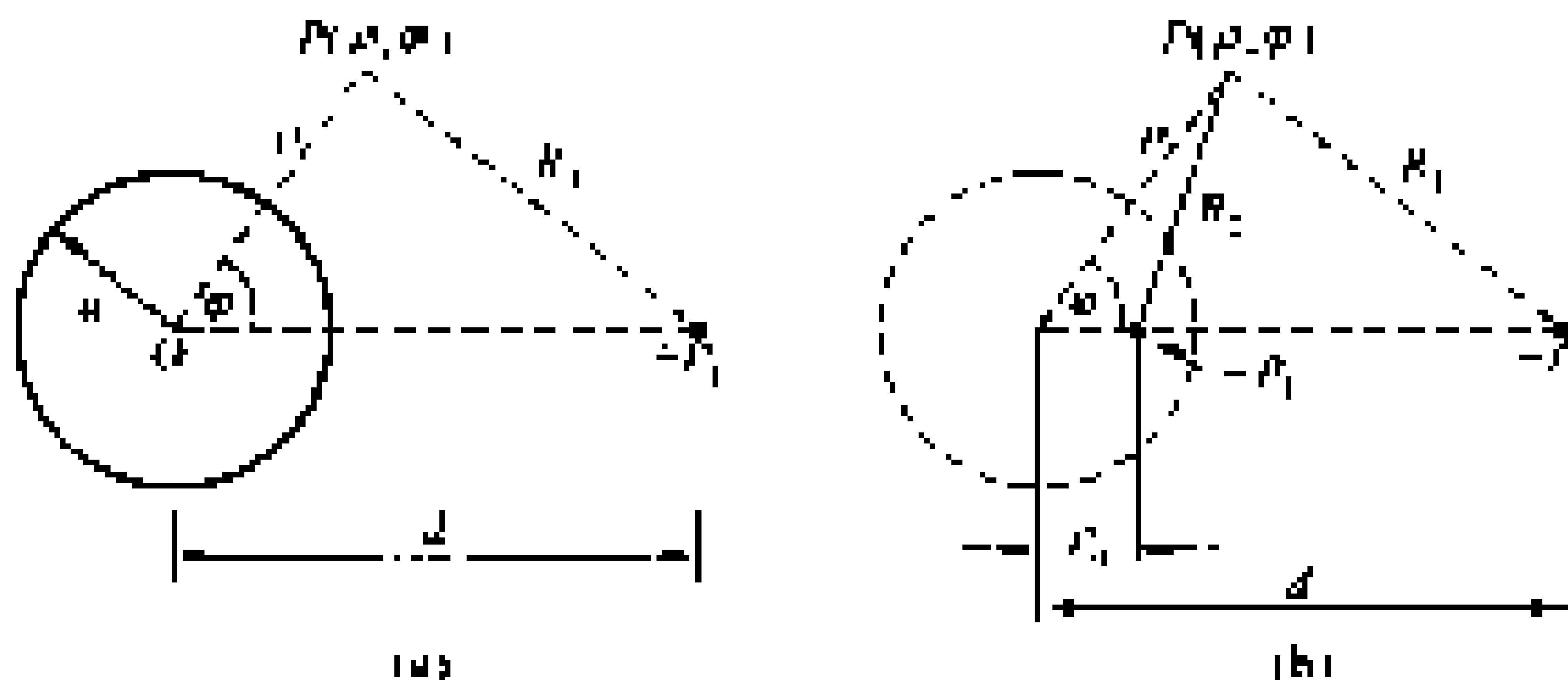
10.17　质量为 1 g 的两个小球悬卦在 15 cm 长细绳上，假定绳子没有重量，每个小球带电 10^{-9} C，在重力和电场力联合作用下，到达平衡态时，两绳子将张开一个角度，见题图 10.17，问此角度 $\alpha=$？(假定 α 很小。)



题图 10.13　置于两平行导电板之间的点电荷

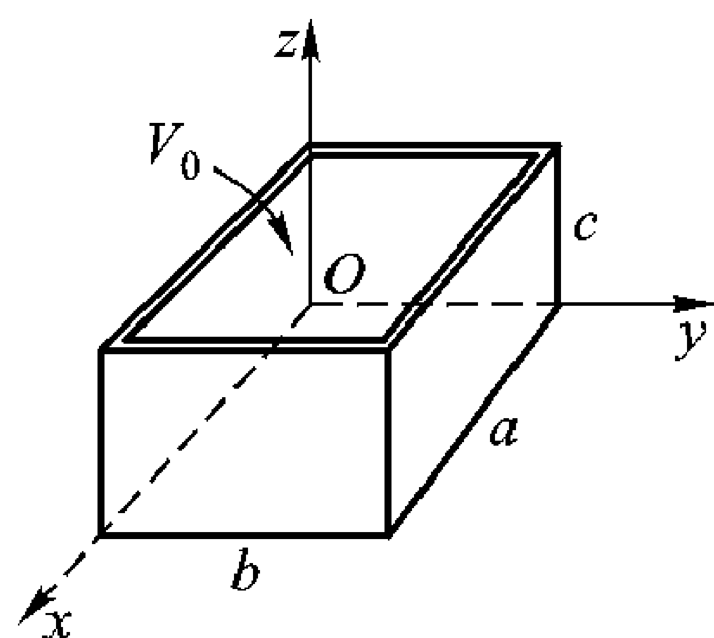


题图 10.14

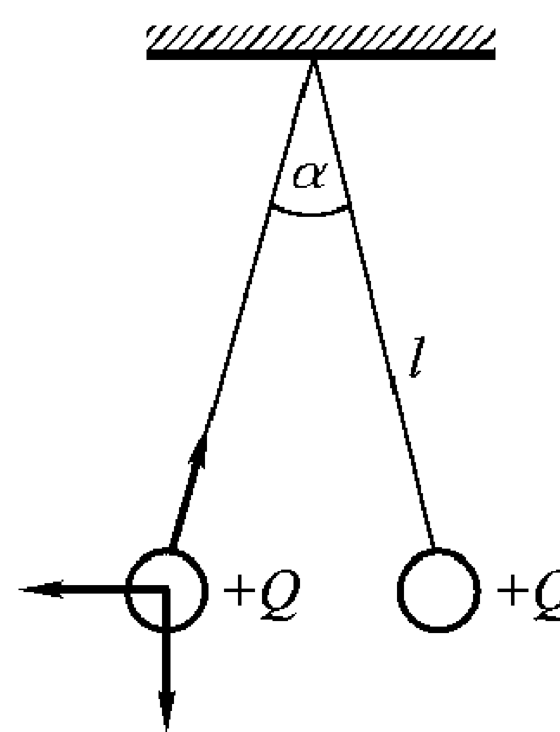


题图 10.15

(a) 靠近柱形导体的线电荷系统　(b) 位于 $\rho_0 = a^2/d$ 镜像线电荷 $-\rho_l$



题图 10.16　矩形空腔底与四壁接地，顶盖电位为 V_0



题图 10.17

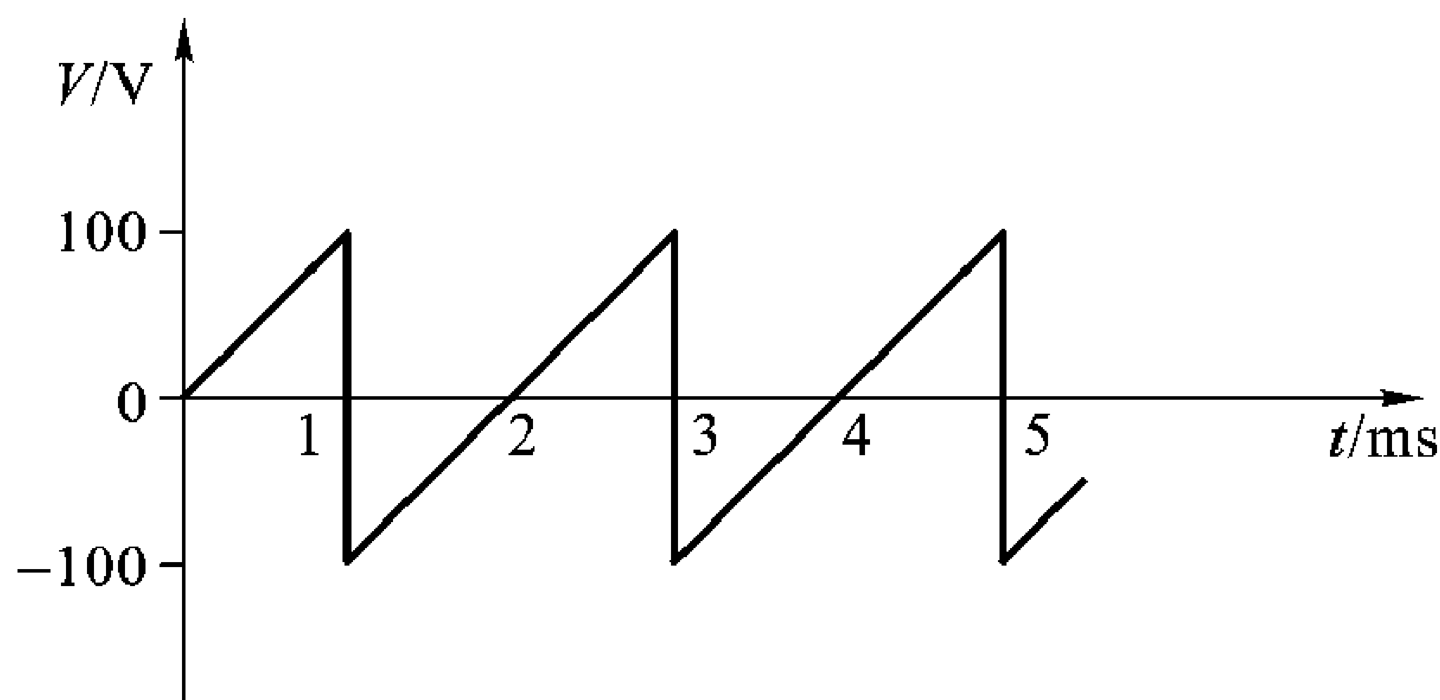
10.18　一根荷电长线，线电荷密度 $\rho_l = 10^{-6}$ C，离线 1 m 处为荷电 -10^{-9} C 的微粒，求微粒受到的力。

10.19　参看图 10－30，在室温 20 ℃一个大气压下，如果 $b = 3$ cm，$V_0 = 10$ kV，线的粗糙度系数为 0.8，求 a 小于多少才能产生电晕放电？

10.20　参看图 10－29，如果加在平行偏转板上电压为题图 10.20 所示矩齿电压，荧光屏位

于 $x=20$ cm 处，求电子束打上屏的位置。

10.21　图 10－41 所示阴极射线管，如果在屏上电子束轨迹为圆，每秒旋转 60 次，问加在水平与垂直偏转板上电压 V_x、V_y 应当怎样？



题图 10.20

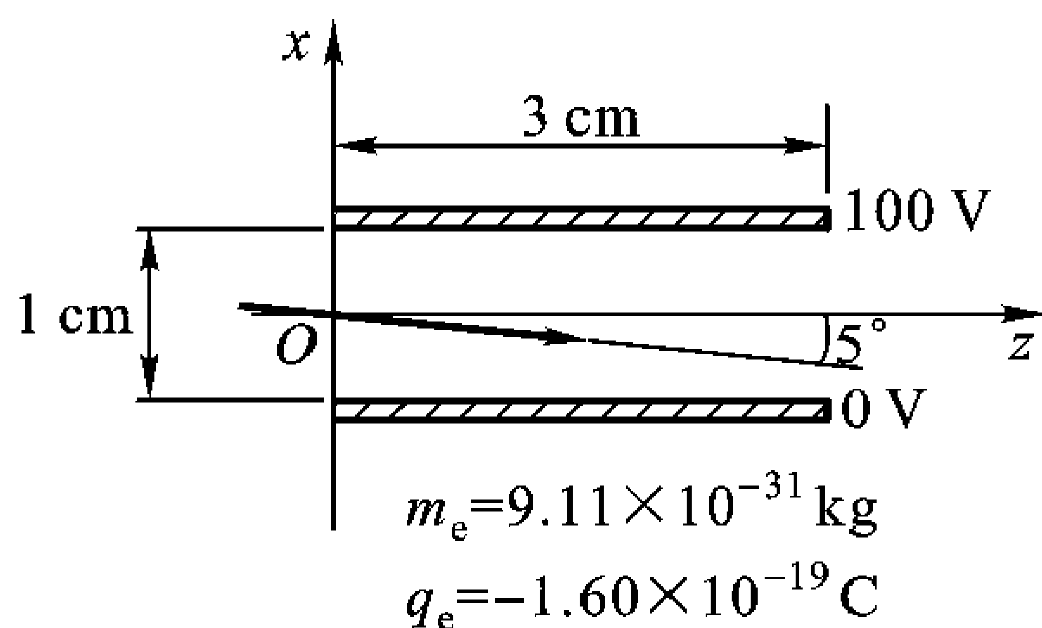
10.22　阴极发射电子为阳极上 1 000 V 电压加速，然后进入平行平板区域，与 z 轴夹角为 5°，如题图 10.22。计算：

(1) 电子进入平行板 $t=0$ 时刻电子速度 v_0、v_{0z} 和 v_{0x}；

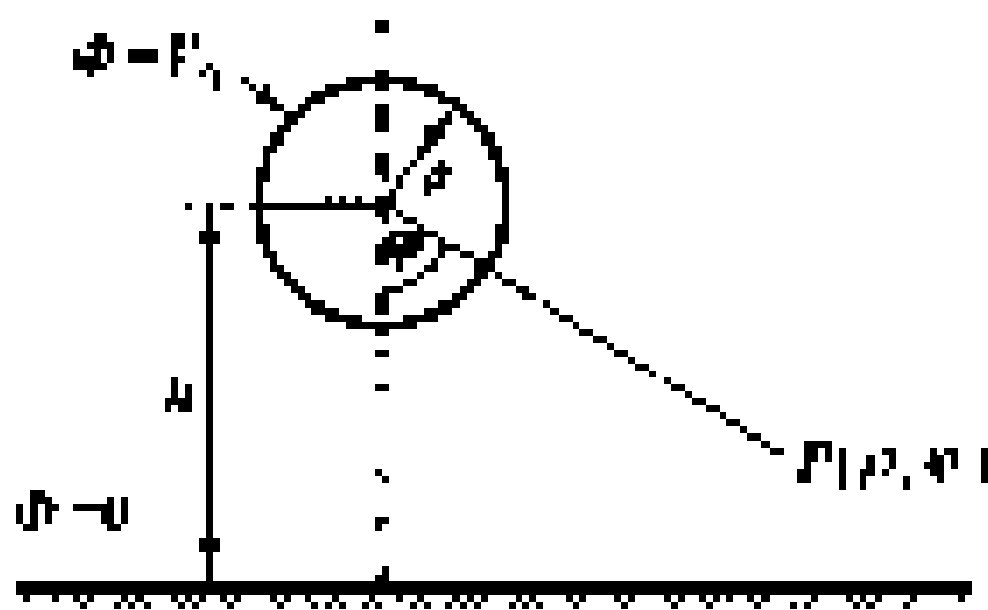
(2) 电子在平行板空间运动的轨迹方程；

(3) 电子出平行板的位置。

10.23　一根很长的导电圆柱体充电到 V_0，离地 h 米，如题图 10.23，假定地电位为零，求该系统单位长度电容。



题图 10.22



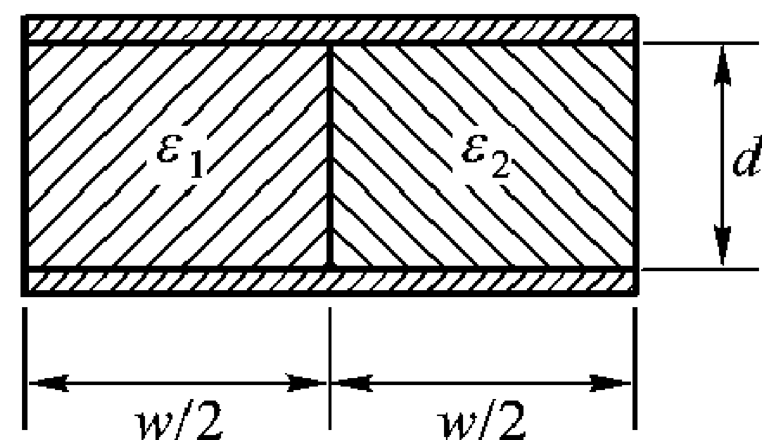
题图 10.23

10.24　如题图 10.24，平行板电容器为两种介质填充，面积为 A，问题如下：

(1) 用 A、d、ε_1、ε_2 求 C；

(2) 假定正极板总电荷为 Q，求与 ε_1、ε_2 接触的极板上 Q_1、Q_2；

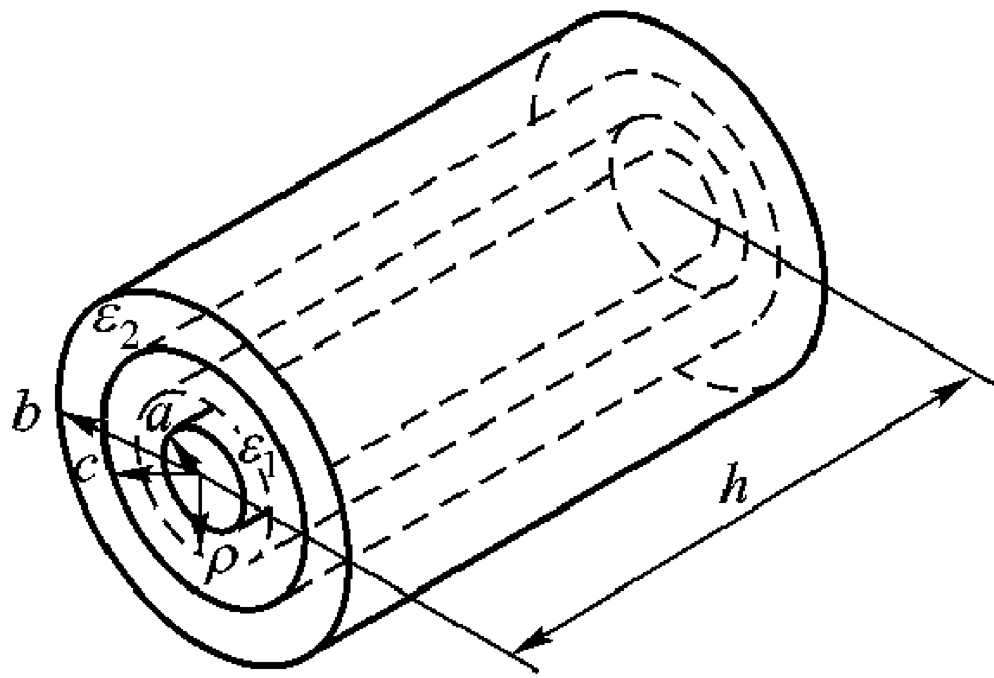
(3) 假定 $\varepsilon_1=3\varepsilon_0$，$\varepsilon_2=5\varepsilon_0$，$d=0.6$ mm，$A=20$ cm^2，极板电位差 300 V，求电容器总的电场储能。



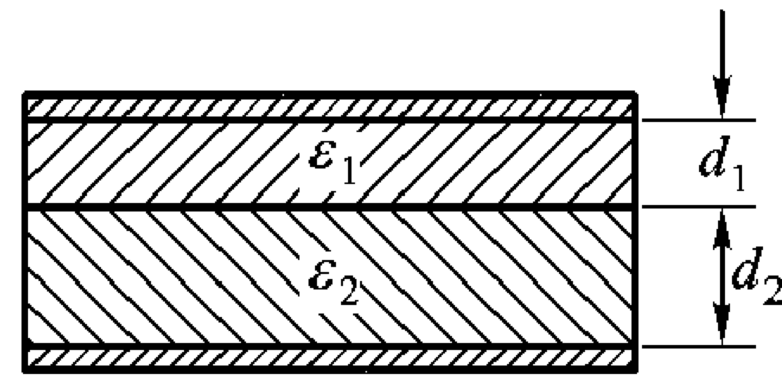
题图 10.24

10.25　求单位长度双层介质同轴线(题图 10.25)的静电容，即用 a、b、c、ε_1、ε_2 表示 C/h。

10.26　如题图 10.26 所示，平行平板电容器为二层绝缘介质填充，其介电常数、厚度分别为 ε_1 与 ε_2，d_1 与 d_2，求用极板面积 A 表示的电容 C。



题图 10.25



题图 10.26

第 11 章　恒定电场与恒定磁场*

不随时间变化的电流叫恒定电流，促使电荷定向运动以形成恒定电流的电场叫恒定电场。电流产生磁场，恒定电流产生的磁场叫恒定磁场。恒定电场、恒定磁场都与恒定电流相关，故本章将恒定电场与恒定磁场放在一起讨论，但重点讨论恒定磁场。如果注意到恒定电场与静止电荷激发的静电场的相似性，那么恒定电场就可借用静电场的方法进行分析。本章 10.1 节对恒定电场的讨论，侧重于揭示恒定电场所遵循的规律与静电场的相似性；11.2 节与 11.3 节分别研究恒定电流产生的恒定磁场以及恒定磁场对电流的作用；11.4 节讨论磁场能与电感；11.5 节为磁场中的介质；最后 11.6 节简要提及磁性材料与磁路。

11.1　恒定电场

11.1.1　基本方程

恒定电场不随时间变化$\left(\dfrac{\partial}{\partial t}=0\right)$，故有

$$\nabla \times \boldsymbol{E}=0 \tag{11.1.1}$$

这与静电场的基本方程(10.1.1)相同。

恒定电流也不随时间变化，故电荷与电流的连续方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{J}=0 \tag{11.1.2}$$

式(11.1.1)、(11.1.2)就是恒定电场的基本方程。

导体中电流密度 $\boldsymbol{J}$ 与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$\boldsymbol{J}=\sigma \boldsymbol{E} \tag{11.1.3}$$

式中 σ 是导体的电导率，单位是西门子每米(S/m)；电导率的倒数叫电阻率，$\rho_r=1/\sigma$，单位是欧姆·米(Ω·m)。

$\boldsymbol{J}=\sigma \boldsymbol{E}$ 在分析恒定电场时起的作用与 $\boldsymbol{D}=\varepsilon \boldsymbol{E}$ 在分析静电场时起的作用相当。

---

* 本章主要参考 Liang Chi Shen，Jin Au Kong “Applied Electromagnetism”。

式(11.1.3)对时变场与稳态场都适用。但当时变场在导体中传播时，每经过一个穿透深度，场衰减到初始值的 1/e。时变场的频率越高，穿透深度越小。所以频率较高时，电流密度 $\boldsymbol{J}$ 在导线横截面中分布周边大，中心小，因为边缘电场强度 $\boldsymbol{E}$ 大，中心电场强度 $\boldsymbol{E}$ 小。当频率很高电导率 σ 又较大时，电流只局限在导线表面薄层内传播。恒定电流可以看成是角频率 $\omega \to 0$ 时交变电流的极限，故对于恒定电流穿透深度趋于无穷大，导线中的电流密度在横截面内是均匀分布的。

因为梯度的旋度等于零，跟静电场一样，恒定电场 $\boldsymbol{E}$ 也可表示为电位 Φ 的负梯度 $\nabla \Phi$，即

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \Phi \tag{11.1.4}$$

由式(11.1.3)与式(11.1.4)得到 $\boldsymbol{J} = -\sigma \nabla \Phi$，再代入式(11.1.2)就得到

$$\nabla^2 \Phi = 0 \tag{11.1.5}$$

这样，跟静电场问题一样，恒定电场问题也可以变为解拉普拉斯方程的问题。

注意，静电场中的泊松方程在恒定电场中不存在，因为静电场问题中有点电荷源，而恒定电流问题中不存在点电流源。

11.1.2 欧姆定理

式(11.1.3)就是微分形式的欧姆定理。将式(11.1.3)应用到长为 l、截面为 A、电导率为 σ 的导电圆柱体(见图 11－1)，假定导电圆柱体中沿轴电场 $\boldsymbol{E}$ 由外加电压 V 引起，其大小为

$$E = \frac{V}{l}$$

而从一端流向另一端的总电流为

$$I = AJ = \sigma AE$$

电导 G 的定义为电流与电压之比，所以图 11－1 所示导电圆柱体的电导为

$$G = \frac{I}{V} = \frac{\sigma A}{l} \tag{11.1.6}$$

G 的单位是西门子(S)。

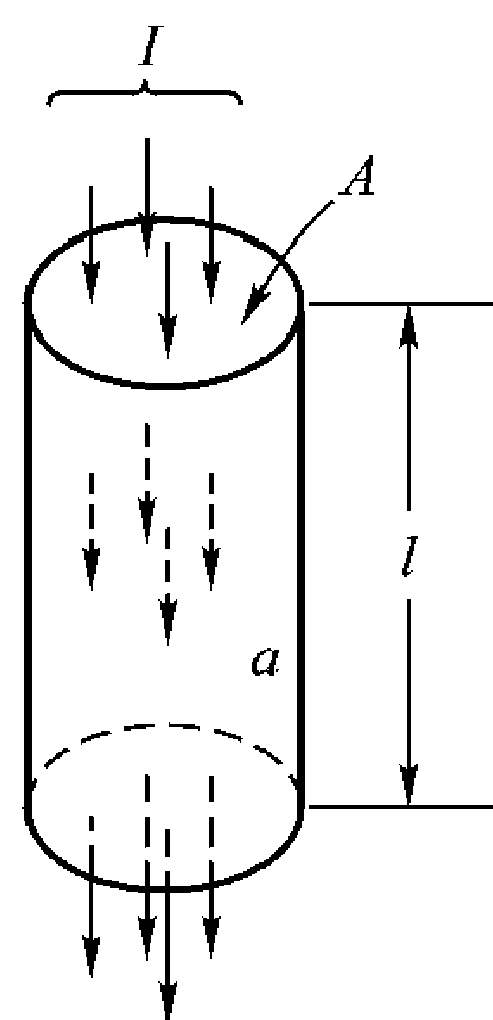


图 11－1 导电圆柱体

电阻 R 是电导 G 的倒数，为电压 V 与电流 I 之比，即

$$R = \frac{1}{G}$$

对于图 11－1 所示导电圆柱体，电阻

$$R = \frac{V}{I} = \frac{l}{\sigma A} = \frac{\rho_r l}{A} \tag{11.1.7}$$

式中 ρ_r 是电阻率，$\rho_r = 1/\sigma$，R 的单位是欧姆（Ω）。

在电路分析中，我们不管构成导体的材料，也不管导体的具体形状，凡是宏观上其两端的电压 V 与其上电流 I 的关系为线性时，都可用一电阻 R 或电导 G 等效，即

$$V = RI \tag{11.1.8}$$

或

$$I = GV \tag{11.1.9}$$

这就是我们在电路课程中熟知的欧姆定理。

11.1.3　焦耳定理

导体中起导电作用的电子在电场作用下受到洛伦兹力作用。假定电荷密度为 ρ_e，那么单位体积内电子受力为 $\boldsymbol{f} = \rho_e \boldsymbol{E}$（单位为 N/m^3）。在此力作用下，电子被加速，电子的速度越来越快。但电子速度的增加终因与原子的碰撞而受阻，最终达到平衡点，电子以恒定速度 $\boldsymbol{v}$ 漂移。在体积 $\mathrm{d}V$、时间间隔 $\mathrm{d}t$ 中电场力所作功是 $\mathrm{d}W_e = \rho_e \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} \mathrm{d}V \mathrm{d}t$，这个功转变为热，所以单位体积耗散功率为 $P_d = \mathrm{d}W_e/(\mathrm{d}t\mathrm{d}V) = \rho_e \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}$。因为 $\boldsymbol{J} = \rho_e \boldsymbol{v}$，所以

$$P_d = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} \tag{11.1.10}$$

这就是焦耳定理，对整个体积 V 积分就得到焦耳定理的积分形式。

11.1.4　基尔霍夫电流定理

对式（11.1.2）沿任意闭曲面 S 积分，并利用散度定理，得到

$$\oint_S \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}s = 0 \tag{11.1.11}$$

上式表示从任何一节点或任何一体积流出的电流等于零。

将式（11.1.11）应用于电路节点（见图 11－2），得到

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

并简写成

$$\sum_n I_n = 0$$

这就是电路理论中最基本的一个假设，即基尔霍夫电流定律（KCL）。

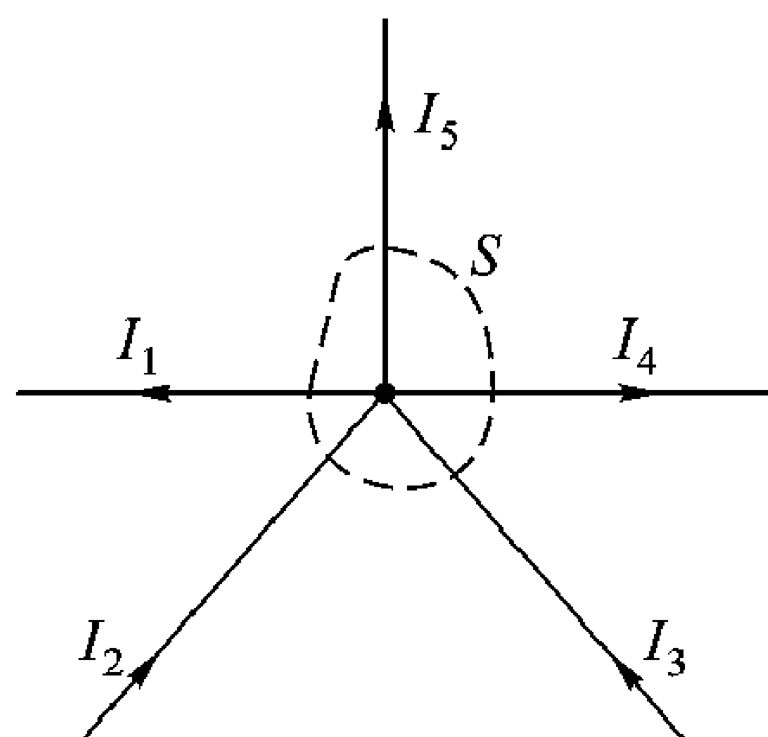


图 11－2　基尔霍夫电流定律，从任一节点流出电流等于零

11.1.5　边界条件

应用恒定电场的基本方程（11.1.1）、（11.1.2）解具体问题时，需要利用恒

定电场中导体交界面(见图 11－3)的边界条件。交界面两旁导体的电导率分别为 σ_1、σ_2。

与 5.1 节导出介质交界面边界条件所做的一样，从 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$ 可得

$$E_{t1}=E_{t2} \tag{11.1.12}$$

式中下标 t 表示电场的切向分量，式(11.1.12)就表示导体交界面两旁电场的切向分量连续。

从 $\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$ 可得

$$J_{n1}=J_{n2} \tag{11.1.13}$$

式中下标 n 表示电流的法向分量。

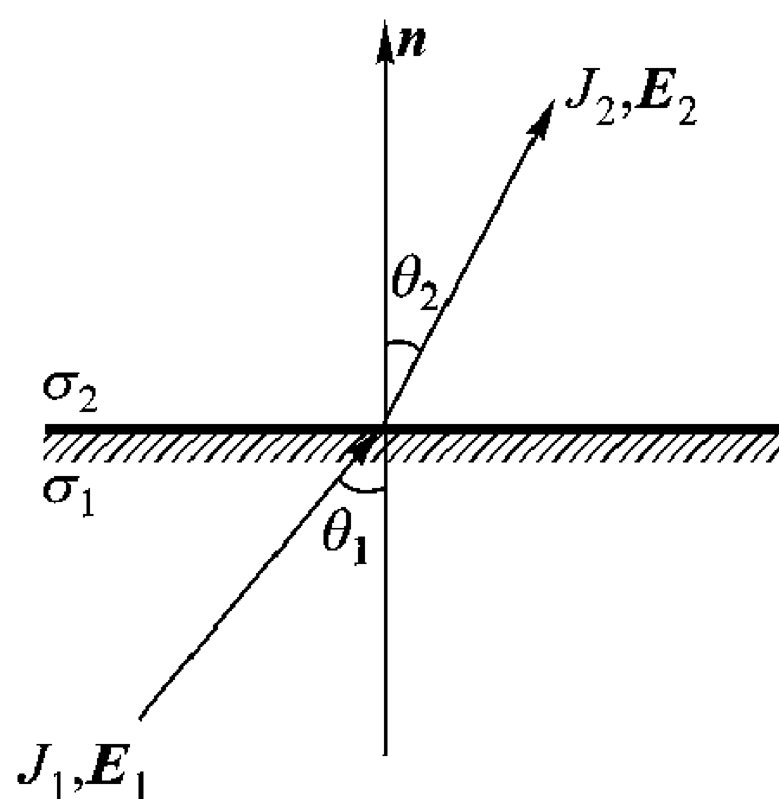


图 11－3 导体交界面

因为 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$，所以从拉普拉斯方程解恒定电场问题时，式(11.1.13)可写为

$$\sigma_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}=\sigma_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial n_2} \tag{11.1.14}$$

还有一个边界条件就是电位 Φ 连续

$$\Phi_1=\Phi_2 \tag{11.1.15}$$

例 11－1 如图11－4，内导体半径为 a、外导体半径为 c 的同轴线内填充两种漏电媒质，其介电常数分别为 ε_1 和 ε_2，电导率分别为 σ_1、σ_2，分界面为 $r=b$ 的圆柱面。若在内外导体间加电压 V，求内外导体的电场强度 $\boldsymbol{E}$，电流密度 $\boldsymbol{J}$ 及 $r=b$ 界面上的自由电荷。

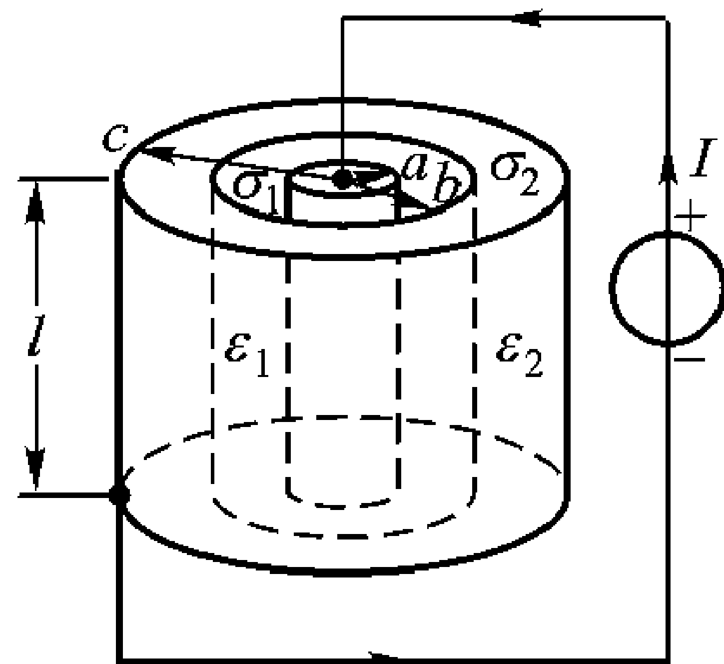


图 11－4 例 11－1 图

解： 设加电压 V 后内导体单位长度的带电量为 ρ_l；由于加电压 V 后有沿着径向的漏电流，故在 $r=b$ 的界面上有自由面电荷 ρ_{lb}分布，鉴于系统结构的对称性，ρ_{lb}是均匀分布的。根据高斯定理，内外导体电场的形式解为

$$\boldsymbol{E}_1=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_1\rho}\boldsymbol{\rho}_0 \quad (a<\rho<b),\quad \boldsymbol{E}_2=\frac{\rho_l+\rho_{lb}}{2\pi\varepsilon_2\rho}\boldsymbol{\rho}_0 \quad (b<\rho<c)$$

当 $\rho=b$ 时，应用边界条件 $J_{n1}=J_{n2}$，因为本题中，电流只有法向分量，故有 $J_1=J_2$，或

$$\sigma_1E_1=\sigma_2E_2 \qquad (\rho=b)$$

将 $\rho=b$ 的 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$ 代入上式得到

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}\rho_l=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}(\rho_l+\rho_{lb}) \quad 或 \quad \rho_l+\rho_{lb}=\frac{\sigma_1\varepsilon_2}{\sigma_2\varepsilon_1}\rho_l$$

内外导体间电压为

$$V = \int_a^b E_1 \mathrm{d}\rho + \int_b^c E_2 \mathrm{d}\rho = \int_a^b \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_1\rho}\mathrm{d}\rho + \int_b^c \frac{\rho_l + \rho_{lb}}{2\pi\varepsilon_2\rho}\mathrm{d}\rho$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_1\sigma_2}\left(\sigma_2 \ln\frac{b}{a} + \sigma_1 \ln\frac{c}{b}\right)$$

所以

$$\rho_l = \frac{2\pi\varepsilon_1\sigma_2 V}{\sigma_2 \ln\frac{b}{a} + \sigma_1 \ln\frac{c}{b}}$$

代入电场强度的形式解中，并注意到 $\rho_l + \rho_{lb} = \frac{\sigma_1\varepsilon_2}{\sigma_2\varepsilon_1}\rho_l$，得到

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{\sigma_2 V}{\left(\sigma_2 \ln\frac{b}{a} + \sigma_1 \ln\frac{c}{b}\right)\rho}\boldsymbol{\rho}_0, \quad \boldsymbol{E}_2 = \frac{\sigma_1 V}{\left(\sigma_2 \ln\frac{b}{a} + \sigma_1 \ln\frac{c}{b}\right)\rho}\boldsymbol{\rho}_0$$

根据 $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$，两种导电媒质中电流密度的数学表达式可统一为

$$\boldsymbol{J} = \frac{\sigma_1\sigma_2 V}{\left(\sigma_2 \ln\frac{b}{a} + \sigma_1 \ln\frac{c}{b}\right)\rho}\boldsymbol{\rho}_0$$

$\rho = b$ 柱面上自由面电荷为

$$\rho_s = D_{n2} - D_{n1} = \varepsilon_2 \frac{J_{n2}}{\sigma_2} - \varepsilon_1 \frac{J_{n1}}{\sigma_1} = J_n\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)$$

$$= \frac{(\sigma_1\varepsilon_2 - \sigma_2\varepsilon_1)V}{\left(\sigma_2 \ln\frac{b}{a} + \sigma_1 \ln\frac{c}{b}\right)b}$$

11.1.6 恒定电场和静电场的类比

考虑两个相同的平行板系统[见图 11－5 (a)和(b)]，平板的截面积为 A，两平板间距为 d。在图 11－5 (a)中，两平板间用介电系数为 ε 的介质填充，两板间电位差为 V，假定每块板上充有电荷 Q，两平行平板系统构成的电容量为 C，其电位函数 $\Phi(y)$为

$$\Phi(y) = V\frac{y}{d} \tag{11.1.16}$$

由此可得

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{y}_0 \frac{V}{d} \tag{11.1.17}$$

$$\rho_s = \varepsilon E = \frac{\varepsilon V}{d} \tag{11.1.18}$$

$$Q = \rho_s A = \frac{\varepsilon V A}{d} \tag{11.1.19}$$

$$C=\frac{Q}{V}=\frac{\varepsilon A}{d} \tag{11.1.20}$$

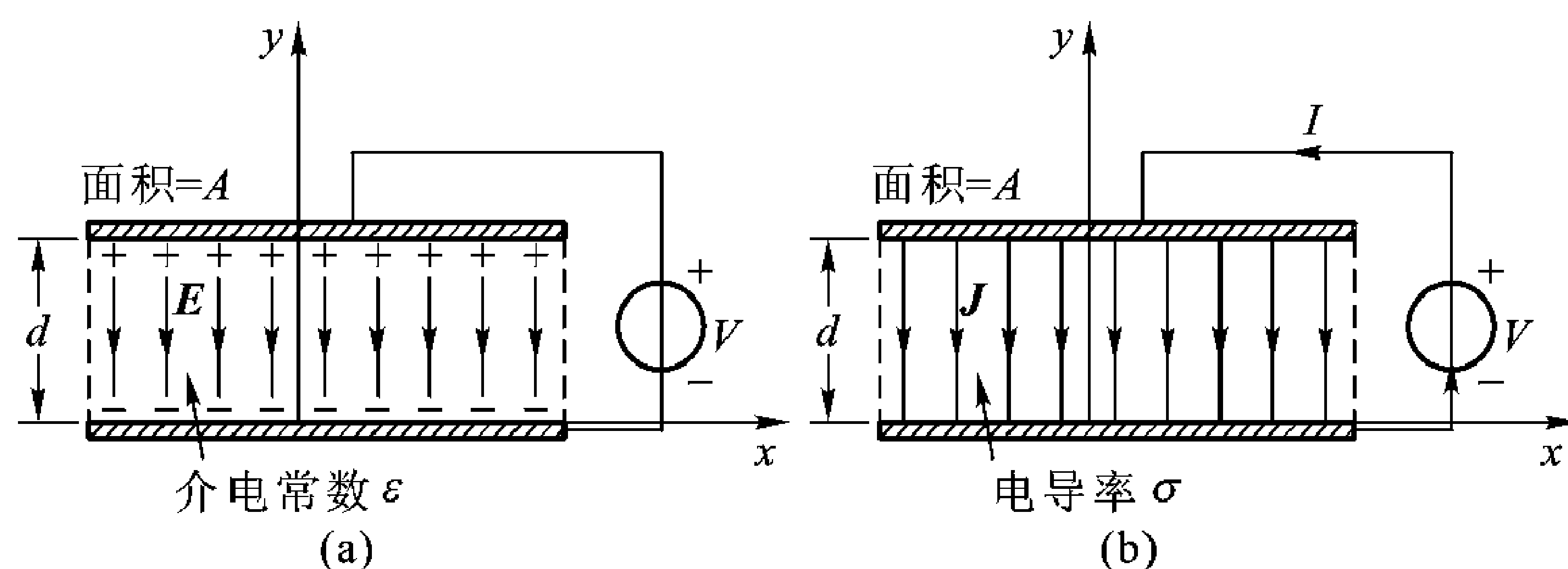


图 11－5 静电场问题和恒定电场问题的类比

(a) 静电场问题 (b) 恒定电流问题

图 11－5 (b)所示系统，两平板间为电导率 σ 的媒质填充，两平板间也有电位差 V，假定 I 是总电流，G 是电导，则有

$$\Phi(y)=V\frac{y}{d} \tag{11.1.21}$$

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{y}_0\frac{V}{d} \tag{11.1.22}$$

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{y}_0\frac{\sigma V}{d} \tag{11.1.23}$$

$$I=JA=\frac{\sigma VA}{d} \tag{11.1.24}$$

$$G=\frac{I}{V}=\frac{\sigma A}{d} \tag{11.1.25}$$

仔细比较式(11.1.16)～(11.1.25)，会发现静电问题和直流电流问题极其相似，这种相似性列于表 11－1。

表 11－1 类 比 原 理

静电场问题	直流电流问题
Φ	Φ
$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$	$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$
ε	σ
Q (导电板上总电荷)	I (离开导电板电流)
ρ_s (导电板表面电荷密度)	J_{n} (离开导电板表面电流密度)
C (电容)	G (电导)

由此可见，如果所研究静电问题几何特性与恒定电流问题相同，如图11－5 (a)和 (b)所示情况，那么恒定电流问题中电位函数和电场表达式就跟静电问

题相同，只要将 ε 换成 σ，Q 换成 I。此外，静电场问题中电容就成为恒定电流问题中的电导。

例 11－2 同轴线内导体半径为 a，外导体半径为 b，填充介质的介电系数为 ε，电导率为 σ，见图 11－6，当该系统与直流电池连接时求该系统的等效电路，假定 $l \gg b > a$。

解：因为同轴线长度 $l \gg a$，可以当作无限长的同轴线处理，电场与电流均在径向，从式(10.6.21)得单位长度的电容为

$$\frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{b}{a}}$$

所以电容

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{b}{a}}$$

用类比原理得到

$$G = \frac{2\pi\sigma l}{\ln \frac{b}{a}}$$

以及

$$R = \frac{\ln \frac{b}{a}}{2\pi\sigma l}$$

图 11－6 同时给出等效电路。

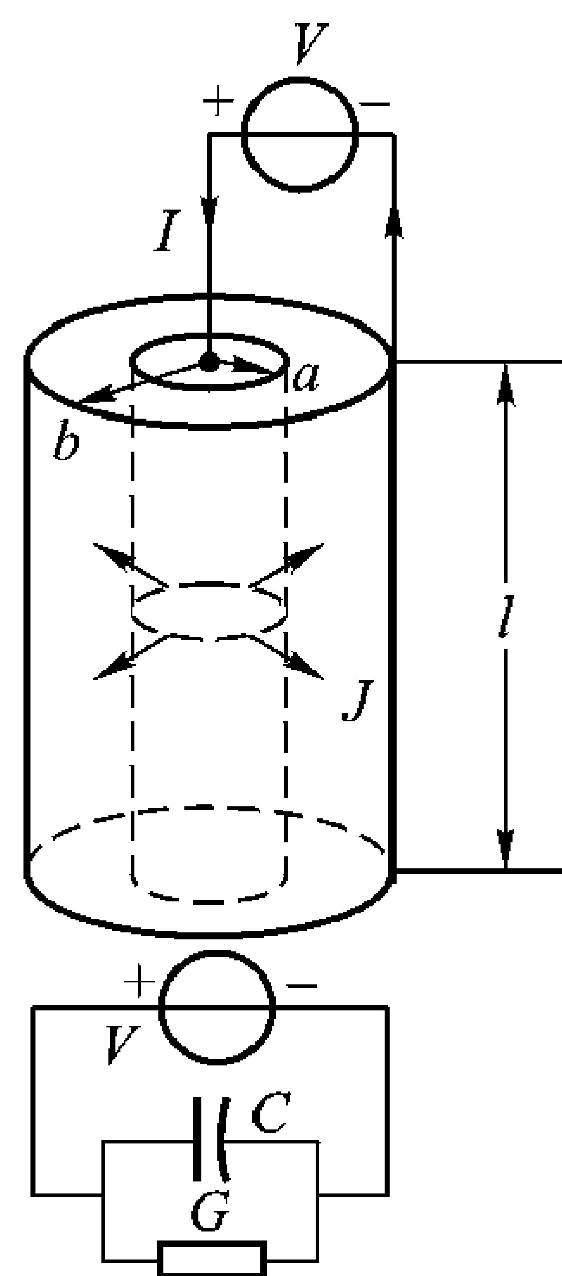


图 11－6 用相似原理求同轴线的电导与电阻

11.2 恒定磁场

本节重点讨论恒定电流产生的恒定磁场。时谐电流产生的时变磁场我们已在第 8 章分析过。当时谐电流的角频率 $\omega \to 0$ 时产生的磁场就简化为本节讨论的由恒定电流激励的恒定磁场。

11.2.1 基本方程

恒定电流不随时间变化，所有对 $\frac{\partial}{\partial t}$ 的运算都为零，麦克斯韦方程组中有两个方程为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{11.2.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{11.2.2}$$

对于简单介质，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，$\mu$ 是常数，式(11.2.2)又可写成

$$\nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{11.2.3}$$

式(11.2.1)、(11.2.2)或式(11.2.3)就是描述恒定磁场的基本方程，因为旋度的散度等于零，故 $\boldsymbol{B}$ 可以和矢量位 $\boldsymbol{A}$ 联系起来，使得

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{11.2.4}$$

这样定义的 $\boldsymbol{B}$ 满足式(11.2.2)。

对于时变场，矢量位 $\boldsymbol{A}$ 满足的方程为式(8.2.7)。当 $\omega \to 0$（或 $k \to 0$）就得到恒定磁场 $\boldsymbol{B}$ 的矢量位 $\boldsymbol{A}$ 满足的方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \tag{11.2.5}$$

对于无界均匀介质，其解也可从式(8.2.10)当 $\omega \to 0$（或 $k \to 0$）时得到

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' \tag{11.2.6}$$

将式(11.2.6)代入式(11.2.4)，并利用 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$ 关系，得到

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu} = \frac{\nabla \times \boldsymbol{A}}{\mu} = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\right)\mathrm{d}V' \tag{11.2.7}$$

这里我们调换了积分与微分次序，因为积分是对源（电流）所在坐标（$\boldsymbol{r}'$），而微分是对研究场点坐标（$\boldsymbol{r}$）。注意，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$是矢量，$\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$是标量，利用矢量运算恒等关系 $\nabla \times (\Phi\boldsymbol{A}) = \nabla\Phi \times \boldsymbol{A} + \Phi\nabla \times \boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')$只是源所在坐标 $\boldsymbol{r}'$ 的函数，故 $\nabla \times \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') = 0$，而

$$\nabla \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = -\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{11.2.8}$$

于是式(11.2.7)成为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V' \tag{11.2.9}$$

这就是毕奥－萨伐定理。

此式与静电场中泊松积分式(10.2.1)作用相同，但计算要复杂得多，一般要用数值求解，对一些简单结构，也可得到解析解。

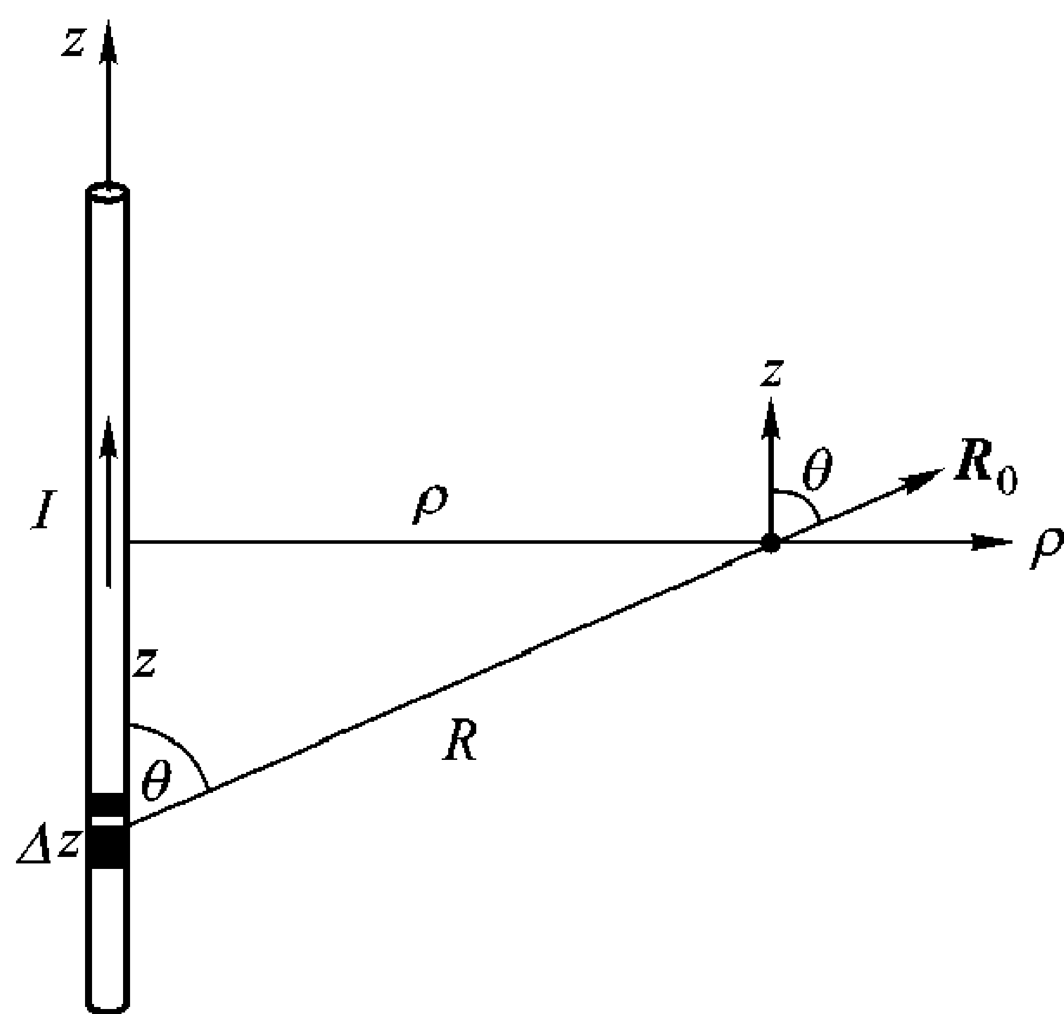


图 11－7　用毕奥－萨伐定理求电流 I 流过无限长导线产生的磁场

例 11－3　截面为 S 的无限长直导线沿 z 方向有恒定电流 I 流过（见图 11－7），求此电流产生的磁场 $\boldsymbol{H}$。

解：对于图 11－7 所示无限长导线，

当电流 I 流过时

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}V' = I\mathrm{d}z'\boldsymbol{z}_0$$

代入式(11.2.9)，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{z}_0\times\boldsymbol{R}_0}{R^2}\mathrm{d}z' \\ &= \boldsymbol{\varphi}_0\frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\theta}{R^2}\mathrm{d}z' \\ &= \boldsymbol{\varphi}_0\frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho\mathrm{d}z'}{(\rho^2+z'^2)^{3/2}} \\ &= \boldsymbol{\varphi}_0\frac{I}{2\pi\rho}\end{aligned} \tag{11.2.10}$$

式中 $R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，$\boldsymbol{R}_0=\dfrac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$是$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$方向单位矢量，$\rho$ 是所研究场点到导线的垂直距离，$\boldsymbol{\varphi}_0$ 是柱坐标 φ 方向单位矢量，θ 是 $\boldsymbol{R}_0$ 与 z 轴夹角。由式(11.2.10)可见，无限长导线流过直流电流产生的静磁场只有 φ 分量，其大小随 ρ 的增加按 $1/\rho$ 减小。

11.2.2　恒定磁偶极子

任何平面上的通电导线小圆环可定义为磁偶极子(见图 11－8)。如果电流随时间作简谐变化，就是时谐磁偶极子；如果电流不随时间变化，就叫做恒定磁偶极子。时谐磁偶极子产生的时谐磁场为式(8.4.8)描述。当 $\omega\to 0$ (或 $k\to 0$)时，就得到恒定偶极子产生的恒定磁场

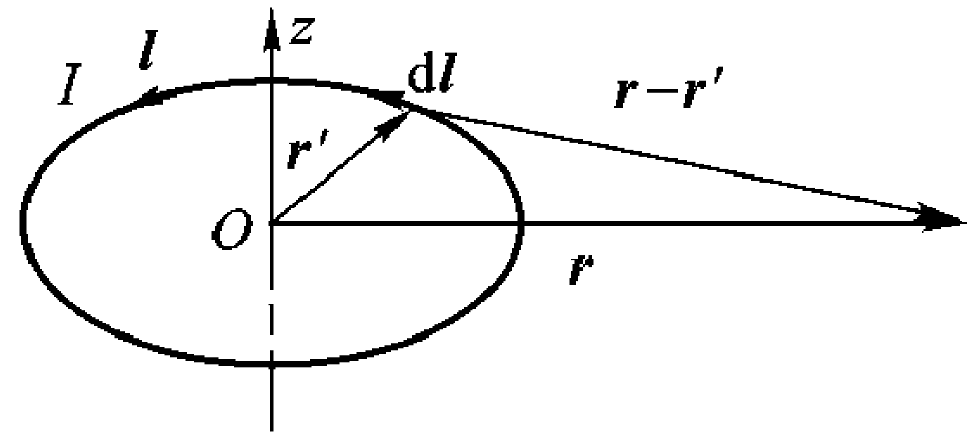


图 11－8　磁偶极子示意图

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{IS}{4\pi r^3}(\boldsymbol{r}_0 2\cos\theta + \boldsymbol{\theta}_0\sin\theta) \tag{11.2.11a}$$

或

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{m}{4\pi r^3}(\boldsymbol{r}_0 2\cos\theta + \boldsymbol{\theta}_0\sin\theta) \tag{11.2.11b}$$

式中 $m=IS$，为偶极子的磁矩，$S=\pi a^2$ 为圆环面积，a 为电流圆环半径。

将上式与式(10.2.10)比较，在远离场源处，恒定磁偶极子产生的磁场 $\boldsymbol{H}$ 与静电偶极子产生的电场有几乎相同的数学表达式(如果将 m 定义为 μIS)。当然在物理本质上两者有差别，恒定磁偶极子和静电偶极子附近的场分布不同，$\boldsymbol{H}$ 线是闭合的，而 $\boldsymbol{E}$ 线是不闭合的。

例 11－4　根据式(11.2.11)计算半径为 a 的磁偶极子轴线上的磁场 $\boldsymbol{H}$。

解：在图 11－8 所示坐标系中，轴线上 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{z}_0$，$\theta=0°$，$r=\sqrt{a^2+z^2}$，所

以轴线上 $\boldsymbol{H}$ 为

$$\boldsymbol{H} = \frac{IS}{2\pi(a^2+z^2)^{3/2}}\boldsymbol{z}_0 \tag{11.2.12}$$

11.2.3 利用安培定理求恒定磁场

无限长线电流产生的恒定磁场

对于静电场问题计算，基于对称性适当选择高斯面，可以方便地利用高斯定理求出电场。对于恒定磁场，基于对称性，利用安培定理同样可方便地求出电流产生的磁场。

根据 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$，利用斯托克斯定理得到

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = I \tag{11.2.13}$$

对于前面计算过的电流 I 流过无限长导线的情况(图 11-9)，选择圆柱坐标系，z 轴与导线重合，取积分路径为以导线为中心的圆，其半径为 ρ，磁场只有 φ 分量，所以式(11.2.13)成为

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi \rho \mathrm{d}\varphi = I$$

利用结构对称性，H_φ 与 φ 无关，可拿到积分号外，于是有

$$H_\varphi 2\pi\rho = I$$

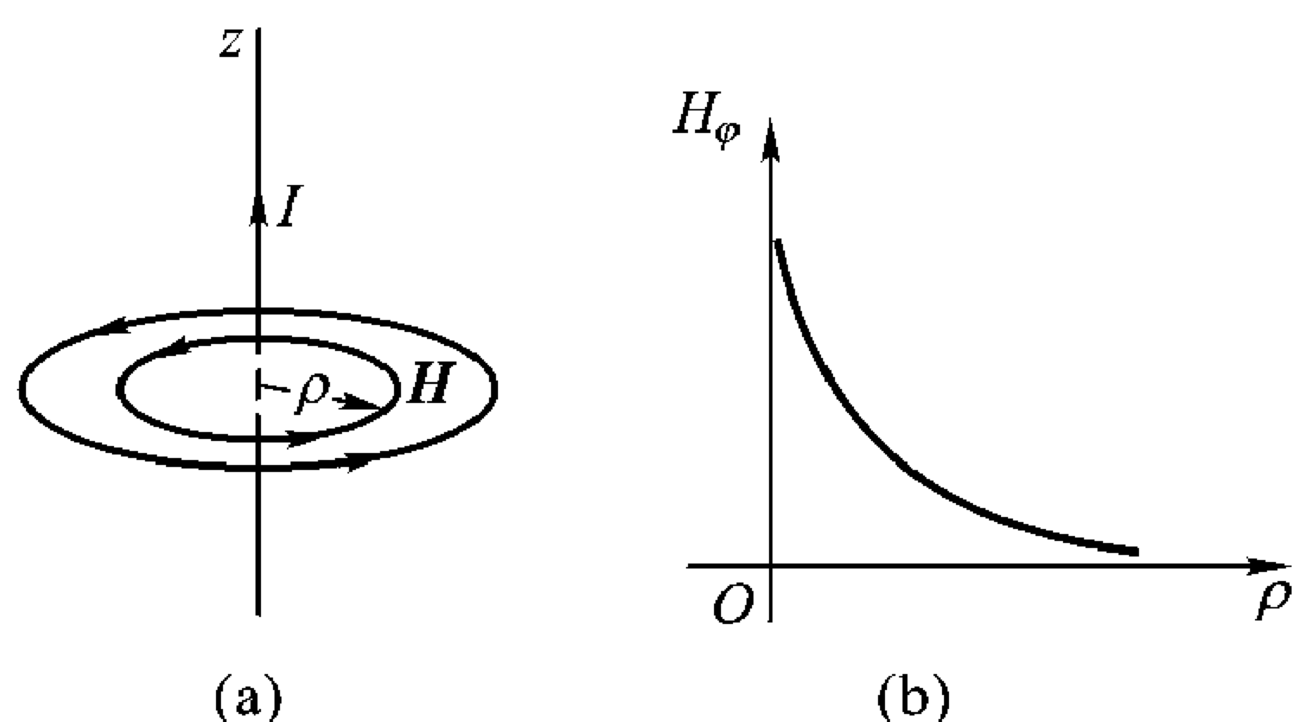


图 11-9 通电直导线产生的磁场

(a) 通电直导线及其周围的磁场 (b) 磁场分布 $H_\varphi-\rho$

$$H_\varphi = \boldsymbol{\varphi}_0\frac{I}{2\pi\rho}$$

与用毕奥-萨伐定理得到的结果一致。

片电流产生的恒定磁场

如图 11-10 (a)所示的导电薄片，在 z_0 方向有直流电流流过。图 11-10 (b)是它的端面图。电流密度 J_s 单位为安培每米(A/m)。导电薄片可以看成由无限多个平行的薄导线构成[见图 11-10(c)]。由式(11.2.10)可知，每一薄片导线产生 φ 方向磁场 $\boldsymbol{H}$。当无限多薄片导线拼装成导电薄片时，所有导电薄片上面的磁场相加得到 $-\boldsymbol{x}_0$ 方向磁场；同理，所有导电薄片下面的磁场相加得到 $+\boldsymbol{x}_0$ 方向磁场；在 $\boldsymbol{y}_0$ 方向磁场彼此抵消。记住磁场分布的这种图景，有助于我们对磁场的定量计算。取如图 11-10 (b)所示的积分路径，并应用安培

定理，可得

$$\int_{AB+BC+CD+DA} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = J_s W$$

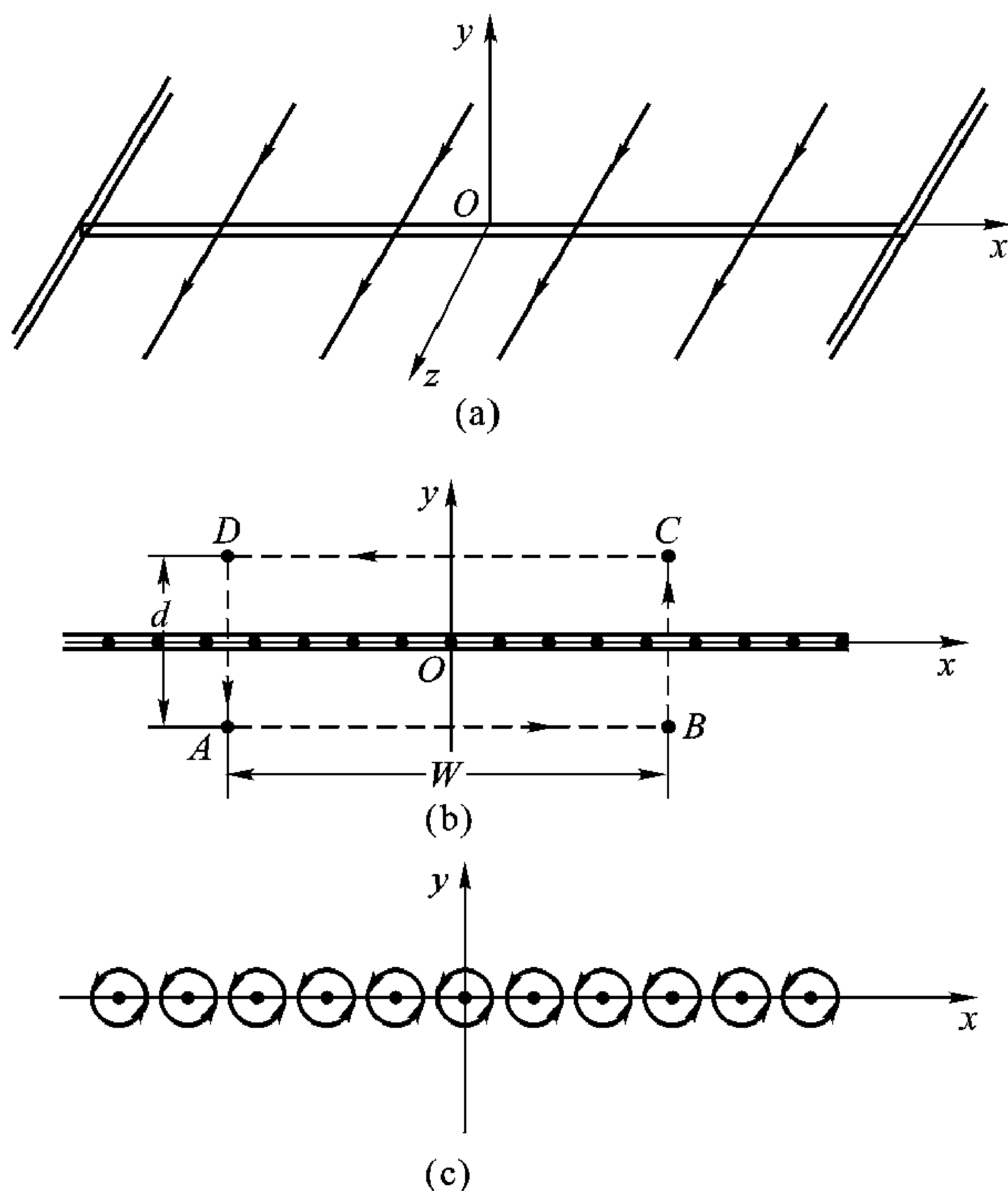


图 11-10 片电流产生的磁场

(a) z_0 方向片电流，电流密度为 $\boldsymbol{J}_s$（单位为 A/m）

(b) (a)的端面图，电流从纸面流出

(c) 导电薄片可以看成无限多平行薄导线的组合

而

$$\boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \begin{cases} H_x d_x & \text{(on } AB\text{)} \\ 0 & \text{(on } BC\text{)} \\ (-H_x)(-d_x) & \text{(on } CD\text{)} \\ 0 & \text{(on } DA\text{)} \end{cases}$$

由于对称性，H_x 与 x 无关，由此可得

$$2H_x W = J_s W$$

或

$$\boldsymbol{H} = \begin{cases} \dfrac{-\boldsymbol{x}_0 J_s}{2} & (y > 0) \\ \dfrac{\boldsymbol{x}_0 J_s}{2} & (y < 0) \end{cases} \tag{11.2.14}$$

螺线管产生的磁场

图 11－11 所示螺线管具有柱形结构的特点，其线圈密度为每米 n 圈。下面讨论直流电流 I 流过螺线管产生的磁场。由于结构对称性，磁场强度与坐标 φ 无关，如果假定螺线管很长，磁场强度也与 z 无关，所以场量只是半径 ρ 的函数。磁场 $\boldsymbol{H}$ 可表示为 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\rho}_0H_\rho(\rho)+\boldsymbol{\varphi}_0H_\varphi(\rho)+z_0H_z(\rho)$。$H_\rho$，$H_\varphi$，$H_z$ 分别为磁场 $\boldsymbol{H}$ 在 $\boldsymbol{\rho}_0$，$\boldsymbol{\varphi}_0$，z_0 方向的分量。下面将证明螺线管产生的磁场 H_ρ，H_φ 等于零。

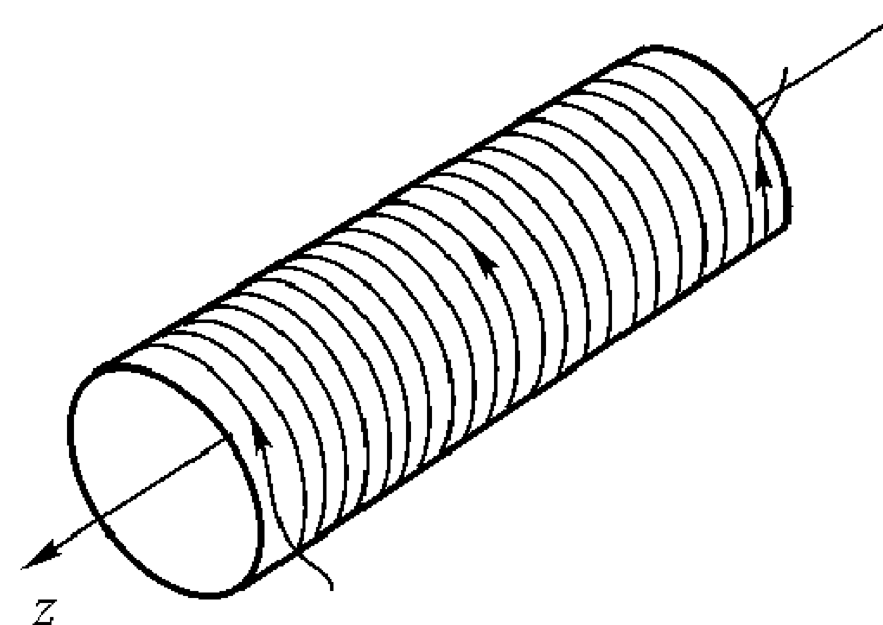


图 11－11　螺线管，其密度为每米 n 圈

在半径为 ρ，长度为 l 的圆柱体 V 内[见图 11－12(a)]对(11.2.3)进行积分，可得

$$\int_v (\nabla \cdot \boldsymbol{H})\,\mathrm{d}V = 0$$

应用散度定理，上面的体积分可转化为包围柱体 V 表面的面积分

$$\oint \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n}_0 \mathrm{d}S = 0$$

积分表面可分解为一个柱面及两个端面，两个端面上的积分彼此抵消，沿柱面的积分可得

$$2\pi\rho l H_\rho = 0$$

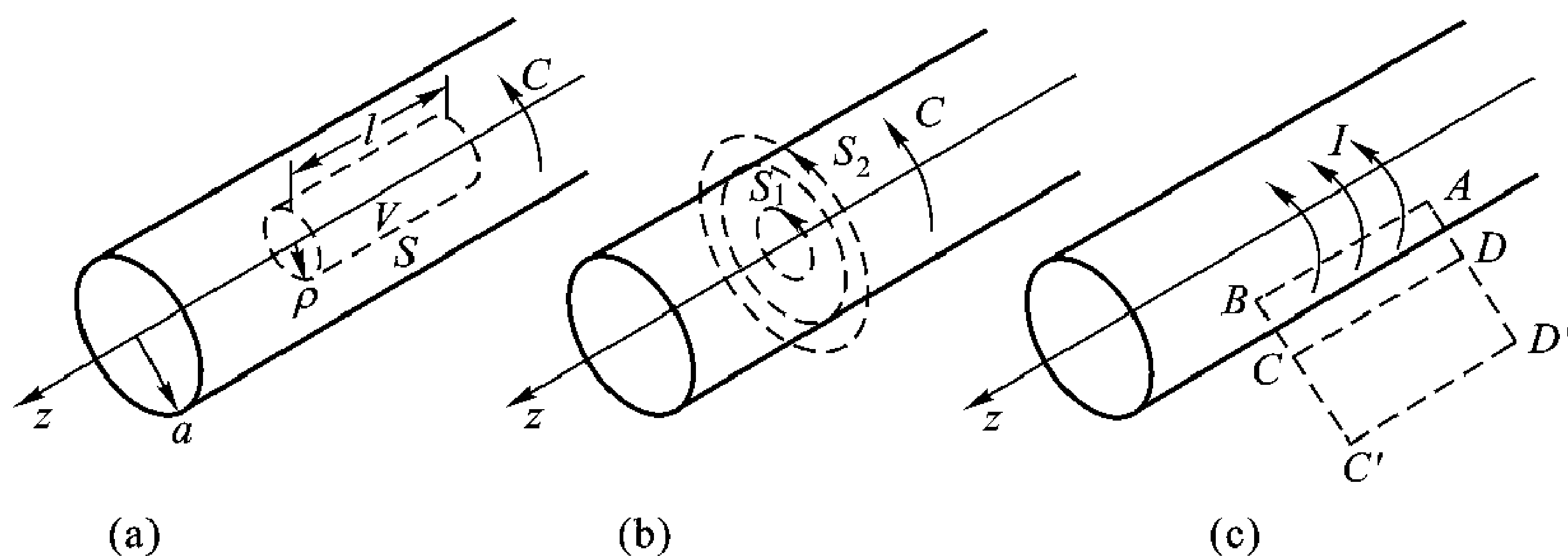


图 11－12　无限长螺线管内只有轴向磁场

(a) $\nabla\cdot\boldsymbol{H}$ 在被表面 S 包围的体积 V 内的积分　(b) $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿路径 S_1，S_2 的线积分

(c) $\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 沿路径 $A-B-C-D$ 或 $C-C'-D'-D$ 的积分

这就证明螺线管产生的磁场其径向分量 $H_\rho=0$。假定图 11－12 (b)所示的路径 S_1、S_2 离螺线管两端足够远，因为没有任何电流穿过 S_1 或 S_2 围成的表面，根据安培定律式(11.2.13)，可得

$$\oint_{s_1 or s_2} H_\varphi \rho \mathrm{d}\varphi = 0$$

因为 H_φ 与 φ 无关，H_φ 可拿到积分号外，所以上式成为

$$2\pi\rho H_\varphi = 0$$

磁场的 φ 分量 $H_\varphi = 0$，所以螺线管产生的磁场只有 z 分量 H_z。

下面沿路径 $DCC'D'$ [见图 11－12(c)]对式(11.2.13)进行积分，可得

$$l\ (H_{z\mathrm{on}DC} - H_{z\mathrm{on}C'D'}) = 0$$

因为 CD，$C'D'$ 的位置可任意放置，上式将导致如下结果

$$H_z = 常数 \qquad (\rho > a)$$

因为 $\rho \to \infty$，H_z 必须趋于零，所以常数必须为零，即

$$H_z = 0 \qquad (\rho > a) \tag{11.2.15a}$$

同样沿路径 $ABCD$ 对式(11.2.11)进行积分，可得

$$lH_z = nIl$$

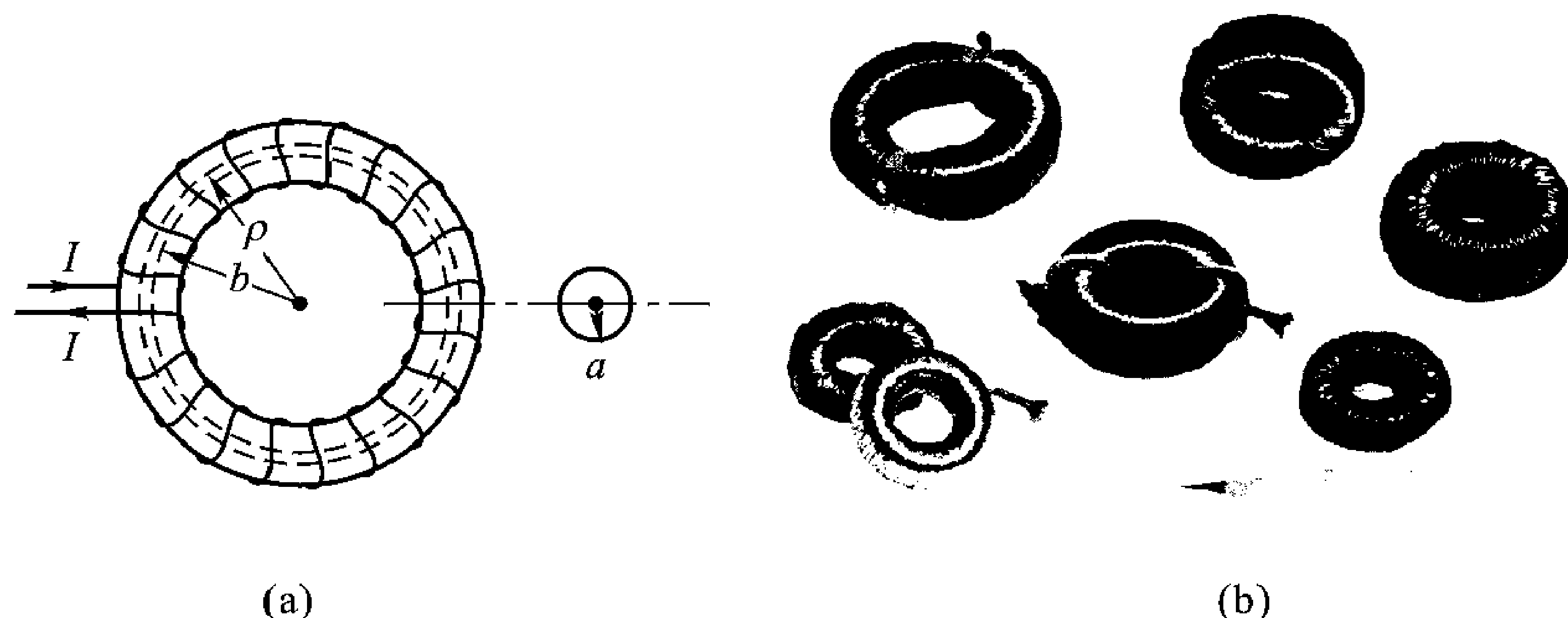
即

$$H_z = nI \qquad (\rho < a) \tag{11.2.15b}$$

由此可得如下结论，直流电流 I 流过无限长螺线管在螺线管内部产生的磁场只有 z 分量 H_z，其大小等于 nI，n 为线圈密度(圈/m)。螺线管外部，磁场等于零。

环形螺线管产生的磁场

将螺线管弯成一圆，就成为环形螺线管[见图 11－13(a)]，所以在环形螺线管内部磁场只有 φ 分量，环形螺线管外部没有磁场。



(a) (b)

图 11－13 环形螺线管

(a) 环形螺线管示意图 (b) 环形螺线管实例

将安培定律式(11.2.13)的积分路径取为环形螺线管内半径为 ρ 的圆，可得

$$2\pi\rho H_{\varphi} = NI \tag{11.2.16}$$

式中 N 为环形螺线管的总圈数，所以

$$H_{\varphi} = \frac{NI}{2\pi\rho} \qquad [(b-a) < \rho < (b+a)] \tag{11.2.17}$$

如果 $b >> a$，H_{φ} 在线圈内近似均匀，其平均值为

$$H_{\varphi} = \frac{NI}{2\pi b} \qquad (b >> a) \tag{11.2.18}$$

注意 $N/(2\pi b)$ 就是每米圈数，所以，如果 $b >> a$，则式(11.2.16)与式(11.2.15b)相等。因为环形螺线管可看成由柱形螺线管弯成圆而成，φ 方向磁场是逆时针的，如果电流改变方向，φ 方向磁场就改为顺时针。

11.3 磁场对电流的作用——磁力和转矩

洛伦兹力方程为

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{11.3.1}$$

只考虑静电场时，式中第二项不起作用。本章只考虑恒定磁场，第一项不起作用，所以洛伦兹力方程为

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{11.3.2}$$

式(11.3.2)表示磁场 $\boldsymbol{B}$ 作用于以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动电荷 q 的作用力。如果有很多电荷以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，就构成电流。参看图 11－14，假定单位体积内有 n 个电荷并以恒速 $\boldsymbol{v}$ 运动，每个电荷的电量为 q，那么流过截面 A 的电流为

$$I = nqA\boldsymbol{v} \tag{11.3.3}$$

n 为电荷密度，q 为电荷的电量，v 为电荷运动速度。

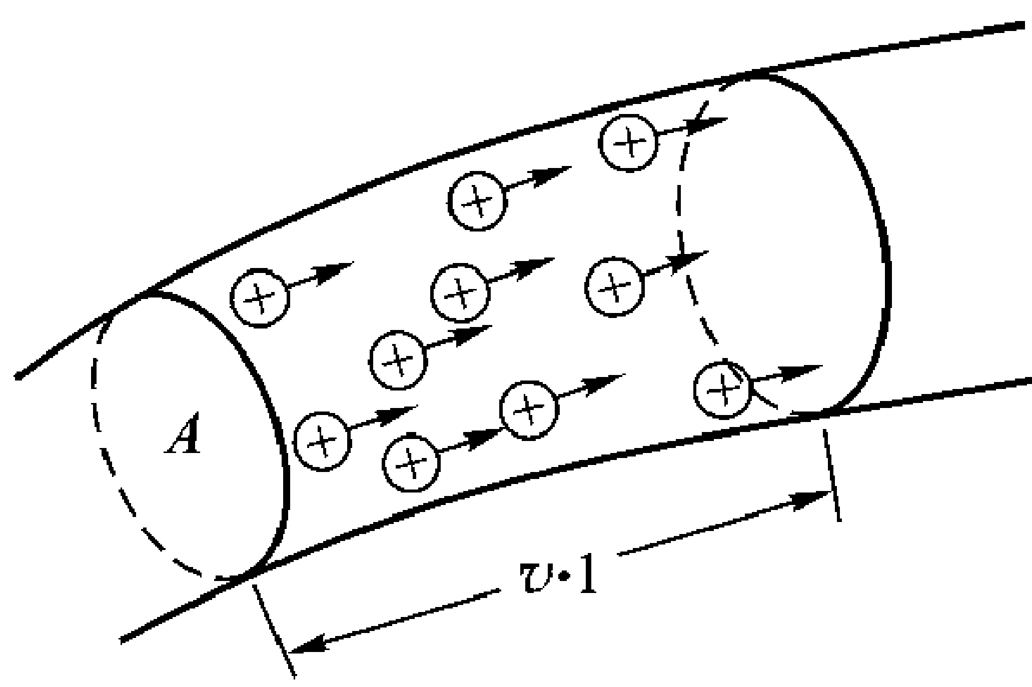


图 11－14 流过截面 A 的电流 $I = nqAv$

电流密度 $\boldsymbol{J}$ 定义为

$$\boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{I}}{A} = nq\boldsymbol{v} \tag{11.3.4}$$

根据式(11.3.2)，磁场作用于体积 $\mathrm{d}V$ 内电荷总的作用力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = nq\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V \times \boldsymbol{B}$$

利用式(11.3.4)定义的 $\boldsymbol{J}$，上式可写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B})\mathrm{d}V \tag{11.3.5}$$

如果限定电荷在导体中运动，导体的总电流为 I，那么 $\boldsymbol{J}\mathrm{d}V = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\mathrm{d}l$ 为单元电流的长度，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向为电流沿导体流动的方向，由式(11.3.5)可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B} \tag{11.3.6}$$

式(11.3.6)表示当电流 I 流过导体时磁场对它的作用力。导体长度为 $\mathrm{d}l$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向就是电流方向。

例 11-5　荷电质点质量为 m，带电量为 q，以初速 $\boldsymbol{v}$ 在磁场 B_0 中运动，B_0 从纸面进去(见图 11-15)，在 $-z_0$ 方向，求质点运动轨迹。

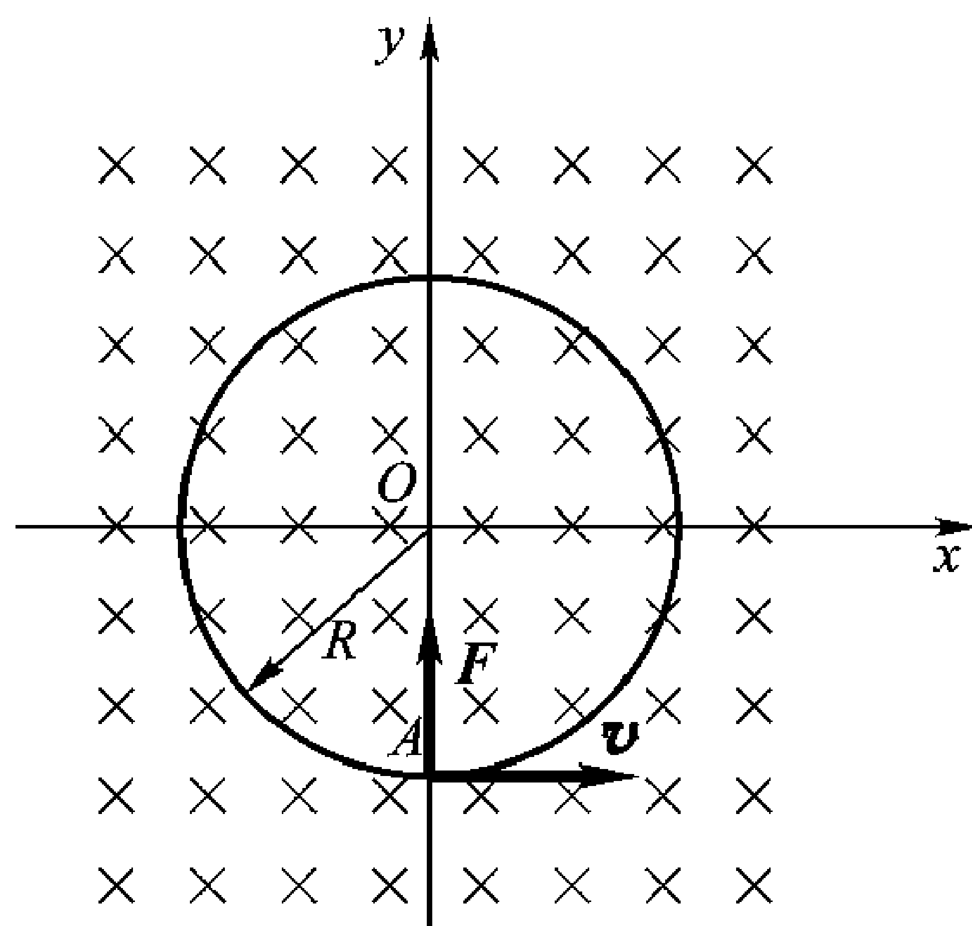


图 11-15　在静磁场作用下，荷电质点作圆周运动

解：假定质点初始位置为 A，且具有速度 $\boldsymbol{v} = v_0\boldsymbol{x}_0$，根据式(11.3.2)，作用于荷电的力

$$\boldsymbol{F} = qv_0\boldsymbol{x}_0 \times B_0(-\boldsymbol{z}_0) = qv_0B_0\boldsymbol{y}_0$$

所以磁场力垂直于速度 $\boldsymbol{v}$，由于磁场力是 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的叉积，磁场力永远与运动速度 $\boldsymbol{v}$ 垂直，质点只能作圆周运动。为维持圆周运动，磁场力必须等于离心力，有

$$qv_0B_0 = m\frac{v_0^2}{R}$$

所以圆周运动的半径为

$$R = \frac{mv_0}{qB_0} \tag{11.3.7a}$$

注意圆周运动的角频率 ω_c 与速度 v_0 无关，为

$$\omega_c = \frac{v_0}{R} = \frac{qB_0}{m} \tag{11.3.7b}$$

$f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi}$，称为荷电质点在磁场 B_0 中的回旋频率。如果我们将具有不同初速度但荷电相同的质点注入磁场，它们作圆周运动的半径虽然不同，但回旋频率是一样的。根据式(11.3.7a)，运动较快的荷电质点具有较大的圆周运动半径，运动较慢的荷电质点则具有较小的圆周运动半径，但它们运动的速度大小不变。磁场力的作用只是改变运动方向。

同位素分离

同位素是指原子量不同但在元素周期表中占有相同位置的元素。自然界中有几百种不同的同位素。最熟知的是 3 种铀的同位素，即铀 238 (99.28%)，铀 235 (0.715%)以及铀 234 (0.005%)。因为同位素在元素周期表中占据同一位置，它们的化学性质相似，所以要用不同于化学的其他方法才能将它们从自然界的混合物中分离。图 11-16 示出了分离同位素的方法。

首先将同位素的化合物蒸发，然后用气体放电使之电离，再将电离生成的离子通过平行板区域的隙缝。离子通过平行板区域被平行板间电场加速，其所得动能比平均热能要大数千倍，所以离子的动能可近似为 qV，其中 q 为被电离的同位素离子带的电量，V 是两平板间的电位差。注意离子的动能与质量无关，所以所有同位素离子都具有相同的动能。但是，因为不同的同位素有不同的质量，不同的同位素离子就具有不同的速度，^{238}U 与 ^{235}U 的速度比为

$$\frac{v_5}{v_8}=\left(\frac{m_8}{m_5}\right)^{1/2}$$

图 11－16　同位素分离装置

v_5，m_5 分别为 ^{235}U 离子的速度和质量，v_8，m_8 分别为 ^{238}U 离子的速度和质量。

这些同位素离子被注入到具有很强均匀磁场的区域。根据例 11－5 得到的结果，轻、重离子具有不同的圆周运动半径，且

$$\frac{R_5}{R_8}=\frac{m_5v_5}{m_8v_8}=\left(\frac{m_5}{m_8}\right)^{1/2}=\left(\frac{235}{238}\right)^{1/2}=0.993\ 7$$

式中 R_5、R_8 分别为 ^{235}U、^{238}U 离子进入均匀磁场区作圆周运动的半径。根据 ^{235}U、^{238}U 离子圆周运动半径的不同，在恰当位置安放 ^{235}U、^{238}U 离子的接收器，即可将 ^{235}U、^{238}U 分离开。世界上第一个依据图 11－16 分离铀的实用装置建成于 1942 年。

霍耳效应

参看图 11－17（a），导电板内由于正电荷流动形成了电流 I。如果将该导

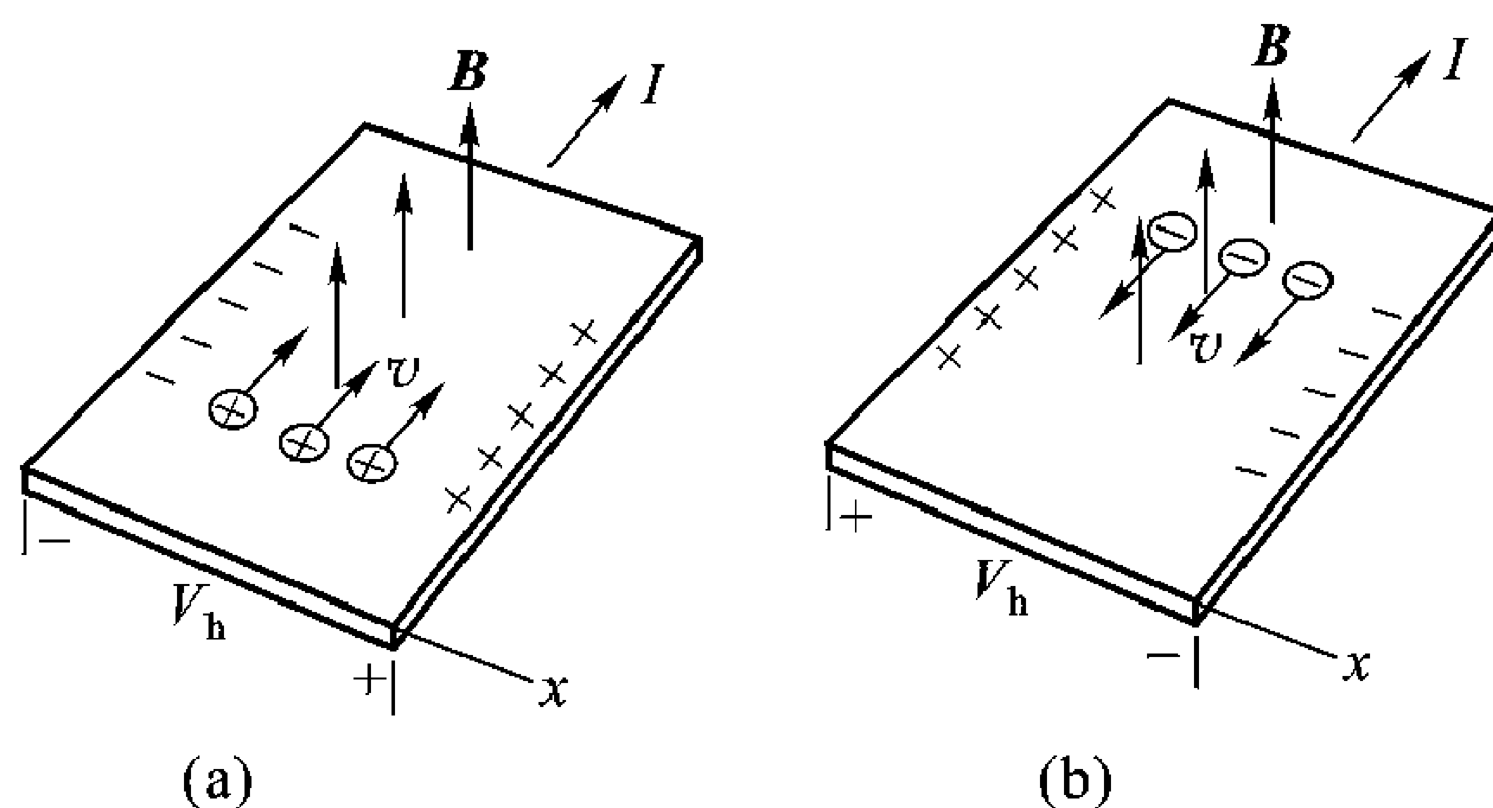


图 11－17　霍耳效应

（a）电流由空穴运动造成　（b）电流由电子运动造成

电板置于均匀磁场中，磁场与导电板垂直，由于磁场力 $\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$ 的作用，使正电荷偏向 $\boldsymbol{x}_0$ 方向，电荷的重新分布使导电板两侧面间产生一电压 V_h。当磁场消失时，V_h 就不存在。这个现象叫霍耳效应，电压 V_h 叫做霍耳电压。

如果电流是由负电荷运动引起的，由图 11－17（b）可见，霍耳电压与图 11－17（a）的极性相反。所以通过霍耳电压的测量可决定导电材料是 P 型半导体还是 N 型半导体（P 型半导体中，电流由带正电的空穴运动引起，而在 N 型半导体中，电流由带负电的电子运动引起）。

电子束的磁偏转

在阴极射线管或电视显像管中，电子束或者被静电场或者被恒定磁场偏转打到屏的预定点，使该点的屏发光。10.6 节描述了阴极射线管的工作原理。在图 10－41 中是偏转板内的静电场使电子束偏转。下面的例子将说明静电偏转系统可以被线圈产生的磁场偏转系统取代。假定电子以初速 $v_0=2\times10^7$ m/s 进入 $\boldsymbol{B}_0=5\times10^{-4}\boldsymbol{y}_0$ Wb/m^2 的恒定磁场区域（见图 11－18），磁场又被限制在 4 cm长的范围，电子进入均匀磁场区域后作圆周运动，其半径

$$R=\frac{mv_0}{qB_0}=0.228\ \text{m}$$

根据图 11－18 所示的坐标系统，电子速度 $\boldsymbol{v}$ 有两个分量：

$$v_x=v_0\cos\omega_c t \tag{11.3.8a}$$

$$v_z=-v_0\sin\omega_c t \tag{11.3.8b}$$

式中 $v_0=2\times10^7$ m/s，且

$$\omega_c=\frac{qB_0}{m}=8.78\times10^7\ \text{rad/s}$$

设电子进入磁场偏转区域的初始时刻 $t_0=0$，电子在磁场偏转区域的位置坐标（x，z）可由式（11.3.8）积分得出

$$x=\frac{v_0}{\omega_c}\sin\omega_c t$$

$$z=-\frac{v_0}{\omega_c}(1-\cos\omega_c t)$$

在磁偏转区域的出口，$x_1=0.04$，所以

$$\sin\omega_c t_1=\frac{0.04\omega_c}{v_0}=0.176$$

于是

$$\cos\omega_c t_1=0.984$$

所以电子飞出偏转磁场区域时，$x_1=0.04$ m，有

$$z_1 = -0.003\ 6\ \text{m}$$

电子一飞出偏转磁场区域，洛伦兹力不存在，电子将作直线运动，直线与 x 轴夹角 θ 有如下关系：

$$\tan\ \theta = \frac{-v_z}{v_x} = \frac{0.176v_0}{0.984v_0}$$

$$\theta = 10.1°$$

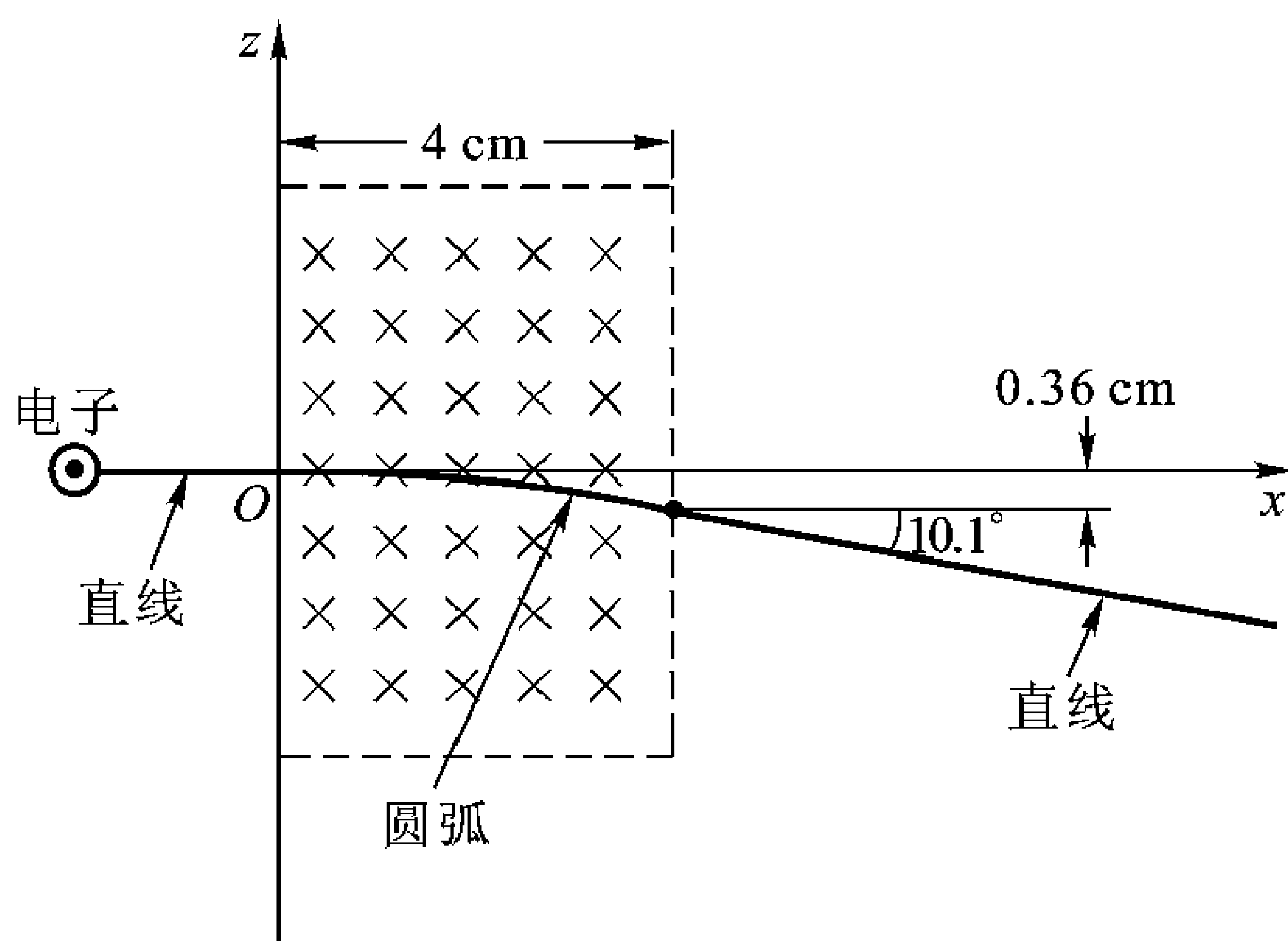


图 11－18　电子被磁场偏转，磁场 B 穿进纸面，电子在磁场中的运动轨迹是圆

图 11－18 给出整个电子运动轨迹。将本节例子与第 10 章静电偏转阴极射线管图 10－41 相比是很有趣的。注意，在静电偏转与磁偏转两种情况下，场强的选择使作用于电子的力在两种情况下相同。在静电偏转系统中，电子运动轨迹是抛物线，而在磁偏转系统中电子运动轨迹是圆，电子飞出偏转系统的位置及其后的直线轨迹也几乎相同。

例 11－6　图 11－19 所示的矩形线圈 *ABCD* 靠近无限长导线，导线上流过的电流 I 为 10 A，求作用在线圈上总的磁场力。

解： 无限长导线产生的磁场由式(11.2.10)给出，在图 11－19 所示的 $x-z$ 平面中

$$\boldsymbol{H} = \frac{I_1}{2\pi x}\boldsymbol{y}_0$$

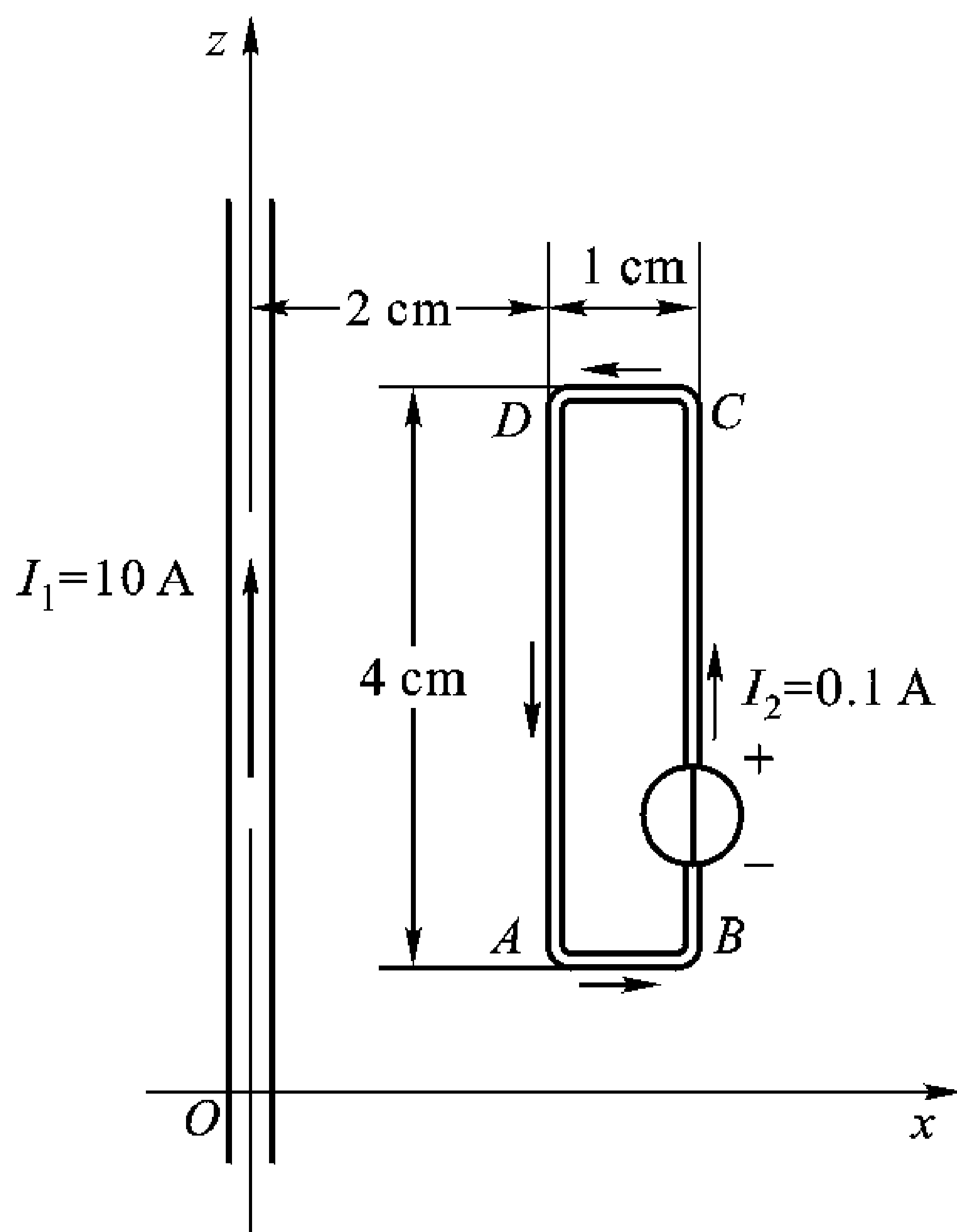


图 11－19　靠近无限长导线的矩形线圈

根据式(11.3.6)，磁场作用于线段 AB 上的力为

$$\boldsymbol{F}_{AB} = \int_{0.02}^{0.03} I_2 \mathrm{d}x \boldsymbol{x}_0 \times \frac{I_1 \mu_0}{2\pi x} \boldsymbol{y}_0 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \boldsymbol{z}_0$$
$$= 0.81 \times 10^{-7} \boldsymbol{z}_0 \quad \mathrm{N}$$

同样可求得磁场作用于 BC、CD 与 DA 上的力

$$\boldsymbol{F}_{BC} = I_2 \times 0.04 \boldsymbol{z}_0 \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\ (0.03)} \boldsymbol{y}_0$$
$$= 2.67 \times 10^{-7} (-\boldsymbol{x}_0) \mathrm{N}$$
$$\boldsymbol{F}_{CD} = -\boldsymbol{F}_{AB} = 0.81 \times 10^{-7} (-\boldsymbol{z}_0) \mathrm{N}$$
$$\boldsymbol{F}_{DA} = I_2 \times 0.04\ (-\boldsymbol{z}_0) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\ (0.02)} \boldsymbol{y}_0$$
$$= 4.00 \times 10^{-7} \boldsymbol{x}_0 \quad \mathrm{N}$$

作用于线圈总的力是以上 4 个力的矢量和，为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{AB} + \boldsymbol{F}_{BC} + \boldsymbol{F}_{CD} + \boldsymbol{F}_{DA}$$
$$= 1.33 \times 10^{-7} \boldsymbol{x}_0 \quad \mathrm{N}$$

磁转矩

一个流过直流电流 I 的矩形线圈，该线圈置于均匀磁场 $\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{x}_0$ 中，如图 11－20（a)。

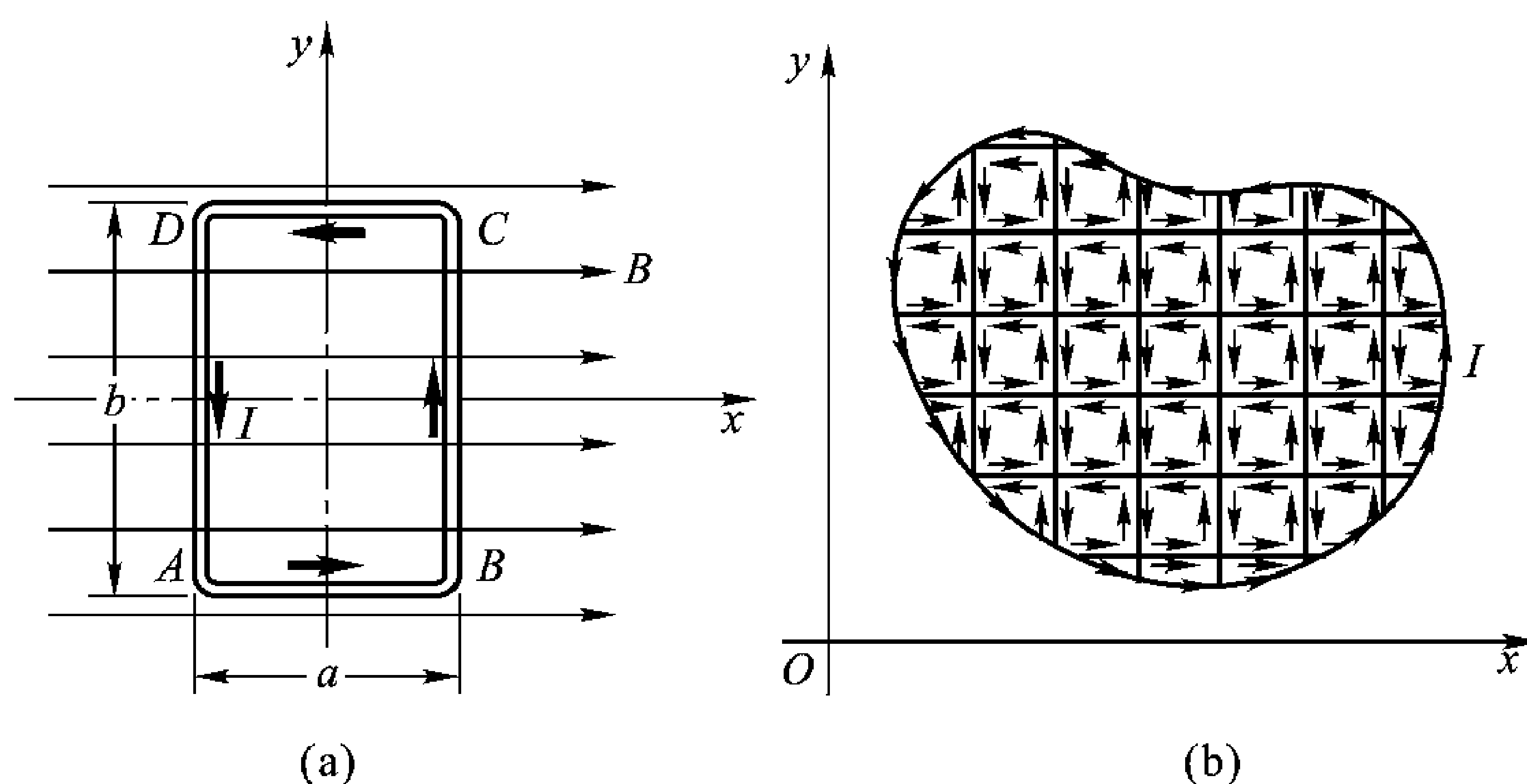


图 11－20　置于磁场中的通电线圈

(a) 置于均匀磁场中的矩形线圈　(b) 均匀磁场中电流 I 流过形状不规则的闭合线圈等效于均匀磁场中无数个流过电流为 I 的矩形小线圈的组合

磁场作用于该线圈的力按式(11.3.6)为

$$\boldsymbol{F}_{AB} = 0$$
$$\boldsymbol{F}_{BC} = -\boldsymbol{z}_0 I b B_x$$

$$F_{CD} = 0$$

$$F_{DA} = z_0 IbB_x$$

即作用于该线圈总的力等于零，所以该线圈不会作直线运动。但是该线圈有绕 $\boldsymbol{y}_0$ 轴转动的趋势，并按右手螺旋规则旋转，即如果大拇指指向 $\boldsymbol{y}_0$，四个手指的方向就是旋转方向，磁场作用于通电线圈的旋转力矩为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \frac{1}{2}a\boldsymbol{x}_0 \times \boldsymbol{F}_{BC} - \frac{1}{2}a\boldsymbol{x}_0 \times \boldsymbol{F}_{DA} \\ &= IabB_x \boldsymbol{y}_0 \\ &= IAB_x \boldsymbol{y}_0 \quad (\boldsymbol{B} = B_x \boldsymbol{x}_0)\end{aligned} \tag{11.3.9}$$

式中 $A = ab$ 为线圈面积，通电线圈的磁矩

$$\boldsymbol{m} = AI\boldsymbol{u}_0 \tag{11.3.10}$$

A 为线圈的面积，单位矢量 $\boldsymbol{u}_0$ 表示线圈指向，如果右手四指绕电流方向，大拇指方向即 $\boldsymbol{u}_0$ 方向，所以 $\boldsymbol{u}_0$ 与线圈表面垂直。如果应用式(11.3.10)定义的 $\boldsymbol{m}$，式(11.3.9)可改写为

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{11.3.11}$$

式(11.3.11)是从置于均匀磁场(只有 x 分量 B_x)中的矩形线圈这一特例得出的，下面将证明式(11.3.11)对于平面内任意形状的线圈、任意指向的磁场都是适合的。如果磁场除 x 分量外还有 z 分量，要证明作用于线圈相对的两边的力彼此抵消且平行于 $x-y$ 平面并不难，所以磁场的 z 分量既不对净的作用力也不对净的旋转力矩有任何贡献。按照导出式(11.3.9)的程序，可以证明磁场的 $\boldsymbol{y}_0$ 分量的作用在于产生绕 x 轴旋转的转矩，归结起来就是

$$\boldsymbol{T} = 0 \qquad (\text{对于 } \boldsymbol{B} = B_z z_0) \tag{11.3.12}$$

$$\boldsymbol{T} = IAB_y(-\boldsymbol{x}_0) \qquad (\text{对于 } \boldsymbol{B} = B_y \boldsymbol{y}_0) \tag{11.3.13}$$

将式(11.3.9)、(11.3.12)、(11.3.13)结合起来，就得到式(11.3.11)，即式(11.3.11)对于任意指向的磁场都是成立的。

下面进一步证明，对于式(11.3.11)，线圈的形状并不重要。考虑图 11-20(b)所示的任意形状的线圈，可以划分为许多矩形小线圈，从顶部看(对着纸面看)，每个矩形小线圈的电流是逆时针的，作用于第 i 个矩形小线圈的转矩为

$$\boldsymbol{T}_i = \boldsymbol{m}_i \times B = IA_i z_0 \times \boldsymbol{B}$$

总的转矩是这些小转矩的和，即

$$\boldsymbol{T} = \sum_i IA_i z_0 \times \boldsymbol{B} = Iz_0 \times \boldsymbol{B}\sum_i Ai = Iz_0 \times \boldsymbol{B}A$$

上式与式(11.3.11)相同。注意相邻两矩形小线圈的公共边，从各自的矩形小线圈看，电流方向相反，磁场对它的作用彼此抵消，只有线圈边界上的电流除

外，这就证明式(11.3.11)对于任意形状的线圈也是适用的。

直流电动机

直流电动机的工作原理基于磁场对通电线圈的作用，如式(11.3.11)，当一个直流电流通过浸没在恒定磁场中的矩形线圈时，线圈将受到一个旋转力矩。图 11-21 是直流电动机的示意图。由 N 圈矩形线圈(通常叫做电枢)置于由另一组被称为励磁线圈产生的磁场中，直流电流通过电刷与半圆形的换向器再与矩形线圈相连。所以流过矩形线圈的电流总在同一方向，磁矩 m 总是向上，转矩 $\boldsymbol{T}$ 在 $-z_0$ 方向为

$$\boldsymbol{T} = NIAB\sin\alpha\ (-z_0)$$

式中 α 是线圈指向 $\boldsymbol{u}_0$ 与磁场夹角。注意 α 总在 $0\sim\pi$ 之间变化，$\sin\alpha$ 总是正的，所以转矩 $\boldsymbol{T}$ 总在 $-z_0$ 方向，直流马达总沿同一方向旋转。

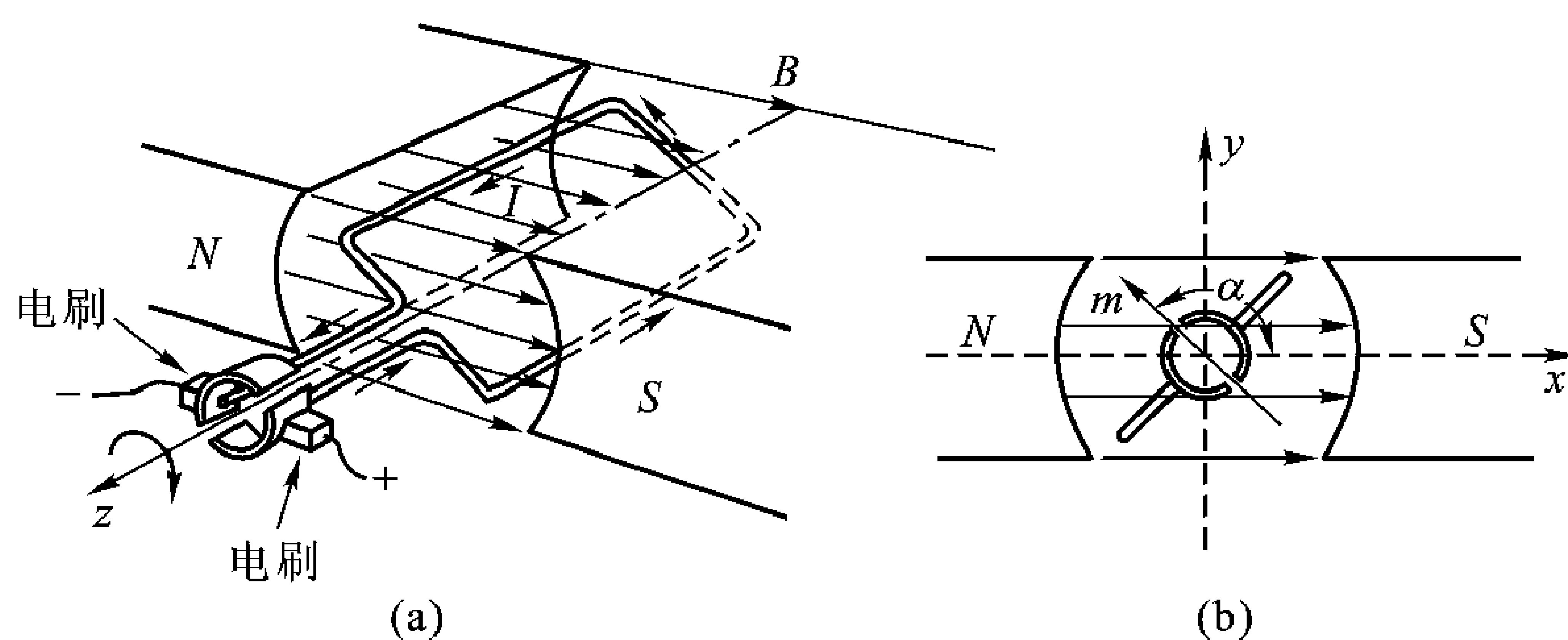


图 11-21 直流电机

(a)两个半圆环保证电流在同一方向 (b)磁矩 $\boldsymbol{m}$ 总是指向 $x-y$ 平面上半平面

11.4 磁场能与电感

第 3 章讨论坡印廷定理时，指出单位体积储存的磁场能为

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H} \qquad (11.4.1)$$

下面以图 11-22 所示通电螺线管为例说明式(11.4.1)。当开关在接通位置有电流通过螺线管时，指示灯泡亮起来，同时在线圈中建立起磁场。现在把开关断开，发现指示灯还会亮一下。导致指示灯再亮一下的能量不

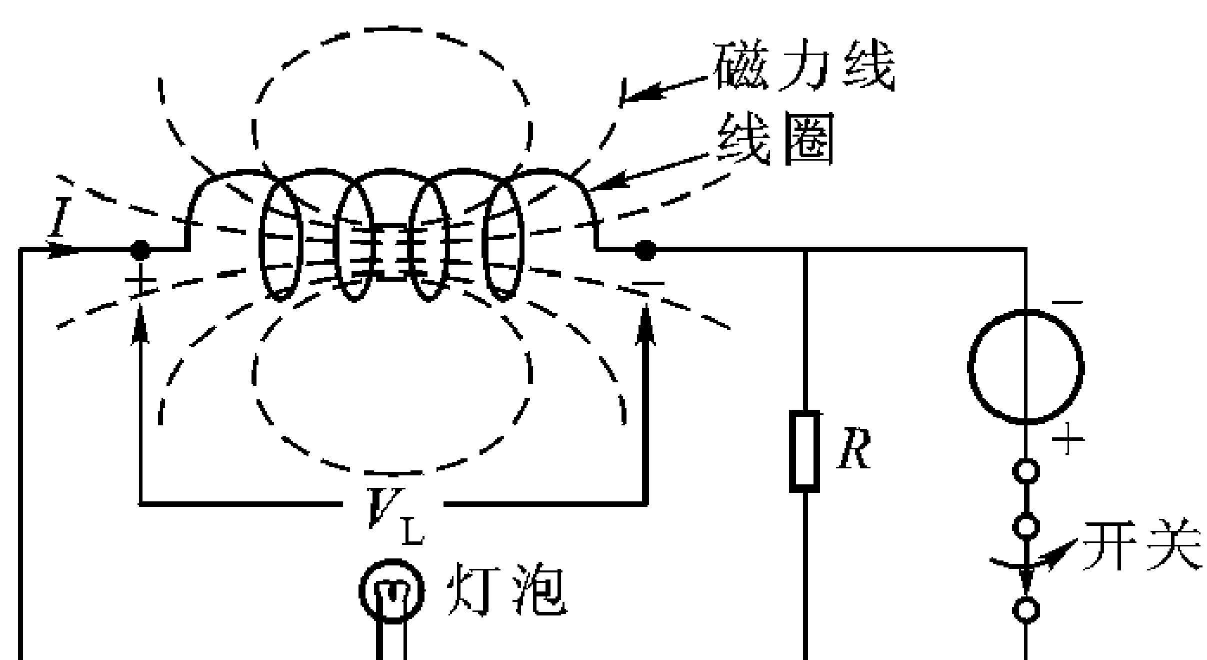


图 11-22 通电螺线管

是电源供给的，只能是螺线管供给的。这证明螺线管中有储能。电流 I 通过螺线管时两端电压 $V_L = L\dfrac{dI}{dt}$，故储能

$$W_m = \int_{t=0}^{t=t_0} IV_L dt = \int_{t=0}^{t=t_0} IL\frac{dI}{dt}dt = \int_{I=0}^{I=I} LIdI = \frac{L}{2}I^2$$

$t=0$ 时，开关刚接通电源，$I=0$，到 $t=t_0$ 时电流已到稳态值 I。

定义 $L=\dfrac{\psi}{I}$，ψ 为线圈总磁通，I 为流过螺线管电流，则

$$W_m = \frac{L}{2}I^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\psi}{I}\right)I^2 = \frac{1}{2}\psi I = \frac{1}{2}BSNI = \frac{1}{2}BS\ln I$$

式中 S 为螺线管截面积，N 为总圈数，B 为磁通量密度，n 为单位长度圈数，l 为螺线管长度，所以

$$N = ln$$

注意到螺线管产生的磁场强度 $H = nI$，所以

$$W_m = \frac{1}{2}BHSl$$

Sl 为螺线管体积，所以单位体积中磁场能

$$\frac{W_m}{Sl} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H} = \frac{\mu}{2}H^2$$

电感

如图 11－23，电流形成闭合回路，穿过回路所包围的曲面的总的磁力线叫做磁通量 ψ，并可由下述积分求出

$$\psi = \int d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B} \qquad (11.4.2)$$

式中 $d\boldsymbol{S}$ 是微分面积。当闭合回线由 N 圈线圈构成，且每一圈通过的电流 I 相同时，总的磁通量为 $\Lambda = N\psi$。前已指出回路的电感 L 定义为总的磁通量与电流 I 之比，则

$$L = \frac{\Lambda}{I} = \frac{N\psi}{I} \qquad (11.4.3)$$

电感的单位是韦伯每安培（Wb/A），也叫做亨利（H）。

电感的另一等效定义可根据

$$U_H = \frac{1}{2}LI^2 \qquad (11.4.4a)$$

即

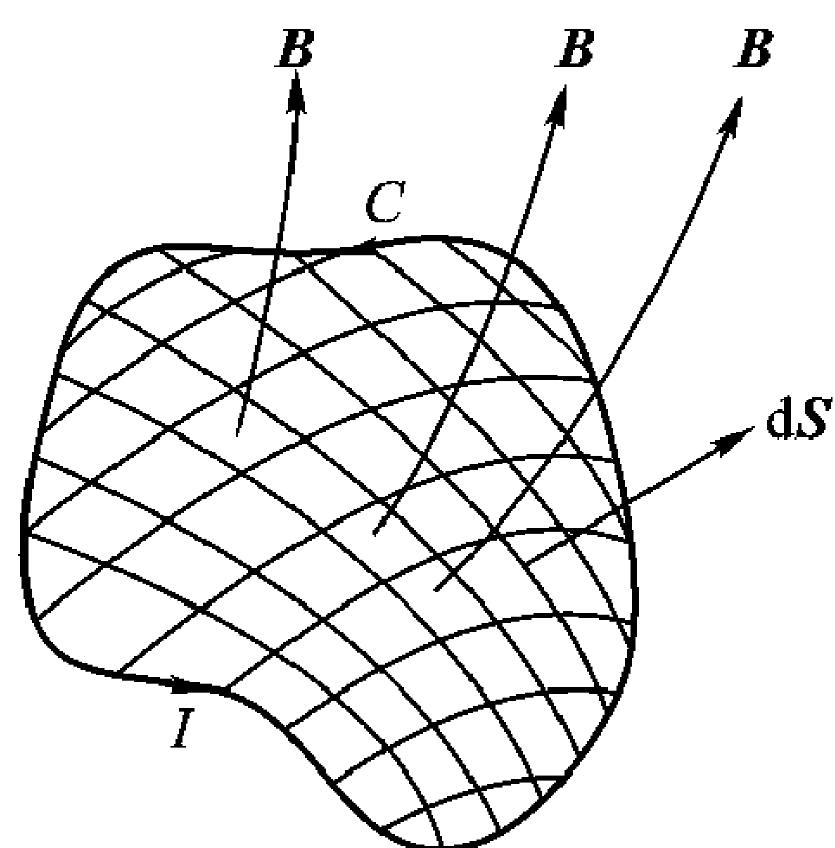


图 11－23　闭合回线电流产生的磁场

$$L=\frac{2U_H}{I^2} \tag{11.4.4b}$$

这两种定义是等价的。

利用式(11.2.4)定义的矢量位 $\boldsymbol{A}$ 以及式(11.4.1)，体积 V 内储存的磁场能为

$$\begin{aligned} U_H &= \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}V\,(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{H} \\ &= \frac{1}{2}\left[\int_V \mathrm{d}V\,\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})+\int_V \mathrm{d}V\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H})\right] \end{aligned} \tag{11.4.5}$$

这里我们用了恒等关系

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{H}) \tag{11.4.6}$$

根据散度定理，式(11.4.5)右边第一项可转变为包围体积 V 表面的面积分，因为积分表面要包围所有磁场能，必须趋于无穷远，而无穷远处 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 必趋于零，所以该面积分为零。由安培定律给出 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$，式(11.4.5)的第二项变为 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$ 的积分，而 $\boldsymbol{J}\mathrm{d}V$ 可写成 $\boldsymbol{J}\mathrm{d}V=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为微分长度矢量，方向与电流方向一致(见图 11－23)，所以第二项体积分变为回线的线积分

$$U_H=\frac{I}{2}\oint\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{11.4.7}$$

应用斯托克斯定律，$\oint\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，而 $\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，将上述关系代入式(11.4.4b) 得到

$$L=\frac{1}{I}\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{I}\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

此式与式(11.4.3)一致。所以式(11.4.4b)定义的 L 与式(11.4.3)定义的 L 是等价的。

电流产生的磁力线也可能跟邻近回路线圈耦合，假定流过相邻两回路的电流分别为 I_1、I_2，第一个回路电流 I_1 产生并与第二个回路电流 I_2 相耦合的磁通量记为 ψ_{21}，互感就定义为

$$M_{21}=\frac{N_2\psi_{21}}{I_1} \tag{11.4.8a}$$

利用对称性，可以定义互感 M_{12}为

$$M_{12}=\frac{N_1\psi_{12}}{I_2} \tag{11.4.8b}$$

式中 N_1、N_2 分别为两耦合回路线圈的圈数。

类似于式(11.4.4)定义的电感，互感 M_{12}，M_{21}也可定义为

$$M_{12}=\frac{1}{I_1I_2}\int_V\mu\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{H}_2\mathrm{d}V \tag{11.4.9a}$$

$$M_{21} = \frac{1}{I_1 I_2}\int_V \mu \boldsymbol{H}_2 \cdot \boldsymbol{H}_1 \mathrm{d}V \qquad (11.4.9b)$$

可以证明式(11.4.9)定义的互感与式(11.4.8)定义的互感等效，由式(11.4.9)可得

$$M_{12} = M_{21} \qquad (11.4.10)$$

例 11-7 求半径为 a，n 圈/m 的螺线管单位长度的电感。

解：由式(11.2.15b)，螺线管中磁场为 $H = z_0 nI$，单位长度螺线管的磁场能为

$$U_H = \frac{1}{2}\mu n^2 I^2 (\pi a^2) \qquad (\text{单位为 J/m})$$

用(11.4.4)定义的 L，单位长度螺线管的电感是

$$L = \mu n^2 \pi a^2 \ (\text{单位为 H/m}) \qquad (11.4.11)$$

例 11-8 两个同心放置的螺线管，半径分别为 R_1 和 R_2，图 11-24 给出其结构图。假定两螺线管具有相同的长度 l，与 R_1、R_2 相比，l 大得多，即 $l >> R_1$，$l >> R_2$，因此螺线管两端面效应可略去。外面的螺线管有 N_1 圈，里面的螺线管有 N_2 圈，求它们的互感。

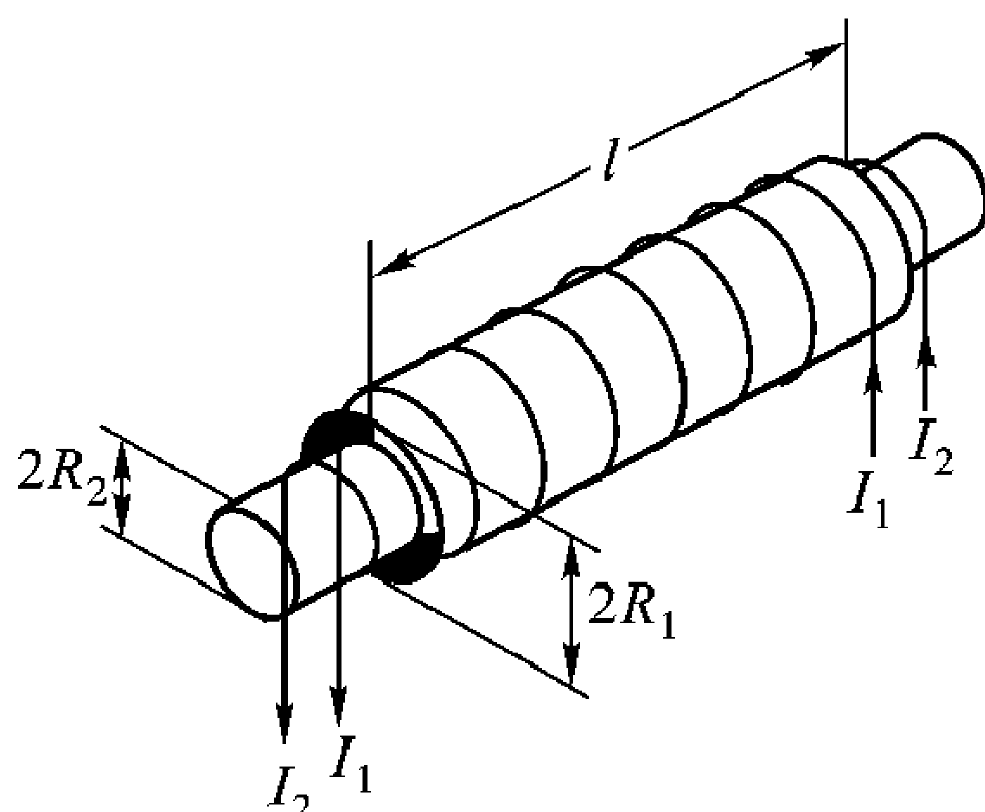


图 11-24 同轴螺线管，其互感 $M_{21} = M_{12}$

解：外面第一个螺线管 I_1 产生的磁通量密度按式(11.2.15b)为

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{l}$$

与里面第二个螺线管绞链的磁通量为

$$\psi_{21} = \frac{\mu_0 N_1 I_1 \pi R_2^2}{l}$$

根据式(11.4.8a)，得到互感 M_{21}为

$$M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R_2^2}{l} \qquad (11.4.12a)$$

也可从另一途径解上述问题，里面第二个螺线管 I_2 产生的磁场

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{l}$$

与外面第一个螺线管绞链的磁通量为

$$\psi_{12} = \frac{\mu_0 N_2 I_2 \pi R_2^2}{l}$$

根据式(11.4.8b)得到 M_{12}为

$$M_{12} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 \pi R_2^2}{l} \tag{11.4.12b}$$

所以 $M_{12} = M_{21}$。

同轴线的电感

为使问题分析简化，假定所讨论同轴线由内外两导电薄壳构成，见图11－25，电流仅仅在 $r=a$ 和 $r=b$ 的薄层内流动。根据结构对称性，利用安培定律很方便地求得同轴线内外导体间磁场为

$$H_\varphi = \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi\rho} & (b > \rho > a) \\ 0 & (\text{其它地方}) \end{cases}$$

故有磁场能，按式(11.4.1)可得

$$U_H = \frac{1}{2}\mu\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_a^b \rho\mathrm{d}\rho\,\frac{I^2}{4\pi^2\rho^2} = \frac{\mu I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

这是同轴线单位长度磁场能，利用式(11.4.4)，可计算单位长度电感

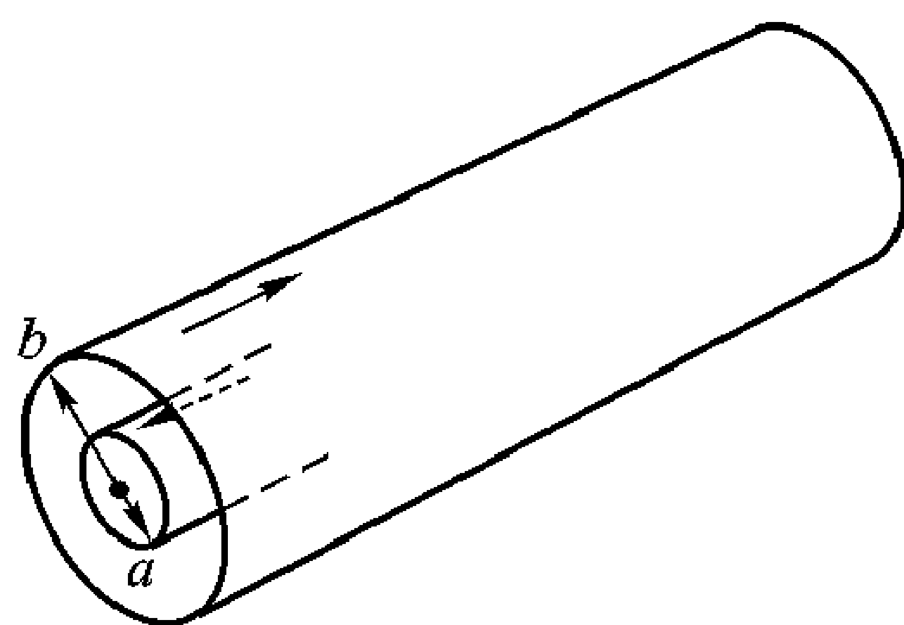


图 11－25 两薄导电壳构成的同轴线

$$L = \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \tag{11.4.13}$$

11.5 磁场中的介质

原子是组成介质材料的基本单元，不管是绕核旋转的电子云还是电子本身的自旋都类似于产生磁场的电流回路，即形成一个磁偶极子[图 11－26 (a)]，用一个磁矩 $\boldsymbol{m}$ 等效。没有磁场时，这些磁矩随机取向，不会产生净的磁场。

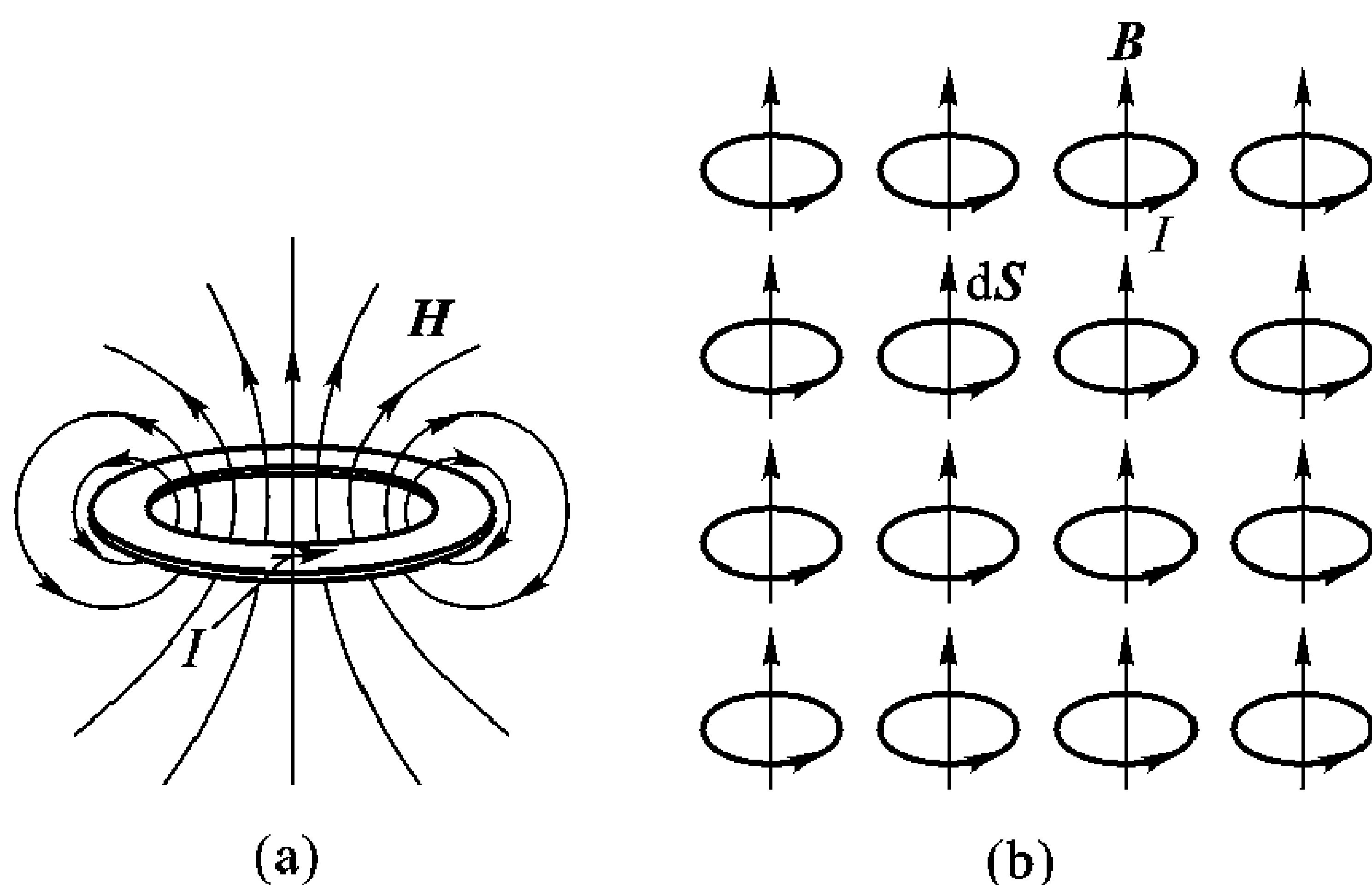


图 11－26 磁偶极子及其沿磁场方向有序排列

(a) 磁偶极子 (b) 磁矩沿磁场方向有序排列

当介质中有外加磁场，且足够大时，这些磁矩沿磁场方向有序排列，如图11－26（b）。

设元电流的截面为 dS，电流为 I，磁矩

$$\boldsymbol{m}=I\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{11.5.1}$$

则单位体积中总磁矩

$$\boldsymbol{M}=n\boldsymbol{m}=nI\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{11.5.2}$$

式中 n 为单位体积内磁偶极子数。

因此外加磁场作用于介质后，除了外加磁场外，还有介质磁化引发的磁矩 $\boldsymbol{M}$ 产生的磁场。

磁场中的介质可以看作无限多按磁场有序排列的磁偶极子的集合，见图11－27。因为磁场只有 z 分量 B_z，磁矩 $\boldsymbol{m}$ 也只有 z 方量 m_z，按右手螺旋规则，如果大拇指在 z 方向，则四指方向为电流方向。在 $y-z$ 界面，有 y 方向电流，即 $\boldsymbol{J}_{s(y-z)界面}=\boldsymbol{y}_0 J_y$，在 $x-z$ 界面有 $-x$ 方向电流，即 $\boldsymbol{J}_{s(x-z)界面}=-\boldsymbol{x}_0 J_x$。

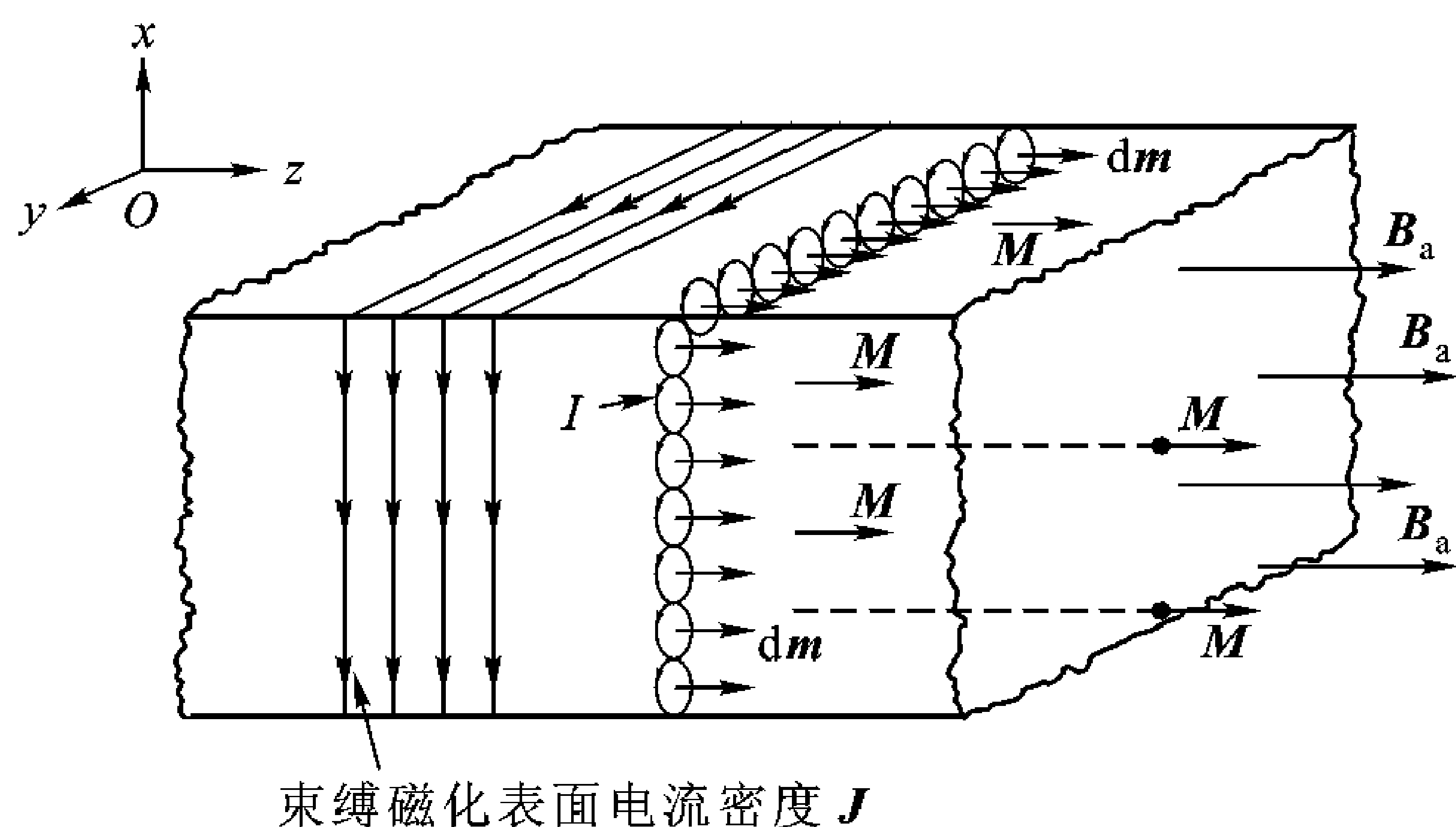


图 11－27　介质磁化引起束缚面电流、束缚体电流的图示

介质表面电流一般表达式为

$$\boldsymbol{J}_{sm}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}_0 \tag{11.5.3}$$

$\boldsymbol{n}_0$ 为界面法线方向单位矢量。

如果外加磁场 $\boldsymbol{B}$ 是均匀的，介质内部磁化产生的磁矩也是均匀的，由于相邻两个磁矩电流方向相反，大小相等，完全抵消，因此介质内部不会有净的电流。如果外加磁场 $\boldsymbol{B}$ 不均匀，介质磁化产生的磁矩分布也不均匀，那么相邻两磁矩电流方向虽然相反，但大小不等，有净的电流密度 $\boldsymbol{J}_m$，$\boldsymbol{J}_m$ 与磁矩 $\boldsymbol{M}$ 的关系为

$$\boldsymbol{J}_m=\nabla\times\boldsymbol{M} \tag{11.5.4}$$

式(11.5.3)、(11.5.4)简要证明如下：

在图 11－28（a）所示磁性介质内，回路 l' 包围的面积为 dS，沿回线 l' 作

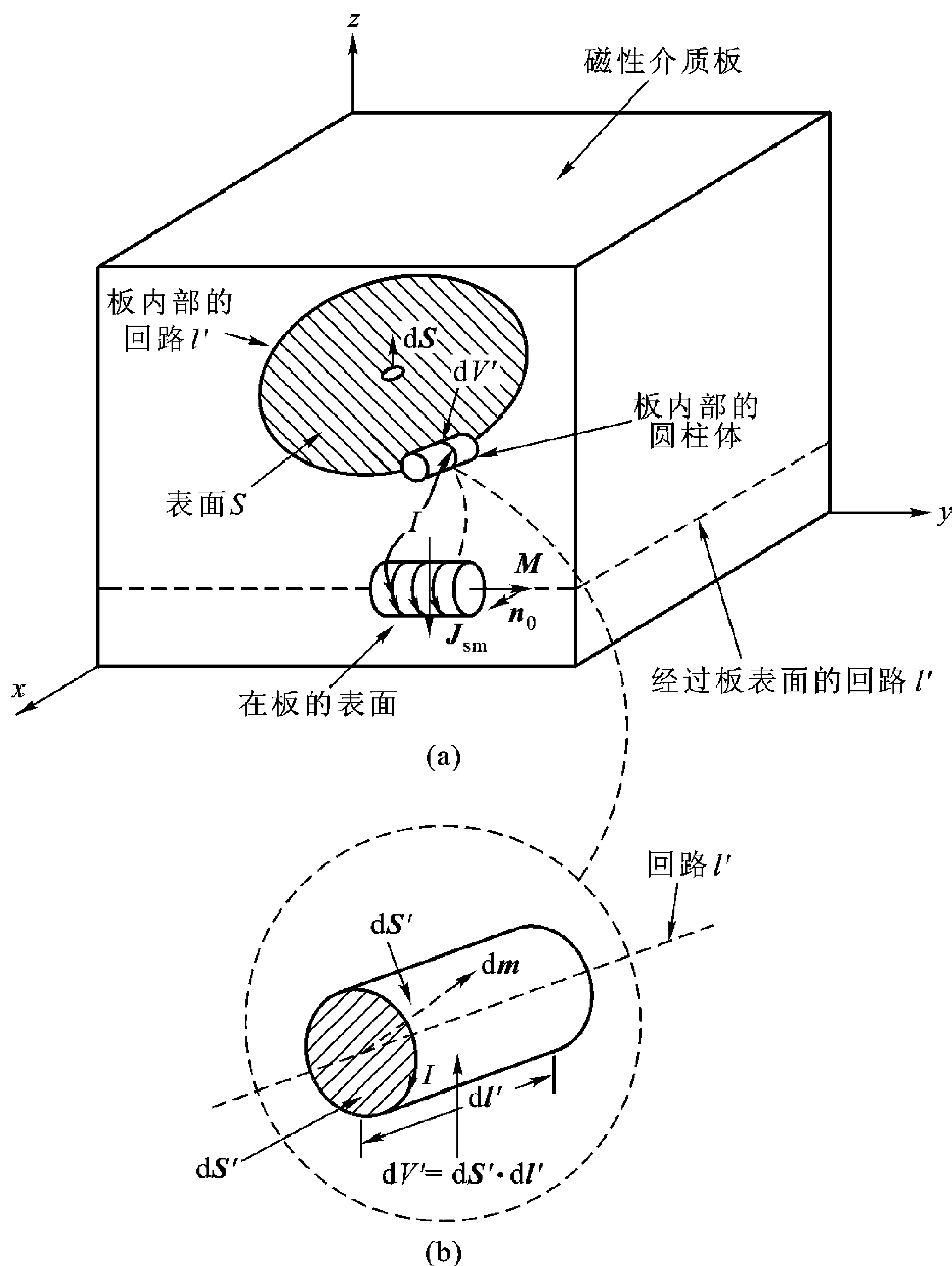


图 11－28　束缚体电流与束缚面电流

(a) 束缚体电流、束缚面电流计算的图示

(b) 局部区域的放大

小柱体 dV'，其放大的图示于图 11－28 (b)，显然体积 $dV' = d\boldsymbol{S}' \cdot d\boldsymbol{l}'$，$d\boldsymbol{S}'$，$d\boldsymbol{l}'$已在图中表示出来，分别为小柱体的截面和长度。小柱体内磁矩数为 $n\,d\boldsymbol{S}' \cdot d\boldsymbol{l}'$，其中 n 为单位体积磁矩数。如果每个磁矩的束缚磁化电流为 I，则与小体积 dV' 关联的电流

$$dI_m = I\,(n d\boldsymbol{S}' \cdot d\boldsymbol{l}') = (nI d\boldsymbol{S}') \cdot d\boldsymbol{l}'$$

将式(11.5.2)代入得到

$$dI_m = \boldsymbol{M} \cdot d\boldsymbol{l}' \tag{11.5.5}$$

经过回线 l' 总电流 I_m 为

$$I_m = \oint_{l'} \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}' \tag{11.5.6}$$

而 I_m 又可表示为

$$I_m = \int_S \boldsymbol{J}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{11.5.7}$$

S 是回线 l' 包围的面积。由此得到

$$I_m = \int_S \boldsymbol{J}_m \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_{l'} \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}' = \int (\nabla \times \boldsymbol{M}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{11.5.8}$$

由式(11.5.8)就得到

$$\boldsymbol{J}_m = \nabla \times \boldsymbol{M}$$

这就是式(11.5.4)。

接下来再在磁性材料表面作一回线 l' [见图 11-28 (a)]。在材料表面，束缚表面电流与表面相切，式(11.5.5)成为

$$\mathrm{d}I_m = M_{\tan}\mathrm{d}l' \tag{11.5.9}$$

$M_{\tan}$是磁矩 $\boldsymbol{M}$ 在表面的切向分量。由式(11.5.9)得到

$$M_{\tan} = \frac{\mathrm{d}I_m}{\mathrm{d}l'} = J_{sm} \tag{11.5.10}$$

J_{sm}就是表面束缚电流密度，式(11.5.10)可写成矢量形式

$$\boldsymbol{J}_{sm} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}_0$$

这就是式(11.5.3)。

计及 $\boldsymbol{J}_m$ 后，$\nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = \boldsymbol{J}$ 改写为

$$\nabla \times \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} = (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_m) = \boldsymbol{J} + \nabla \times \boldsymbol{M}$$

$$\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}\right) = \boldsymbol{J}$$

与$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$ 比较可得

$$\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}$$

所以

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) \tag{11.5.11}$$

对于线性介质，$\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 成正比，有

$$\boldsymbol{M} = x_m \boldsymbol{H} \tag{11.5.12}$$

所以

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 (1 + x_m) \boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} \tag{11.5.13}$$

$$\mu_r = 1 + x_m \tag{11.5.14}$$

x_m 叫做磁化强度。

注意，$\boldsymbol{H}$ 是外加的场，而磁通量密度 $\boldsymbol{B}$ 是外加场与内部电子自旋产生的场的总和。

11.6　磁性材料和磁路

不同的材料的相对磁导率 μ_r 是不同的，一般介质材料，$\mu_r \approx 1$，μ_r 稍大于 1 的介质叫顺磁性介质，μ_r 稍小于 1 的介质叫逆磁性介质。顺磁性介质、逆磁性介质都是线性介质，即 μ_r 与 $\boldsymbol{H}$ 强度无关。而 $\mu_r >> 1$ 的介质叫铁磁性的，它们是非线性的。常用顺磁性与逆磁性材料极化率 x_m 见表 11 – 2。

表 11 – 2　常用顺磁性与逆磁性材料极化率 x_m

物　质	x_m	物　质	x_m
铜	-0.94×10^{-5}	空气	$+3.60 \times 10^{-7}$
铅	-1.70×10^{-5}	铂	$+2.90 \times 10^{-4}$
水	-0.88×10^{-5}	铝	$+2.10 \times 10^{-5}$
真空	0.00	液态氧	$+3.50 \times 10^{-3}$

铁磁性材料磁化强度 x_m 很大，当需要用线圈以小的电流得到大的磁通量密度时，铁磁材料是很有用的。铁磁材料的模型如下：

铁磁材料中包含许多线度在 10^{-6} m 量级的磁畴，每一个磁畴又包含许多自旋电子产生的磁偶极子，由于邻近偶极子的强力作用，这些磁偶极子平行地排列。但是不同磁畴内磁偶极子排列取向是不一样的，具有随机性。所以总体来看，铁磁材料内没有磁场，相当于图 11 – 29 (a)磁化曲线的 O 点。图 11 – 30 (a)给出相应的磁畴分布。如果在 $\boldsymbol{x}_0$ 方向施加一磁场，那么畴内磁偶极子按外加磁场方向排列的磁畴将长大，畴内磁偶极子按其他方向排列的磁畴将变小甚至消失。外加场与自旋电子产生的场合起来，其总的磁通量密度 B 就很大。图 11 – 29 (a) O 点与 P_1 点之间的磁化曲线就表示这一情况，而图 11 – 30 (b)表示相应磁畴的状态。随外加磁场的进一步增加，整个材料成为一个磁畴，所有自旋电子均有序排列，磁通量密度 $\boldsymbol{B}$ 达到饱和。这一情况由图 11 – 29 (a) 曲线上的点 P_2 表示，而图 11 – 30

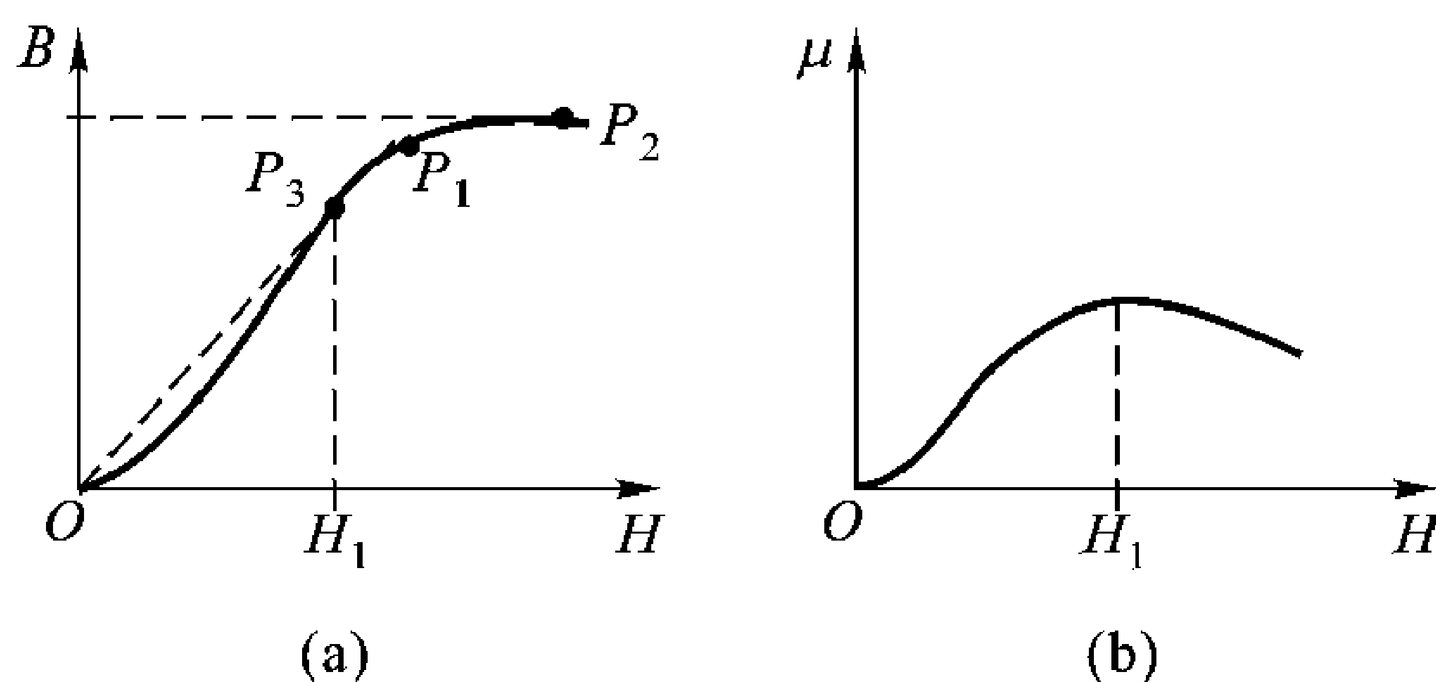


图 11 – 29　铁磁材料的磁化曲线与磁导率
(a) 磁化曲线　(b) 磁导率 μ 与 H 关系

(c)表示 $\boldsymbol{B}$ 达到饱和时的磁畴。对于铁磁性物质，磁导率 μ 是磁场 H 的非线性函数。注意 μ 是图 11-29 (a)磁化曲线上任一点与原点连线的斜率，图 11-29 (b)给出 μ 与 H 的关系曲线，μ 的最大值发生在磁化曲线上的 P_3 点，在 P_3 点其切线斜率等于与原点连线斜率。

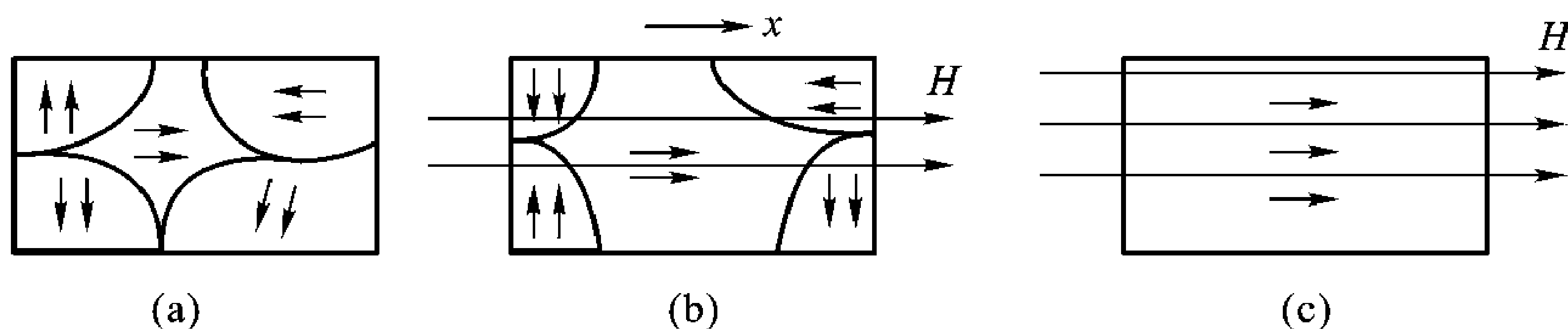


图 11-30　铁磁材料中的磁畴

(a) 没有外加磁场　(b) 有外加磁场　(c) 所有磁畴都按外加磁场方向排列

磁滞

类似于图 11-13 的环形螺线管，其内部被铁磁材料填充，环形螺线管内磁场为

$$H_{\varphi}=\frac{NI}{2\pi b} \tag{11.6.1}$$

现在我们改变电流 I，同时测量相应的磁通量密度 B，假定起始时 $I=0$，铁磁螺线管内没有自发的场，随着电流 I 增加，H 按式(11.6.1)增加，B 也从零开始增加，如果将 B 作成关于 H 的曲线，就如图 11-31 的 OA_1，经过初步磁化到达 A_1 后，如果减小环形螺线管中的电流，B 也相应减小，但 $B-H$ 曲线并不循初始磁化的那条曲线回来，而是沿类似于 A_1B_1 曲线回来。注意，在 B_1 点，电流等于零，相应的 H 也等于零，但在环形螺线管内有剩余的磁通量密度，这是由于铁磁材料某些磁畴仍然排列在同一方向，剩余磁通量密度就是由这些磁畴的磁矩产生的。

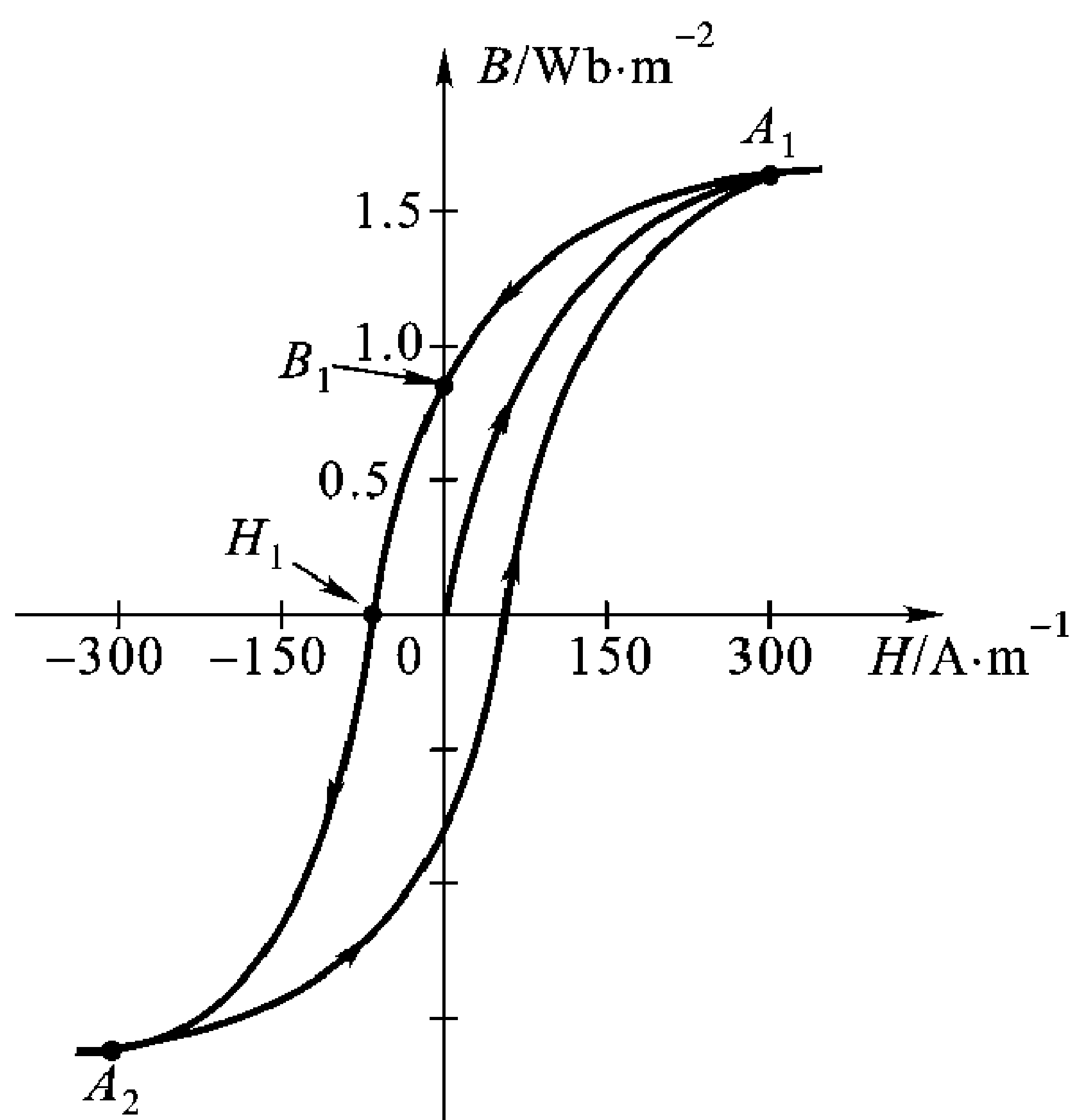


图 11-31　典型的磁滞曲线，B_1 是剩磁，H_1 是矫顽力

如果改变电流的方向，也就是使磁场方向反过来，当反向电流增大时，$B-H$曲线如图 11-31 所示的 B_1H_1。注意，直到反向磁场等于 $-H_1$ 时才使

环形螺线管内磁通量密度 B 减小至零。如果反向电流进一步增大，磁通量密度 B 也改变方向，$B-H$ 曲线如图 11－31 中的 H_1A_2。到达 A_2 后，减小反向电流的数值，$B-H$ 曲线为 A_2A_1，又回到 A_1 点。闭合回线 $A_1B_1H_1A_2A_1$ 称为磁滞回线。如果电流变化范围小，相应的磁滞回线也较小。如果磁化曲线两端都进入饱和，那么此时的剩余磁感应称为铁磁材料的剩磁，而反向磁场 H_1 称为铁磁材料的矫顽力。

永久磁铁

磁滞回线在第二象限部分称为退磁曲线。图 11－32 给出铝镍钴 5 合金的退磁曲线，这种合金具有较高的剩磁，因而可用作强的永磁体。注意铝镍钴5的矫顽力也很高，需要高达 43 800 A/m反向磁场才能使它退磁。高的剩磁、矫顽力是永磁体所希望的。注意，当温度超过居里点时，永磁体将失去磁性。大多数铁磁材料居里温度接近 500 ℃。

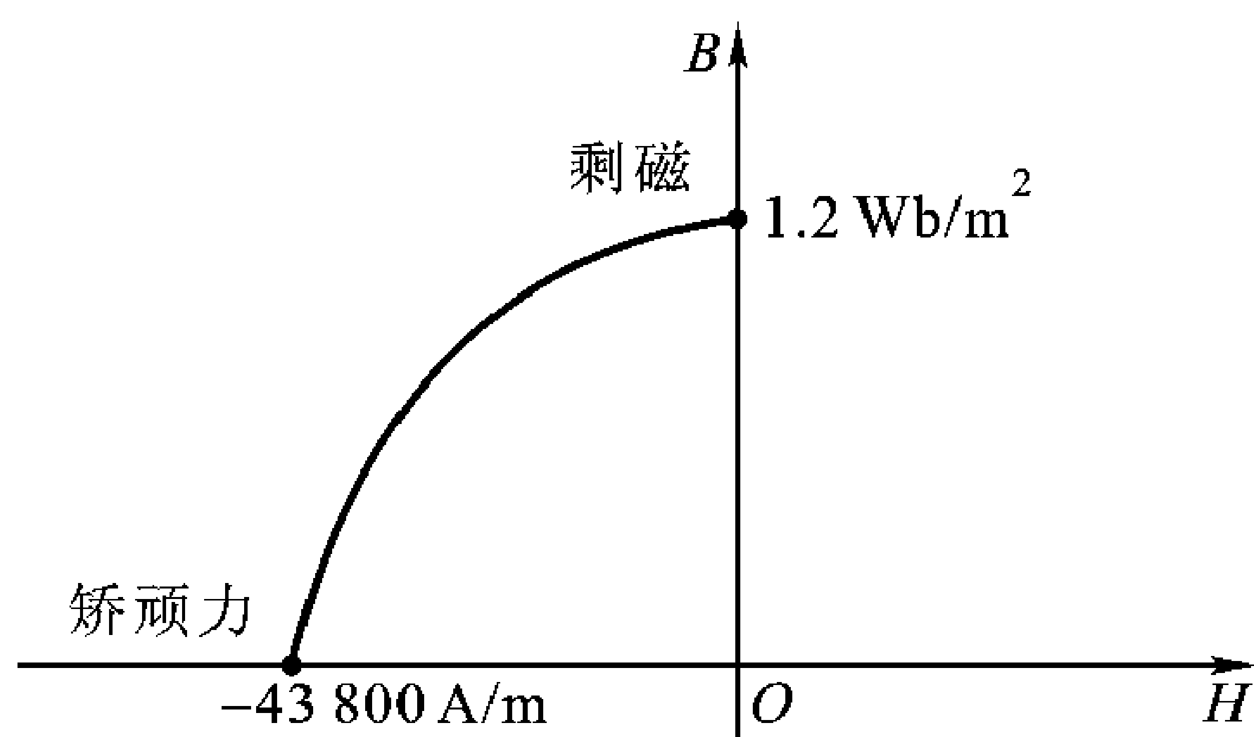


图 11－32　铝镍钴 5 的退磁曲线

现假定永磁体由铝镍钴 5 材料组成，它的剩磁是

$$B_r = 1.2\ \mathrm{Wb/m^2} \tag{11.6.2}$$

在一个等效的空气填充的螺线管中，要多大的电流才能使螺线管产生的磁通量密度与永磁体相当？假定螺线管线圈密度为 n 圈/m，按式(11.2.15b)磁场 H 为

$$H_z = nI$$

所以

$$B_z = \mu_0 nI$$

假定 B_z 等于式(11.6.2)给出的值，则单位长度安匝数 nI（安•匝/米）为

$$nI = \frac{1.2}{\mu_0} = 0.95 \times 10^6\ \mathrm{A \cdot t/m}$$

需要如此大的安匝数使人惊讶，但这可以理解，因为永磁体中有自旋电子产生的磁矩，而每立方米永磁体中有差不多 10^{30} 个电子。

如果将铝镍钴 5 作成盘状，如图 11－33。我们可以估计其磁场 B 将比其剩磁 1.2 Wb/m² 小。盘状永磁体可等效为一环状电流回路，其电流为 I。我们已经证明过一个具有 0.95×10^6 A•t/m 的螺线管也可产生 1.2 Wb/m² 的磁通量密度，所以 2 mm 厚的圆盘其等效的回路电流为

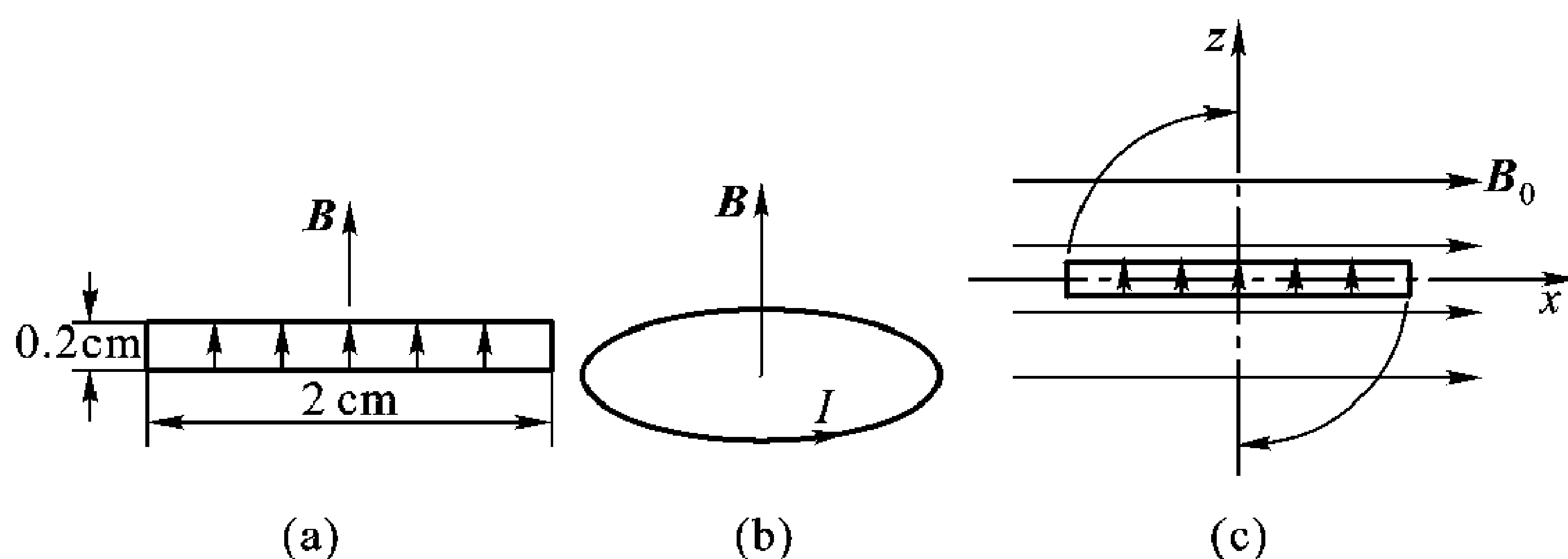


图 11－33　永磁体盘及其在磁场中受到的转矩
(a) 永磁体盘　(b) 等效的电流回路
(c) 盘状永磁体在外磁场作用下经受的转矩

$$I = 0.95 \times 10^6 \times 0.002 = 1.9 \times 10^3 \text{ A}$$

利用式(11.2.12)可以计算回路轴上的磁场

$$\boldsymbol{B} = \frac{Ia^2\mu_0}{2\ (a^2 + z^2)^{3/2}} \boldsymbol{z}_0$$

在永磁体盘表面 $z = 0$，则

$$\boldsymbol{B} = \frac{I\mu_0}{2a}\boldsymbol{z}_0 = 0.12\boldsymbol{z}_0 \text{ Wb/m}^2$$

如果将此盘状永磁体放在地球表面，地球表面磁场为

$$B_e = 0.6 \times 10^{-4}\boldsymbol{x}_0 \text{ Wb/m}^2$$

它对盘状永磁体的作用，使永磁体受到一个转矩，该转矩力图使永磁体按地球磁场方向排列。为计算该转矩，先计算磁矩 $\boldsymbol{m}$，有

$$\boldsymbol{m} = \pi a^2 I\boldsymbol{Z}_0 = 0.60\boldsymbol{z}_0$$

代入式(11.3.11)得到

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}_e = 0.36 \times 10^{-4}\boldsymbol{y}_0 \quad \text{N/m}$$

高导磁率和永久磁性材料

表 11－3 中列出某些高磁导率材料以及永久磁铁材料。

表 11－3　高导磁材料和永磁体材料

高导磁材料	相对导磁率	饱和磁通密度 (Wb/m^2)	永磁材料	剩磁 (Wb/m^2)	矫顽力 (A/m)
Cast iron (生铁)	100 ~ 600	2.0	Carbon steel (碳钢)	0.86	3800
Permendure (波明德合金)	800 ~ 4500	2.4	Alnico V (铝镍钴 V)	1.2	43800
Supermalloy (镍铁钼超导磁合金)	10^5 ~ 10^6	0.8	Cunico (铜镍钴永磁合金)	0.34	52500

磁盘存储器

磁芯存储器目前已被磁盘存储器取代，磁盘存储器称为第三代存储器。磁盘存储器有两类：一类叫软盘存储器，它是在塑料薄片上涂覆铁氧体材料制成的；第二类称为硬盘，它是铝盘上涂覆铁氧体材料制成的。

工作时磁盘旋转并与磁头耦合。磁头是绕有线圈的铁氧体小环，环并不闭合，开有隙缝，以使磁力线通过隙缝漏泄到周围的空间。在记录过程中，正是磁头漏出的磁场记录到磁盘上。在读出过程中，磁盘记录的信息(磁场)通过磁头隙缝被耦合到磁头从而被检测。图 11－34 给出磁盘与磁头的原理结构图。磁盘分成许多圆形磁道，每一磁道又分成许多小单元，每一小单元记录 1 bit 的信息。

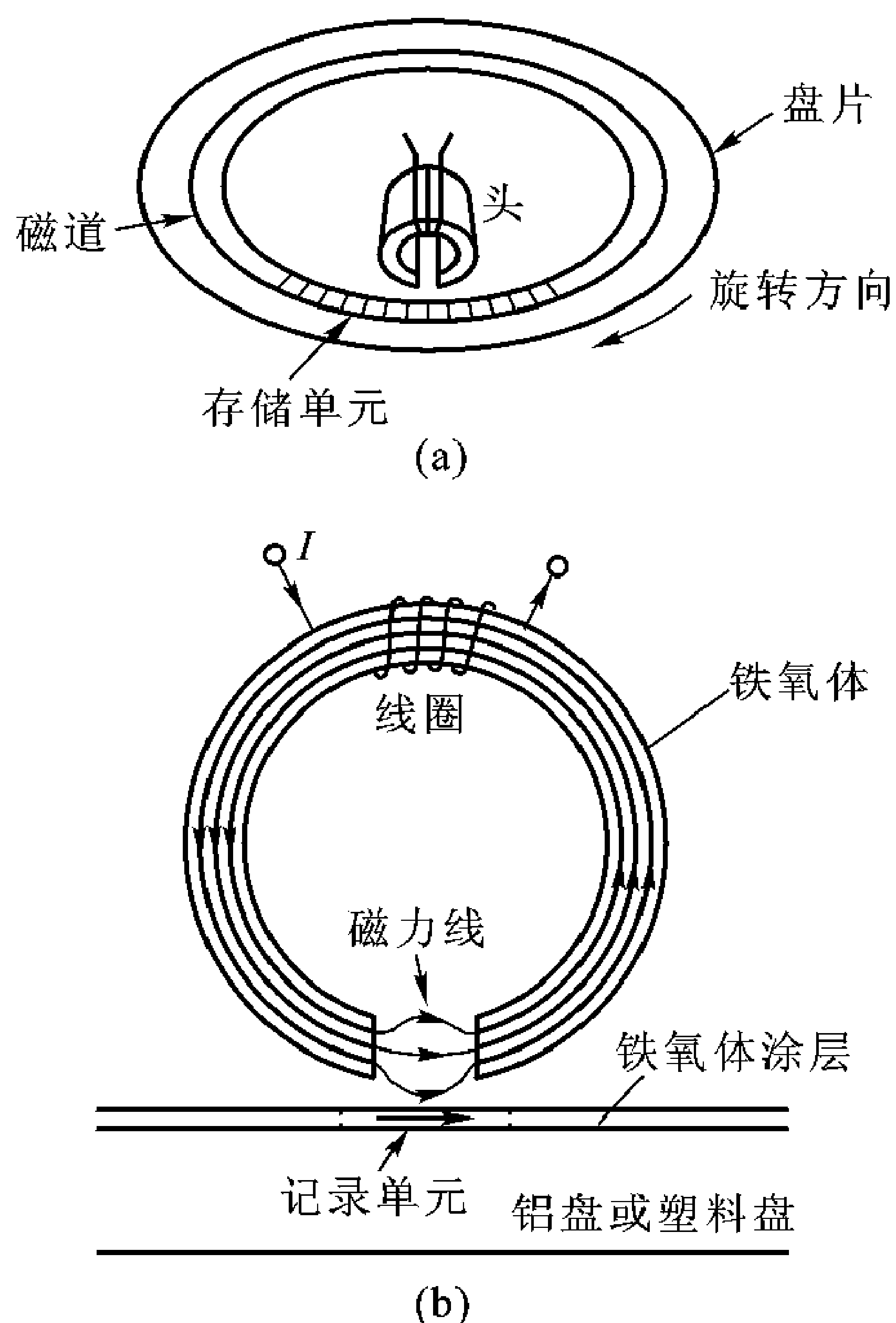


图 11－34　磁盘存储器
(a) 磁盘与磁头　(b) 记录模式

在记录模式中，绕在铁氧体小环上的线圈通有电流并在铁氧体小环内产生磁场。在隙缝处一部分磁力线漏泄到气隙周围的空间。漏泄到气隙外面的磁场与磁盘耦合并使磁盘某一记录单元磁化。如果欲使旁边一记录单元反向磁化，只要改变磁头激励电流的方向。在“双频调制”码中，一个小单元中磁化方向有反转的记作“1”，没有反转的记作“0”，两记录单元交界处都有附加的反转，以提供时钟信号，图 11－35 (a)所示的是磁盘磁道上按双频调制码记录的部分信息。

在读出模式中，磁头经过磁盘每一存储单元，存储单元的剩余磁场通过磁头隙缝耦合到磁头并被磁头检测。如果存储单元记录的是二进制“1”，当它经过磁头隙缝时，该单元剩余磁场的反转使磁头中感应出一电压；反之，如果存储单元记录的是“0”，磁场没有反转，磁头经过该单元时，感应出的电压就很小，甚至为零。图 11－35 (b)是磁头的读出信号。

这里有两点要说明，第一，磁盘上铁氧体涂层的磁化或磁矩的排列是平行于磁盘表面的，相邻两个磁矩的排列有趋于一致的倾向，所以相邻两个偶极子不能靠得太近，这就限制了 1 bit 信息记录单元的最小尺寸。第二，磁盘表面

铁氧体膜是靠磁头隙缝中的漏泄场使之磁化的，记录密度也难以提高。如果改成垂直磁化，即磁矩垂直于磁盘表面，记录密度就可大大提高。现在一张普通3英寸的磁盘可记录上百兆 bit 信息。

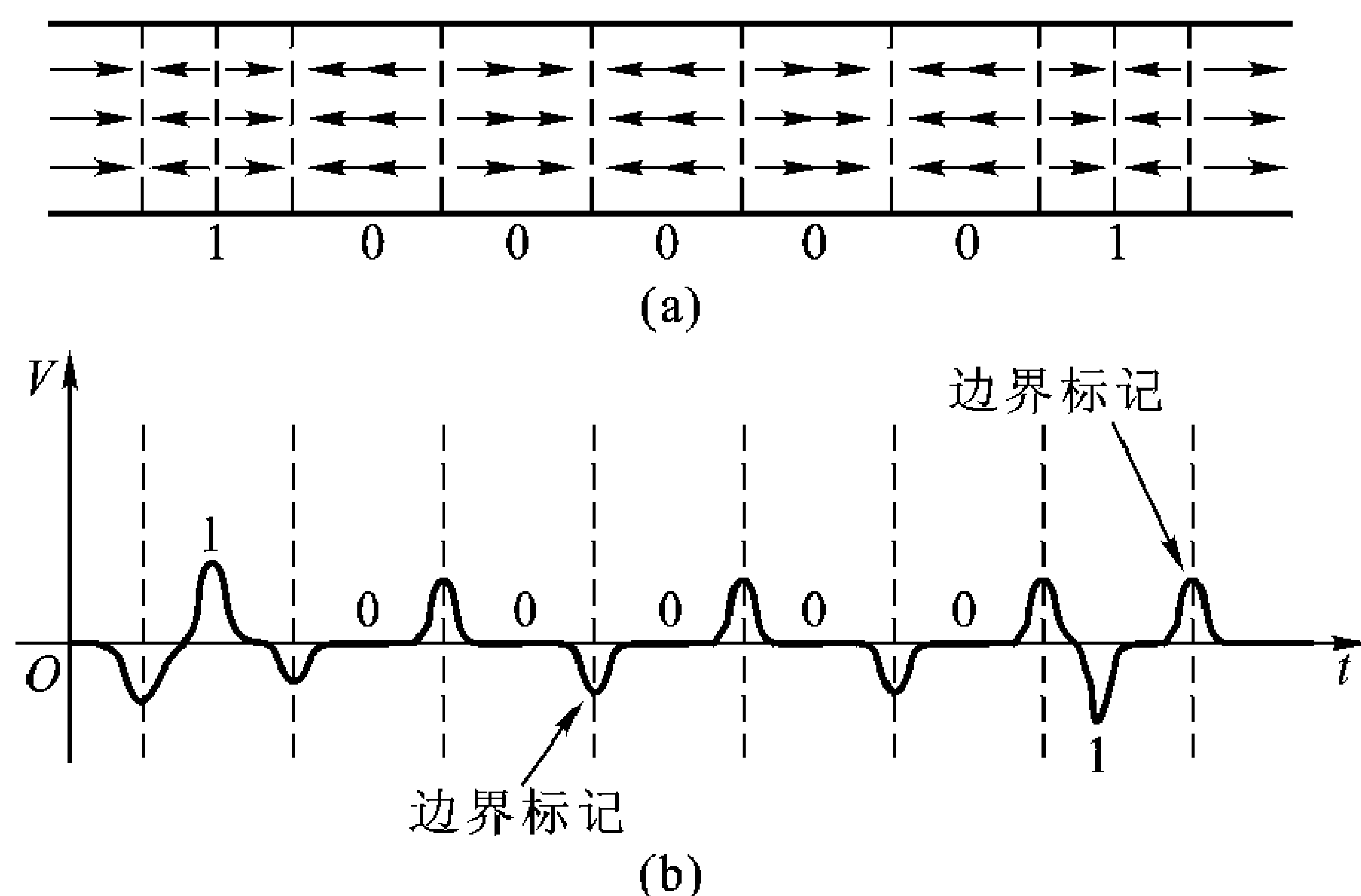


图 11－35 磁盘按双频码记录的信息及其读出

(a) 磁盘某磁道按双频调制码记录的信息，

记录单元磁场反转的为“1”，没有反转的为“0”

(b) 读出过程磁头输出的电压

磁路

在电路理论中，我们关注的重点是计算在外部电压源或电流源作用下，网络各节点电压或支路电流。所有计算基于两个方程，即基尔霍夫电压定律(KVL)或基尔霍夫电流定律(KCL)：

$$\sum_m V_m = 0 \quad \text{(KVL)} \tag{11.6.3}$$

$$\sum_m I_m = 0 \quad \text{(KCL)} \tag{11.6.4}$$

式(11.6.3)表示对网络任一回路，回路一周电压降总和等于零。式(11.6.4)表明对于任一节点，流进该节点电流的代数和等于零；或者，对于任一节点，流进节点的电流等于从该节点流出的电流。

跟电路一样，实际应用中也碰到磁路，如图 11－34 所示的磁盘存储器中的铁氧体磁头，里面包含一个气隙。一个很实际的问题是多大的电流气隙中才能产生要求的磁场？我们将这一问题看成磁路问题来处理。

磁路的分析是基于下面的方程

$$\sum_m H_m l_m = nI \tag{11.6.5}$$

$$\sum_m B_m A_m = 0 \tag{11.6.6}$$

式(11.6.5)、(11.6.6)就是麦克斯韦第二、三个方程的简化：

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \text{或} \oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I \tag{11.6.7}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \text{或} \oint \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}_0 \mathrm{d}S = 0 \tag{11.6.8}$$

式(11.6.5)中 H_m 是闭合磁路中第 m 个支路的磁场强度，l_m 是其长度，I 是穿过该闭合回路所包围的电流，n 是线圈的圈数。在式(11.6.6)中，B_m 是该闭合磁路节点处第 m 支路的磁通量密度，A_m 是支路截面。比较电路方程(11.6.3)、(11.6.4)与磁路方程(11.6.5)、(11.6.6)，两者十分相似：

电路	磁路
电压降 V	Hl 磁压降
电压源 V	nI 磁动势
电流 I	$\phi = BA$ 磁通量

例 11－9　如图 11－36 所示的磁路。假定磁芯为铁，其磁化曲线示于图 11－31。如要在磁芯及气隙中(忽略边缘效应)产生 1.6 Wb/m² 磁通量密度，当线圈圈数 $n = 1\ 000$ 时，电流要多大？

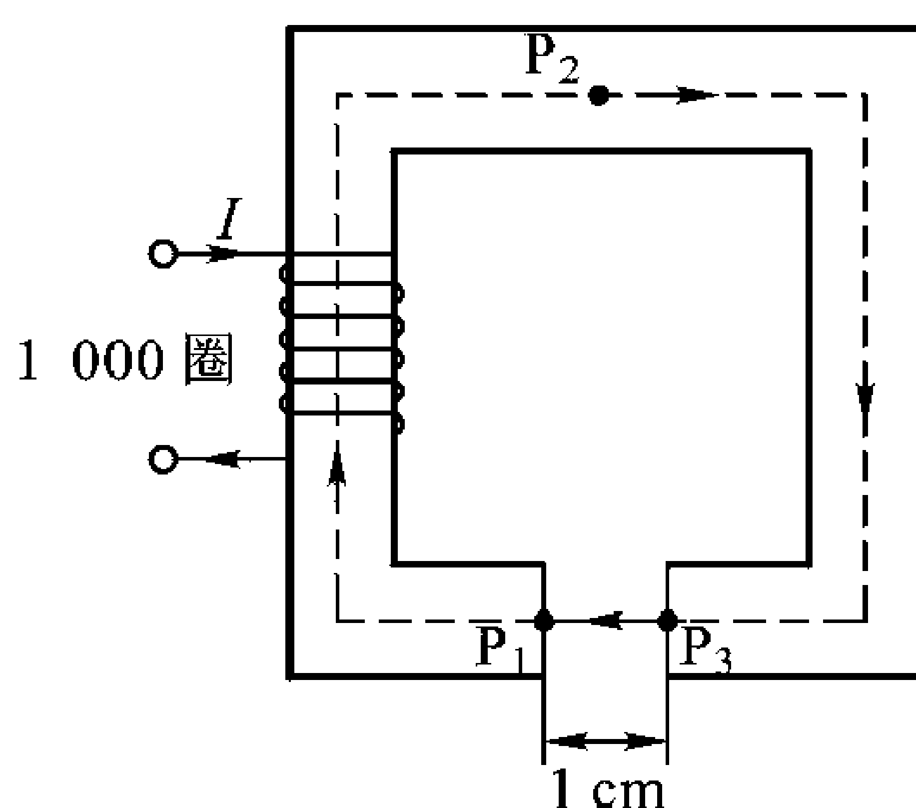


图 11－36　计算磁路气隙中得到所需磁场 B 时的电流

注：$P_3P_1 = 1$ cm，$P_1P_2P_3 = 30$ cm。

解：根据式(11.6.5)，有如下方程

$$H_c l_c + H_a l_a = nI \tag{11.6.9}$$

式中 H_c 为磁芯中磁场，H_a 为气隙中磁场，从图 11－36 可知，$l_c = 0.3$ m，$l_a = 0.01$ m，因为 $n = 1\ 000$，磁芯与气隙中 $B = 1.6$ Wb/m²，从图 11－31 可查得

$$H_c = 260 \text{ A/m}$$

空气中 $B = \mu_0 \boldsymbol{H}$，由此可得

$$H_a = \frac{1.6}{4\pi \times 10^{-7}} = 1.3 \times 10^6 \text{ A/m}$$

代入式(11.6.9)得到

$$nI = (260 \times 0.3 + 1.3 \times 10^6 \times 0.01) \text{A·t} = 78 + 13\ 000 = 13\ 078 \text{ A·t}$$

当 $n = 1\ 000$ 时，电流

$$I = 13.08 \text{ A}$$

注意，绝大部分磁压降在气隙中。下一例也说明这一点。

例 11－10　假定图 11－36 所示磁路气隙被一铁块填满，也就是说磁路是连续的，如在磁路中产生 1.6 Wb/m² 磁通量密度，线圈中的电流 I 要多大？

解：式(11.6.9)要略作修正

$$H_c l = nI$$

式中 $l = 0.3 + 0.01 = 0.31$ m，应用 $H_c = 260$ A/m，可得

$$nI = 260 \times 0.31 = 80.6 \text{ A·t}$$

$$I = 0.08 \text{ A}$$

与例 11－9 比较，例 11－9 中大部分电流用于补偿气隙中磁压降。所以在磁路理论中，磁芯材料相当于电路中的导体，而气隙相当于电路中高阻材料。

例 11－11 参看图 11－37 所示磁路，气隙中磁场 $B = 1.2$ Wb/m²，假定磁性材料 $\mu = 1\ 000\mu_0$，求两个线圈中的电流 I。

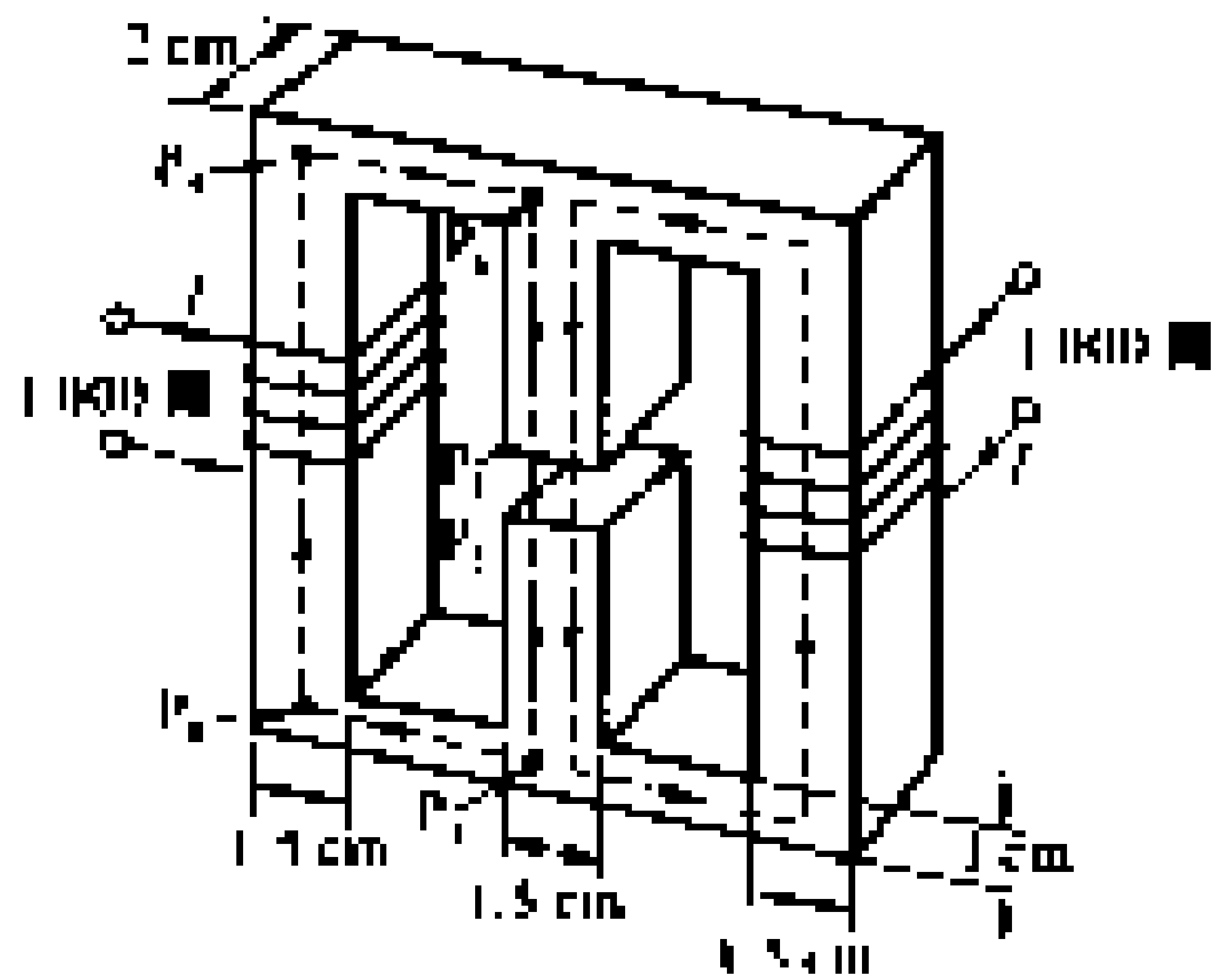


图 11－37 例 11－11 的磁路

注：气隙 $P_1P_2 = 1$ cm，$P_2P_3 = 5$ cm，$P_3P_4 = 6$ cm，$P_4P_5 = 11$ cm，$P_5P_6 = 6$ cm，$P_6P_1 = 5$ cm。

解：由于对称性，只需考虑 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_1$ 回路，气隙中总的磁通量

$$\psi = B_a A_a = 1.2 \times 0.02 \times 0.015 \text{ Wb/m}^2 = 3.6 \times 10^{-4} \text{ Wb/m}^2$$

其中一半流过左边的回路。所以在 P_3P_4、P_4P_5、P_5P_6 支路中磁通量密度

$$B_{34} = B_{56} = \frac{1.8 \times 10^{-4}}{0.01 \times 0.02} \text{ Wb/m}^2 = 0.9 \text{ Wb/m}^2$$

$$B_{45} = \frac{1.8 \times 10^{-4}}{0.02 \times 0.015} \text{Wb/m}^2 = 0.6 \text{ Wb/m}^2$$

相应的磁场强度

$$H_{\text{气隙}} = \frac{B_a}{\mu_0} = \frac{1.2}{\mu_0} \text{ A/m}$$

$$H_{23} = H_{61} = \frac{1.2}{1\ 000\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}(1.2 \times 10^{-3}) \text{ A/m}$$

$$H_{34} = H_{56} = \frac{1}{\mu_0}(0.9 \times 10^{-3}) \text{ A/m}$$

$$H_{45} = \frac{1}{\mu_0}(0.6 \times 10^{-3}) \text{ A/m}$$

各支路 H 乘各支路长度并求和，得到

$$\begin{aligned} 1\ 000I &= \frac{1}{\mu_0}(1.2 \times 0.01 + 1.2 \times 10^{-3} \times 0.1 + 0.9 \times \\ &\quad 10^{-3} \times 0.12 + 0.6 \times 10^{-3} \times 0.11) \\ &= 9\ 783 \text{ A·t} \end{aligned}$$

$$I = 9.783\ \text{A}$$

虽然式(11.6.6)在前面例题中没有直接应用到，实际上还是用到的。因为一开始我们就假定一半的磁通量流过左边的半个磁路，在计算 B_{34}、B_{45}、B_{56} 时已经假定磁路中磁通量是守恒的。这正是式(11.6.6)所表示的，进去的磁通量等于出去的磁通量。

例 11－12　参看图 11－38 的磁路，线圈共 1 000 卷，流过的电流是 10 A，磁芯用钢做的，其初始磁化曲线如图 11－39 求气隙中的磁通量密度 B。

解：假定在磁头以及气隙中磁通量为 B，根据式(11.6.5)得到

$$\frac{B}{\mu_0} l_a + H_c l_c = 1\ 000 \tag{11.6.10}$$

式中 $l_a = 0.005$ m，$l_c = (2\pi \times 0.002) - 0.005 = 0.121$ m，上述方程不能用解析法求解，因为 B 与 H_c 的关系是非线性的，如图 11－39 所示的曲线。可以用迭代法进行数值解。

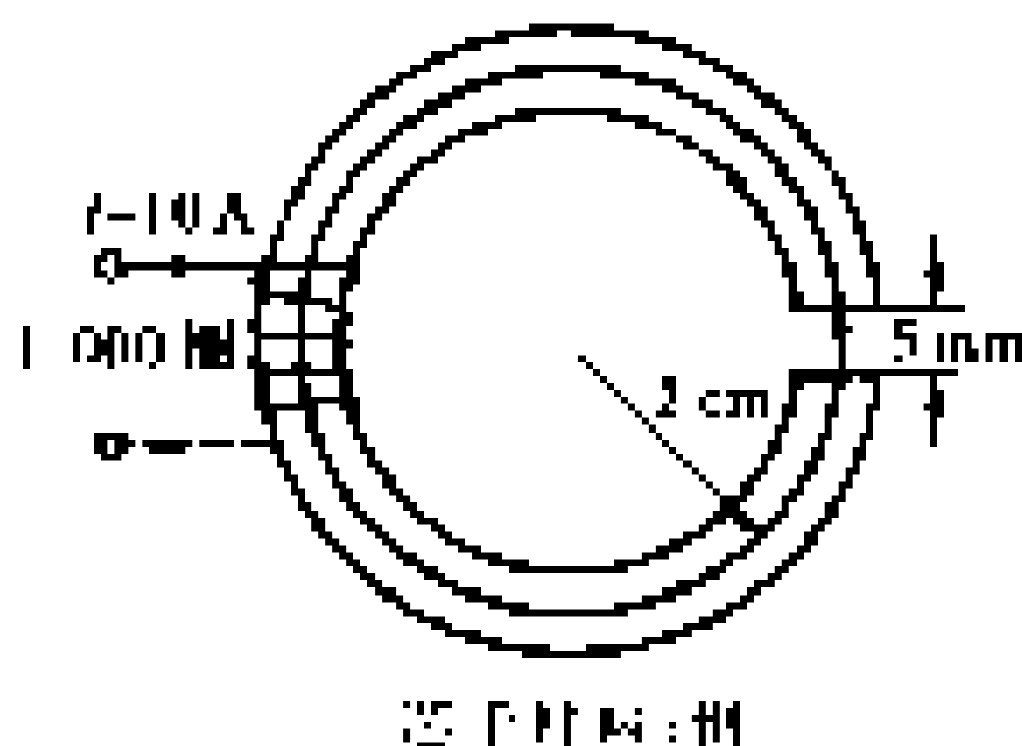


图 11－38　用迭代法求气隙中磁通量

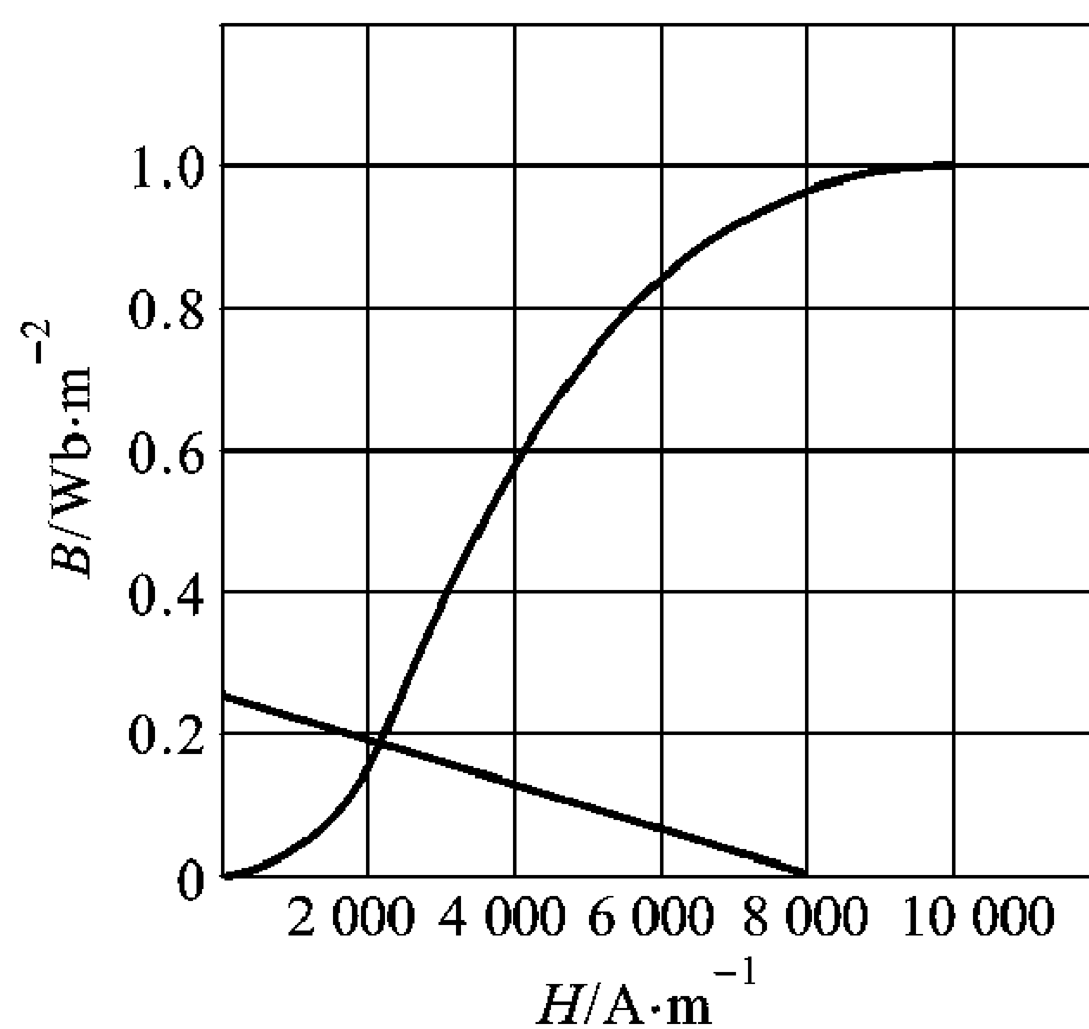


图 11－39　钢的初始磁化曲线，直线相应于式(11.6.10)

将式(11.6.10)写成另一形式

$$B = \frac{(1\ 000 - H_c l_c)\mu_0}{l_a} \tag{11.6.11}$$

通过前面几个例题求解，我们已知绝大部分磁压降在气隙中，作为零级近似，在式(11.6.11)中忽略 $H_c l_c$ 项，求出 B，并记为 $B^{(0)}$，则

$$B^{(0)} = \frac{1\ 000\mu_0}{l_a} = 0.251\ \text{Wb/m}^2$$

从 $B^{(0)}$ 由图 11－39 求出相应的 $H^{(0)}$，有

$$H^{(0)} = 2\ 400\ \text{A/m}$$

将上述 $H^{(0)}$ 代入式(11.6.11)，求出 B 的一级近似 $B^{(1)}$ 为

$$B^{(1)}=\frac{(1\,000-2\,400\times0.121)\mu_0}{0.005}$$
$$=0.178\ \mathrm{Wb/m^2}$$

由图 11－39 找出相应的 $H^{(1)}$ 为

$$H^{(1)}=2\,100\ \mathrm{A/m}$$

于是可得二级近似 $B^{(2)}$

$$B^{(2)}=\frac{(1\,000-2\,100\times0.121)\mu_0}{0.005}=0.187\ \mathrm{Wb/m^2}$$

这个过程重复 n 次，可得 n 级近似的 $B^{(n)}$。借助计算机，磁化曲线可用一个多项式近似，并存在计算机里，只要简单几行程序、很少的计算时间即可求出 B。本例也可用图解。式(11.6.10)或式(11.6.11)在 $B-H$ 平面是一直线方程(见图 11－39)，该直线与磁化曲线交点即是我们要求的解。由图可见，交点处 $B=0.19\ \mathrm{Wb/m^2}$ 与迭代法结果十分吻合。

本章要点

- 恒定电流产生的电场叫恒定电场。支配恒定电场的方程是 $\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$ 以及本构关系 $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$。恒定电场 $\boldsymbol{E}$ 可表示成电位 Φ 的负梯度，$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$，电位 Φ 满足拉普拉斯方程 $\nabla^2\Phi=0$，但没有与静电场类似的泊松方程，因为电荷有点源，恒定电流没有点源。

  $\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E}$ 就是欧姆定理的微分形式，$\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0$ 就是基尔霍夫电流定律的微分形式，$p=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$ 是焦耳定理的微分形式，恒定电场中边界条件表示为 $E_{t1}=E_{t2}$，$J_{n1}=J_{n2}$，或 $\sigma_1\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial n_1}=\sigma_2\dfrac{\partial\Phi_2}{\partial n_2}$，$\Phi_1=\Phi_2$。

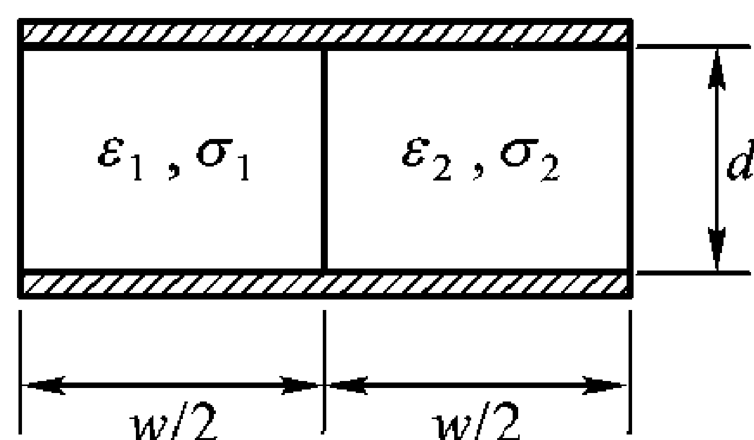
  如果所研究静电问题几何特性与恒定电流问题相同，恒定电流问题中电位函数与电场表达式就跟静电问题相同，只要 ε 换成 σ，Q 换成 I，ρ_s 换成 J_n。此外静电场问题中的电容就成为恒定电流问题中的电导。
- 恒定电流产生的磁场叫恒定磁场，其基本方程为 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 以及本构关系 $\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$。$\boldsymbol{B}$ 可表示为矢量位 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，矢量位 $\boldsymbol{A}$ 满足的方程为 $\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}$，对于无界均匀介质，$\boldsymbol{A}$ 的解为 $\boldsymbol{A}=\dfrac{\mu}{4\pi}\displaystyle\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$，$\boldsymbol{H}=\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}V'$，这就是毕奥－萨伐定理。
- 恒定电流产生的恒定磁场，可以直接用毕奥－萨伐定理计算。当所研究问题具有几何对称性时，利用安培定理，也可以方便地求出磁场。

- 恒定磁场对电流的作用力由洛伦兹力方程 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ 确定，也可表示为 $\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$。定义通电线圈磁矩 $\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 为电流包围的有向面积，则通电线圈在磁场中受到的转矩为 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$。
- 电流周围有磁场，其磁场能量密度 $w_{\mathrm{m}}=\frac{\mu}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}$。通电线圈储存的总磁场能量 $U_H=\frac{\mu}{2}\int_V\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}V=\frac{L}{2}I^2$，其比例系数 L 定义为线圈的电感，只与线圈的几何、物理结构有关，两通电线圈间有互感，$M_{12}=M_{21}$。
- 磁场中的介质(如果磁场足够强)可以看成无限多按磁场有序排列的磁偶极子的集合。构成介质的磁偶极子按磁场的有序排列叫做介质的磁化。磁化介质中除了外加电流产生的磁场外，还有因介质磁化而有序排列的磁偶极子产生的磁场。介质磁化的结果，在介质表面引起面电流 $\boldsymbol{J}_{s\mathrm{m}}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}_0$，在介质内部有体电流 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{m}}=\nabla\times\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{M}$ 为单位体积总磁矩数。
- 不同介质磁导率 μ_{r} 是不同的，一般介质 $\mu_{\mathrm{r}}\approx 1$，铁磁介质 $\mu_{\mathrm{r}}>>1$，且是非线性的，即 μ_{r} 与 $\boldsymbol{H}$ 大小有关。

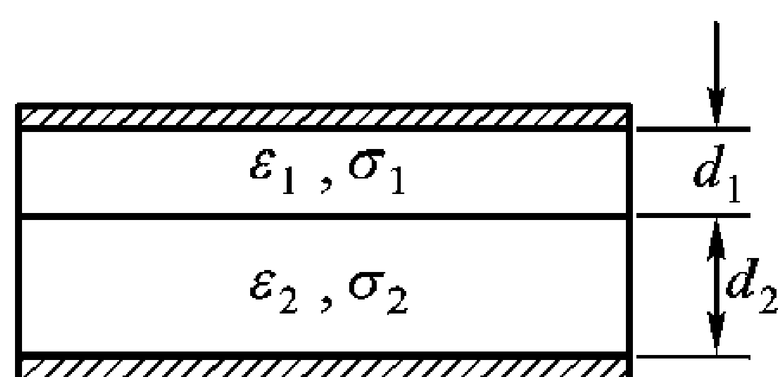
分析磁路的基本方程是 $\sum\limits_m H_m l_m=nI$，$\sum\limits_m B_m A_m=0$，这是 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$ 或 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 的简化，这两个方程与电路中的基尔霍夫电压、电流定律 $\sum\limits_m V_m=0$，$\sum\limits_m I_m=0$ 相当。电路中的电压降 V 与磁路中磁压降 Hl 相当，电压源 V 与磁动势 nI 相当，电流 I 与磁通量 $\psi=BA$ 相当。利用上述对偶关系，解电路问题方法可借用到磁路问题中。

习题

11.1　如题图 11.1，平行板间填充两种介质，极板总的面积为 A，两种介质的介电常数和电导率分别为 ε_1、σ_1，ε_2、σ_2，极板间距为 d，求该系统等效电路及电路参数表达式。



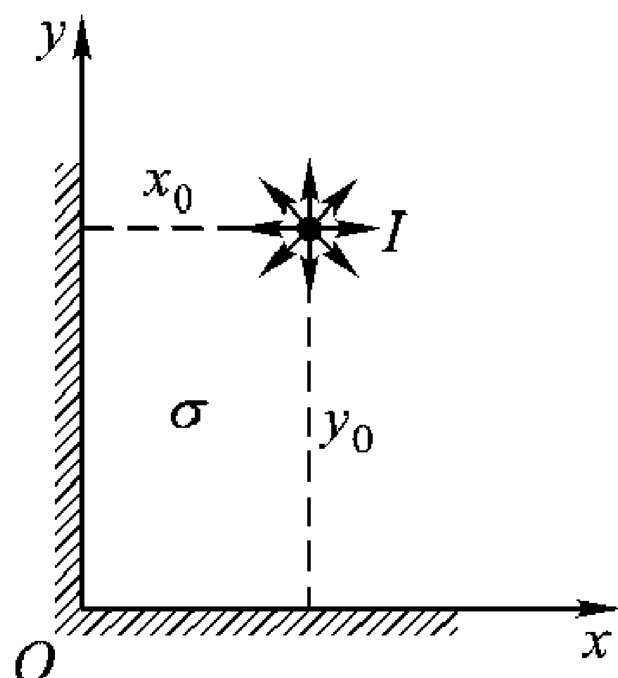
题图 11.1



题图 11.2

11.2　如题图 11.2，平行板电容器用两层介质填充，求该系统的等效电路及电路参量。电容器的极板面积为 A，两层介质厚度为 d_1、d_2，介电常数 ε_1、ε_2，电导率为 σ_1、σ_2。

11.3　如题图 11.3，通有电流 I 的导线距直角导电板系统两导电板距离分别为 x_0、y_0，填充介质电导率为 σ，求电位函数 $\Phi(x, y, z)$。



题图 11.3

11.4　如题图 11.4，在导电板上面有一个点电极，从该电极流出电流为 I，问题如下：

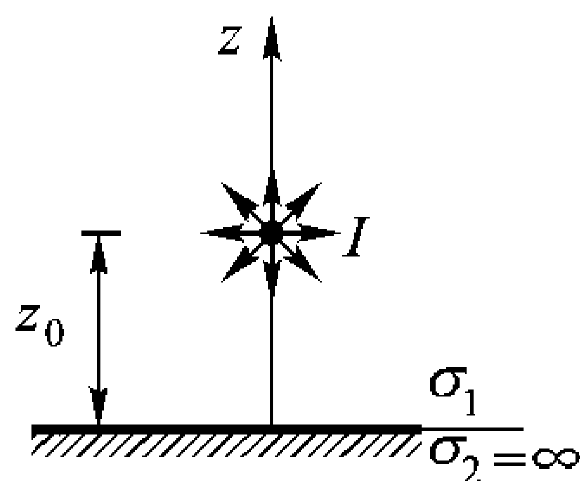
(1) 计算 $\Phi(x, y, z)$，$(z>0)$；

(2) 计算导电板表面电流密度 $J_s(x, y)$；

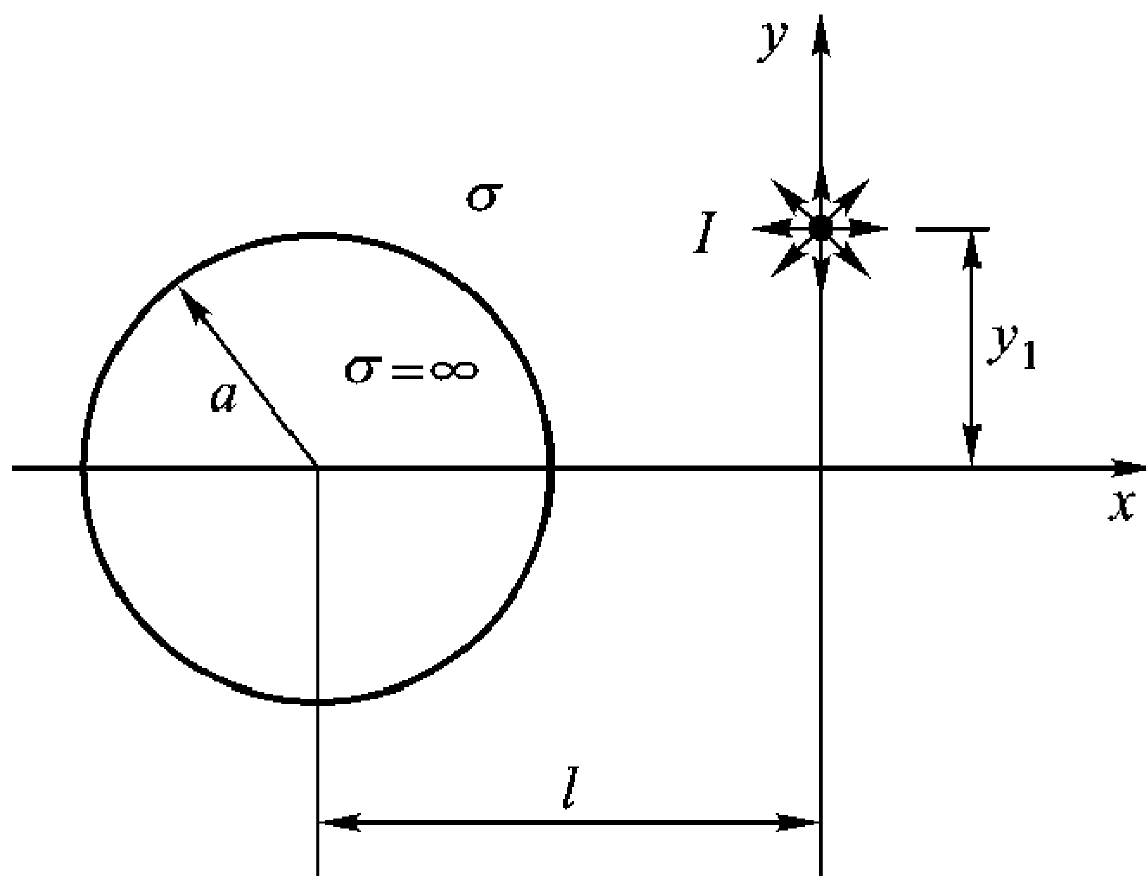
(3) 画出电流线轨迹。

11.5　如题图 11.5，一个点电极位于 $(0, y_1, 0)$，半径为 a 的导电球位于 $(-l, 0, 0)$。点电极流出电流为 I，媒质电导率为 σ，计算 y 轴上电位分布。

11.6　两根同样的钢管埋在地下，长为 1 km，直径 12″(即 0.304 8 m)，间距 100 m，地的电导率 $\sigma=0.01$ S/m，问两钢管间电阻是多少？



题图 11.4



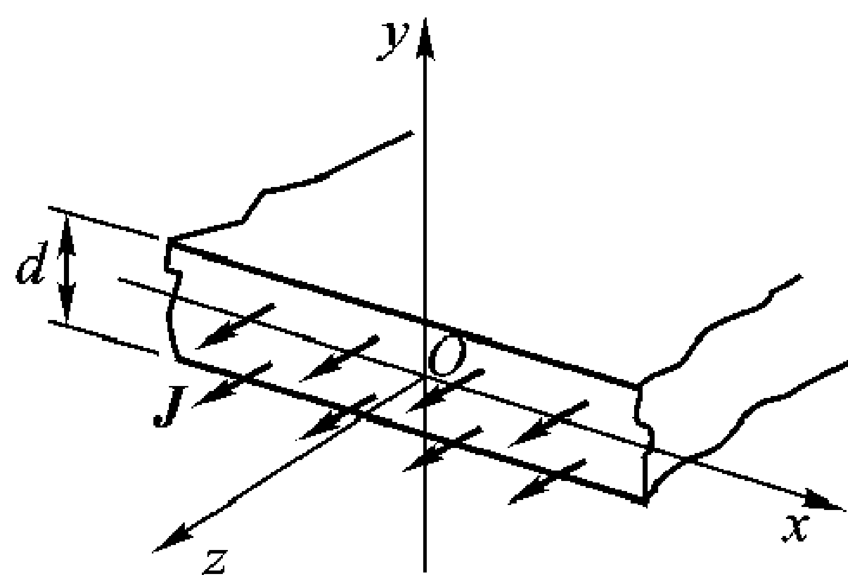
题图 11.5

11.7　一个电容器相对介电常数 $\varepsilon_r=4$，其电容量为 300 pF，如果去掉介质，并用电导率 $\sigma=10^{-3}$ S/m^{-1}材料填充，问此时两板间电阻多少？

11.8　b 米长导线围成一方框，通有电流 I，求方框中心的磁场 $\boldsymbol{H}$。

11.9　如题图 11.9，厚度为 d 的导电板置于 $-d/2 \leqslant y \leqslant d/2$。$z$ 方向电流密度为 J，求空间磁场分布。

11.10　地球表面磁场在北极近似为 0.62 G（1G $=10^{-4}$ Wb/m^2）。假设这个磁场由赤道上的大线圈产生，估计流过此线圈电流的大小。(地球半径约 6 500 km。)



题图 11.9

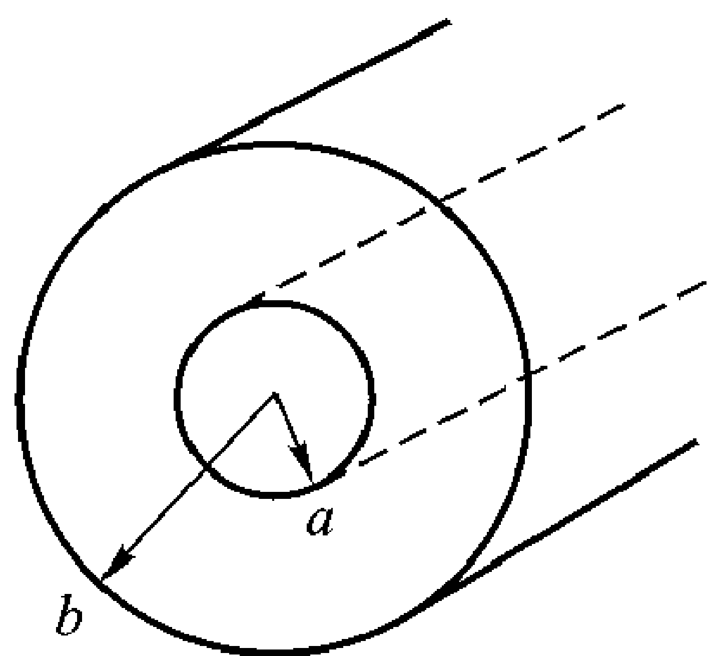
11.11　如题图 11.11，内径为 a 外径为 b 的导电管，流过直流电流 I，求以下情况时的 $\boldsymbol{H}$：

(1) $\rho \leqslant a$；

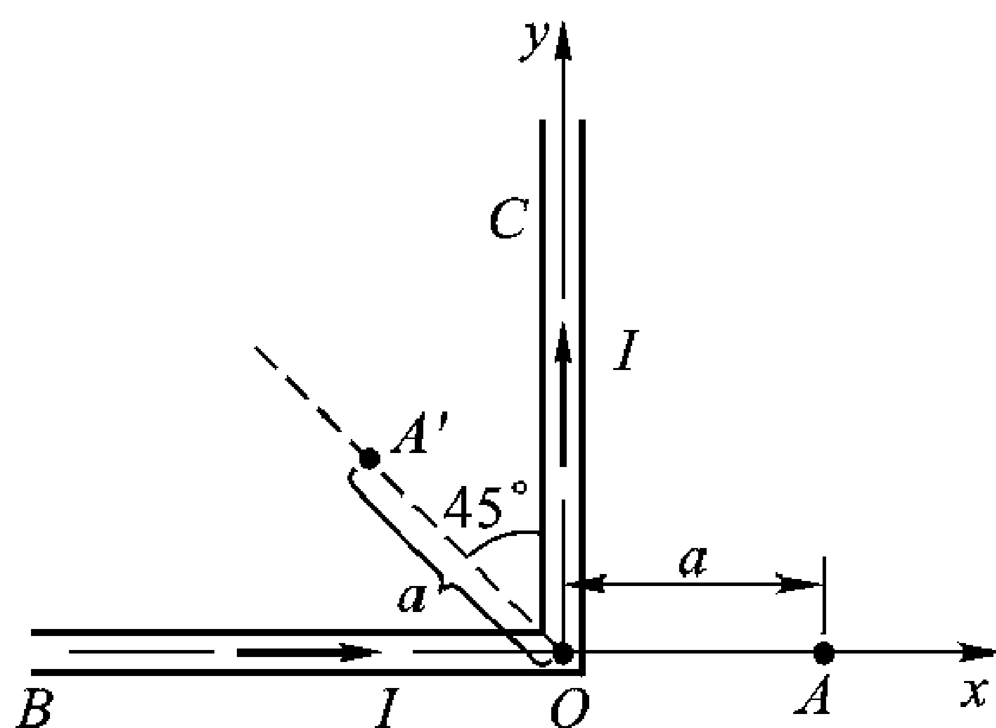
(2) $a \leqslant \rho \leqslant b$；

(3) $b \leqslant \rho$。

11.12　如题图11.12，一无限长导线弯成直角，导线通过的电流为 I，计算 A 点的磁场 $\boldsymbol{H}$。



题图11.11



题图11.12

11.13　地球赤道处磁通量密度 $B=10^{-4}\ \mathrm{Wb/m^2}$。计算电离层电子回旋频率，假定电离层电子密度为 $10^{11}/\mathrm{m^3}$。

11.14　见图11－18，磁场由 $5\times10^{-4}\ \mathrm{Wb/m^2}$ 变到 $10^{-3}\ \mathrm{Wb/m^2}$，其他参数不变，求：

(1) 电子出磁场区位置；

(2) 电子飞出磁场区角度。

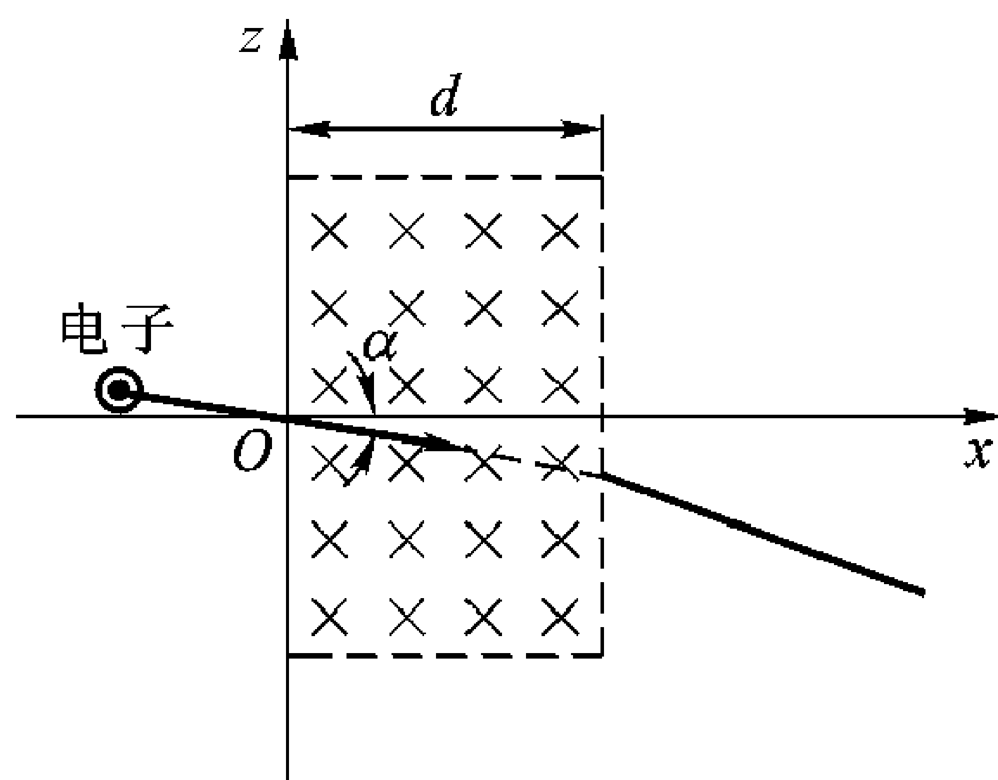
11.15　电子以初始动能为 $\frac{m_e v_0^2}{2}$，进入均匀磁场区域，如题图11.15，除了进入磁场区电子与轴有一倾角 α 外，其他均与图11－18相同，问题如下：

(1) 证明在磁场区

$$v_z = v_0 \cos(\omega_c t + \alpha)$$

$$v_z = -v_0 \sin(\omega_c t + \alpha)$$

式中 $\omega_c = \frac{q_e B}{m_e}$，$t=0$ 相应为电子进入磁场区时刻；



题图11.15

(2) 任意时刻 t 电子坐标 x、z；

(3) 电子飞出磁场区的坐标，假定 $v_0=2\times10^7\ \mathrm{m/s}$，$\alpha=5°$，$\omega_c=8.77\times10^7\ \mathrm{rad/s}$，$d=4\ \mathrm{cm}$；

(4) 计算电子飞出磁场区与 x 轴夹角，并描出电子整个运动轨迹。

11.16　两平行导线间距1.5 m，导线上通过电流为100 A，但方向相反，求单位长度导线所受力。

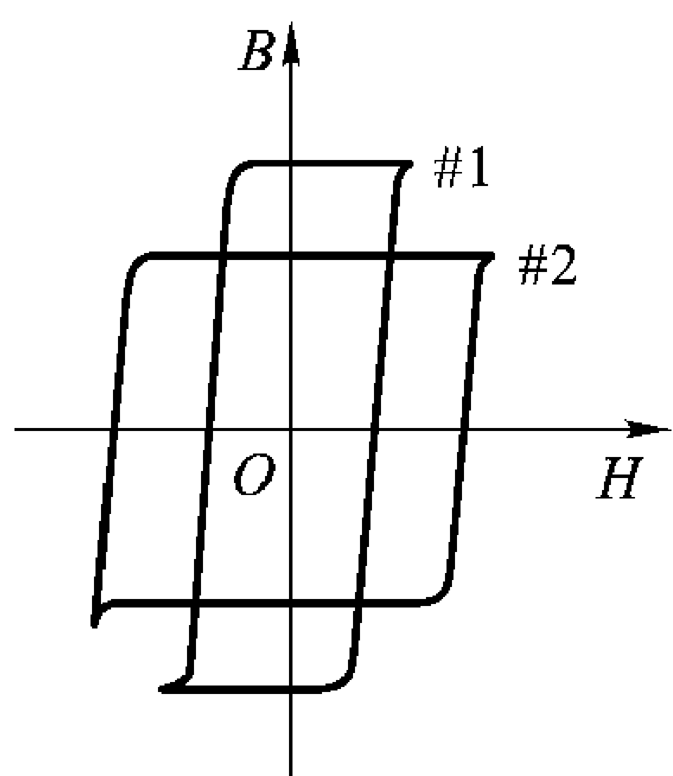
11.17　半径为0.5 m总共100圈的线圈，通过电流2 A，此线圈放在地球磁场(近似为 $5\times10^{-5}\ \mathrm{Wb/m^2}$)中，如何放置该线圈使其转矩最大？其值多大？

11.18　参看图11－29 (a)所示磁化曲线，因为 μ 与 $\boldsymbol{H}$ 相关，所以这种材料是非线性的，对恒定磁场，磁化曲线每点与原点连线斜率就是该点对应的 μ，图11－29 (b)就是这

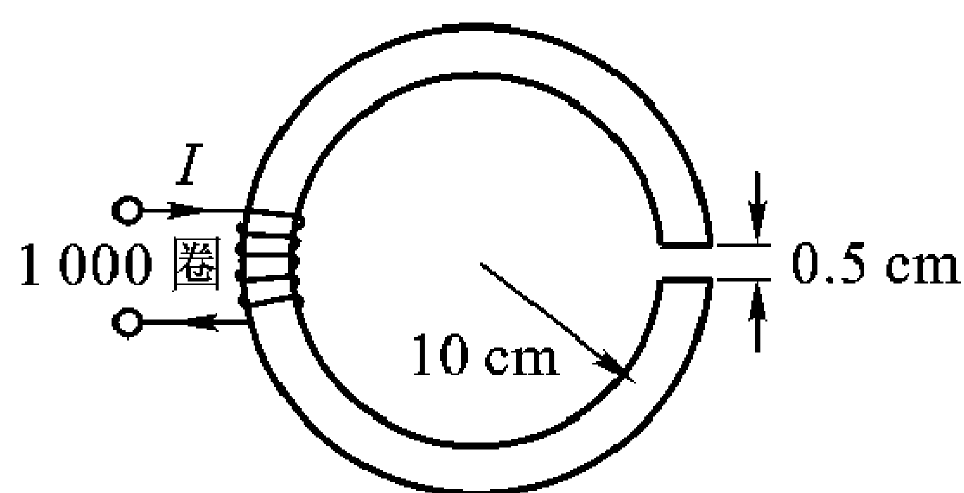
样得出的。现在假定该磁体放到时谐场中，有效 μ 将与静态 μ 不同。设 $H = H_0 + H_1\cos(\omega t + \varphi)$。$H_0$ 是偏置磁场，H_1 是时谐场幅度。假定 $H_1 << H_0$，那么有效 μ 就是磁化曲线 H_0 所在点切线的斜线。根据图 11－29 (a)作出有效 μ 与 H_0 关系曲线，并将它与图 11－29 (b)比较。

11.19　如图 11－33，直径为 1.5 cm，厚度为 0.3 cm 的永磁体圆盘放在磁场中，圆盘所受转矩等于 1.2×10^{-3} N·m，磁场 $B = 10^{-3}$ Wb/m²，问永磁体剩磁等于多少？

11.20　比较题图 11.20 两种铁氧体的磁滞曲线，一个较窄、一个较宽。问哪一种铁氧体需要的开关电流较小？哪一种铁氧体比较耐外界磁场干扰？



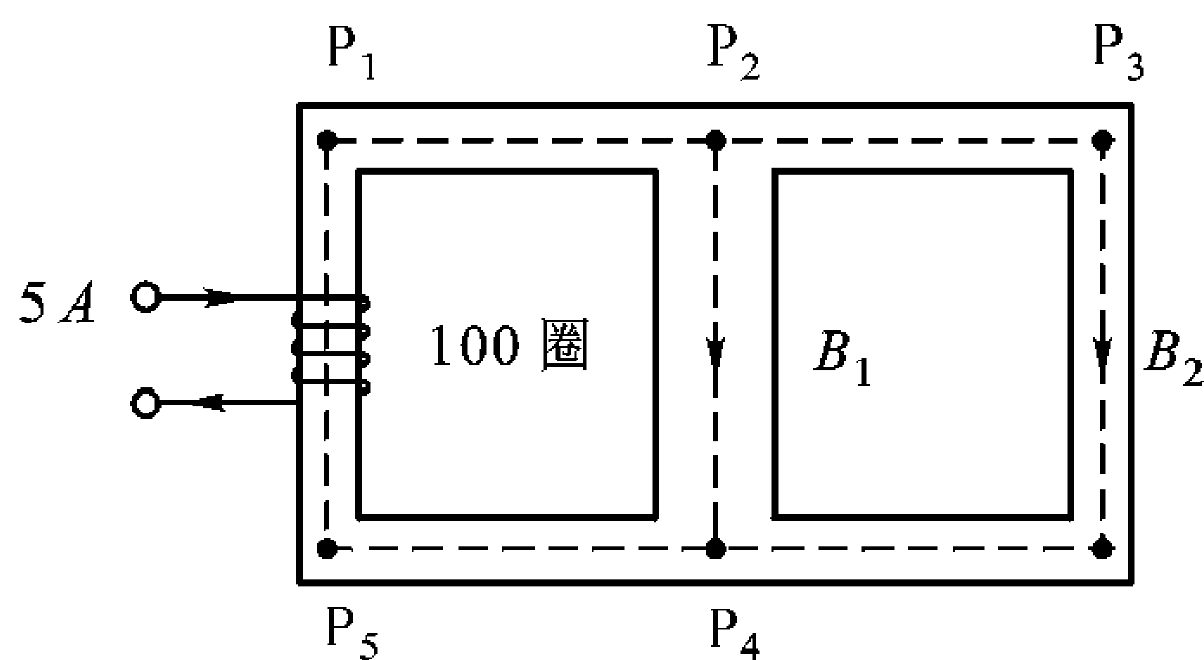
题图 11.20



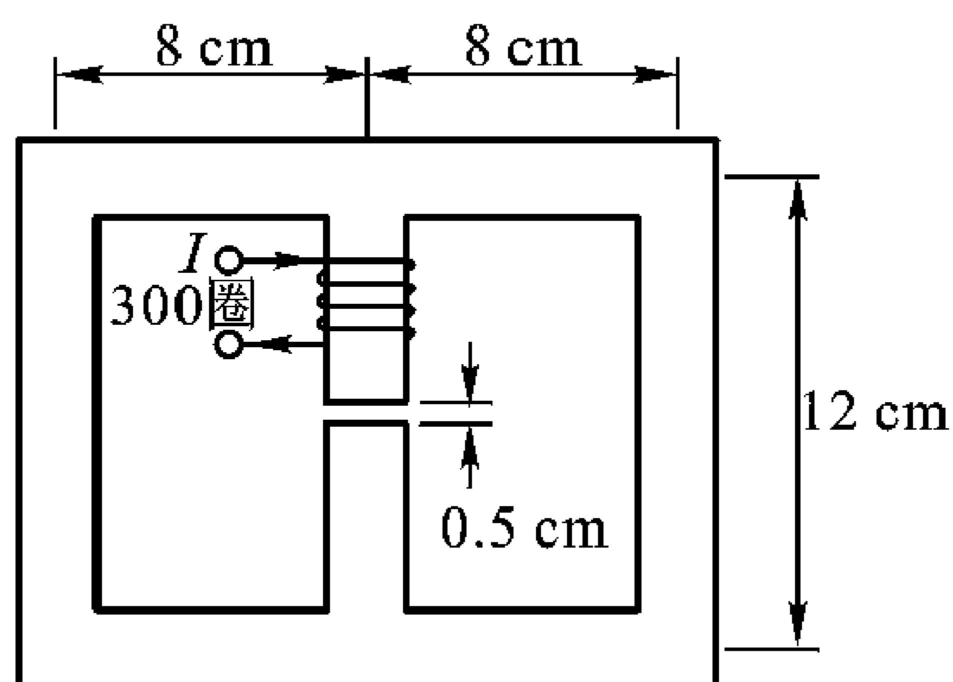
题图 11.21

11.21　如题图 11.21 所示磁路，磁性材料是钢，磁化曲线如图 11－39。如要求气隙中磁通量密度为 0.5 Wb/m²，求电流 I。

11.22　参看题图 11.22 磁路，材料的 $\mu = 600\mu_0$，求磁通量密度 B_1 和 B_2，并标出它们的方向。图中，$P_1P_2 = 9$ cm，$P_2P_4 = P_5P_1 = 10$ cm，$P_2P_3P_4 = 26$ cm，$P_4P_5 = 9$ cm，截面 $P_2P_4 = 12$ cm²，其他分支截面 $= 9$ cm²。



题图 11.22



题图 11.23

11.23　题图 11.23 所示磁路，铁芯材料 $\mu = 200\mu_0$，截面为 4 cm²，如要在气隙中得到 0.5 Wb/m²磁通量密度，问线圈激励电流应多大？

11.24　如图 11－38，如果激励电流 $I = 15$ A，其他条件不变，求 B。

第12章　波导器件的等效网络分析*

在前面几章，尤其是第6、7章中，曾结合对各类波导、谐振器的讨论，从工作原理出发，分析过以波导、谐振器为基础的各类波导元件。按功能可将它们分为连接器、衰减器(固定的,可调的)、移相器、终端匹配负载与终端反射器、阻抗匹配器、功率分配与合成器、定向耦合器、波分复用与解复用器、谐振器、滤波器、隔离器、环形器、波形转换器等；按波导形式则可分为矩形波导与圆波导型、同轴线型、微带线型、平板介质波导型、光纤型等；按工作波型又可分为单模元件和多模元件。以上列举的诸多功能各异、结构形式多样的波导器件，不仅不同功能的器件结构与工作原理不一，即使同一功能的器件也可基于不同的结构与工作原理。我们不可能对如此多的器件一个一个研究，因此需要一种统一的方法去分析处理，这就是本章要讨论的波导器件的等效网络分析法。有源器件涉及到非线性问题，比较复杂，本章重点讨论线性、无源器件。

本章12.1节按器件与系统连接的端口数对器件进行分类及其网络表示，12.2节给出N端口网络的矩阵表示；12.3节讨论无源、互易、无耗网络矩阵的一般特性，最后12.4节给出用网络表示的波导器件的特性。

12.1　波导器件的分类与等效网络表示

12.1.1　按与系统连接端口数对器件进行分类

本书前面对波导器件的分析都是从器件所具有的功能这个角度进行的，我们关心的是器件内部的物理过程。本章则从系统角度看待波导器件，着眼于器件与系统的联系，重点是激励与响应的关系，而不管器件的具体结构与工作机理。因此可按器件与系统连接端口的多少对器件进行分类，这就有了所谓一端口器件、二端口器件、三端口器件、四端口器件以至更多端口器件。

终端匹配负载、终端失匹器、终端反射器、反射式谐振器等都只有一个端口与系统耦合，属于一端口器件。作为信号源的微波振荡器、激光器，检测信号的微波检波器，光探测器也是一端口器件。它们是有源的，不是本章讨论的

* 本章12.3、12.4节主要参考廖承恩的《微波技术基础》。

重点。

光纤连接器、衰减器、移相器、匹配器、隔离器、波导滤波器、光纤光栅、通过式谐振器、滤波器、不同波导间的过渡器(矩形波导↔圆波导，同轴线↔矩形波导、微带↔矩形波导、同轴线↔微带等)都是二端口器件。

环形器是典型的三端口器件，矩形波导的 E 分支、H 分支、Y 分支、1×2 光纤耦合器、波分复用、解复用器也是三端口器件。

四端口器件以定向耦合器为代表。定向耦合器式光纤波分复用器、功率分配器、矩形波导的双 T、魔 T 都是四端口器件。光纤星形耦合器端口数可大于 4。

如果 N 端口器件除了感兴趣的端口外，所有其他端口都接上终端匹配负载或终端反射器，并把这些负载与反射器看成器件的一部分，就简化为一端口器件。如果除了 i、j 两个端口外，所有其他端口与终端负载或终端反射器相连，并且也把这些负载或反射器看成器件一部分，那么就简化为二端口器件，所以一个波导器件究竟视为几端口器件，可视分析问题的性质而定。

12.1.2　N 端口器件的网络表示及其能量关系

N 端口器件的网络表示

图 12－1 (a)是与矩形波导系统连接的 N 端口器件，这个器件用图 12－1 (b)的 N 端口网络表示，与端口连接的波导则用传输线等效，其等效阻抗为 Z_{en}。端口面上的特征量，可以用传输线上的电压 V_n、电流 I_n表示，也可用入

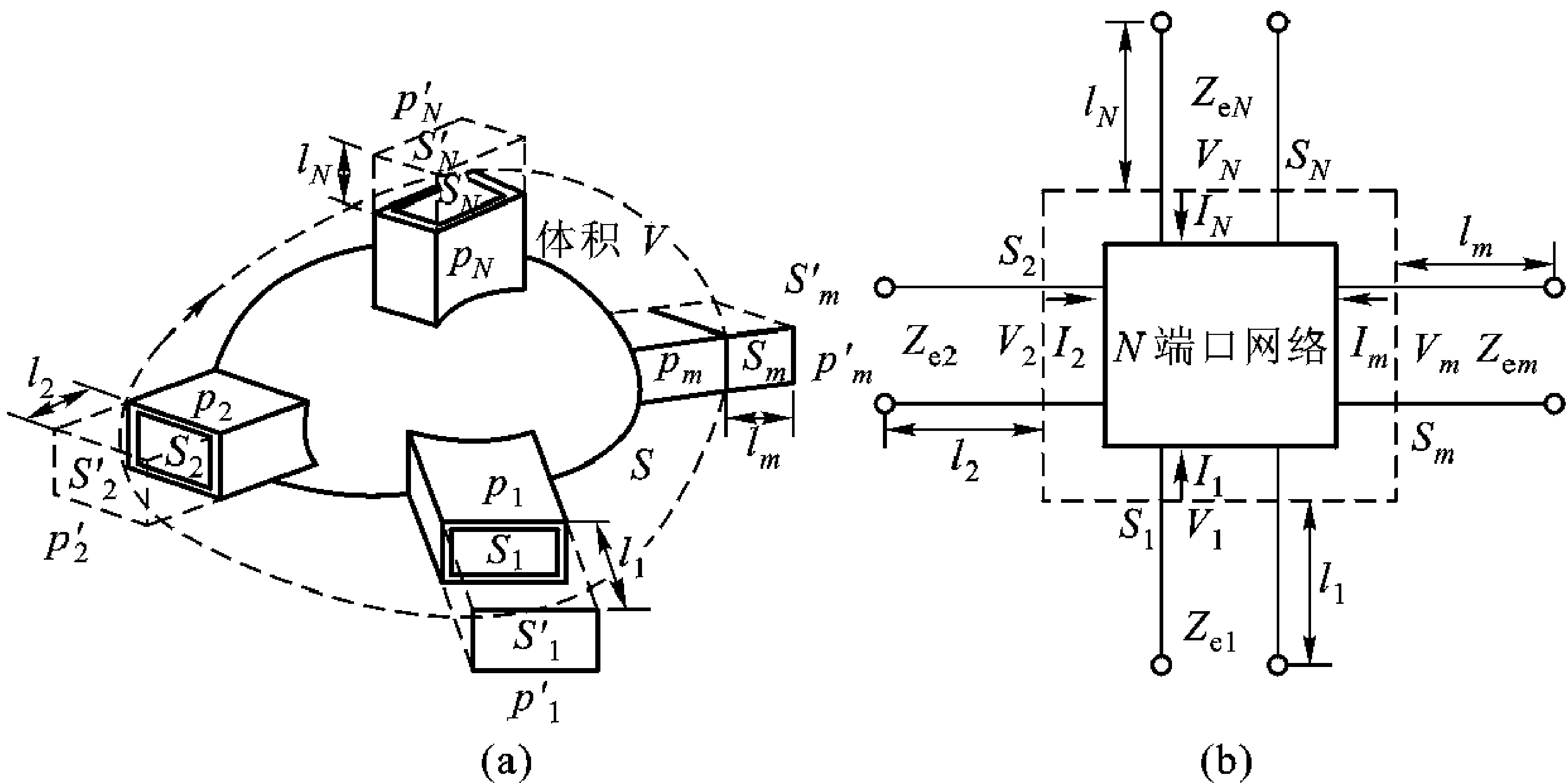


图 12－1　N 端口器件及其等效网络

(a) N 端口器件　(b) 等效 N 端口网络

射波与反射波表示，下标 n 表示属于第 n 端口的量，$n=1$，2，…，m，…，N。电流 I_n 的正方向定义为流进第 n 端口电流的方向。对于图 12－1 所示 N 端口器件，入射波流进端口，反射波从端口流出，习惯上用出射波表示从端口流出的量。本章后面采用出射波术语，但出射波包含的可以不只是反射波。

N 端口器件用 N 端口网络等效后，从系统角度看，主要关心网络的外部特性，即表示网络端口状态的各特征量之间的关系。低频时描述传输线状态的特征量用电压、电流较为方便，网络各端口特征量间的关系常用各端口电压、电流的变换关系表示。高频时，电压、电流没有确切的物理意义。网络各端口特征量间的关系常用各端口入射波与出射波的变换关系描述。因为工程技术人员熟悉用电压、电流描述电路状态，有时为了便于理解，特别是用到阻抗、导纳概念时，用电压 V、电流 I 描述端口状态还是必要的。

N 端口网络的能量关系

将复数坡印廷矢量 $\boldsymbol{S}$ 对包括 N 个端口表面 S_n（$n=1$，2，…，N）在内的闭曲面 S 进行积分[见图 12－1(a)]，因为端口 S_n 以外的表面电磁场量等于零，只要在 N 个端口表面上积分就可以了，即

$$\oint_S \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S=\sum_{n=1}^{N}\int_{S_n}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S=\sum_{n=1}^{N}\int_{S_n}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S$$

穿过第 n 波导端口表面 S_n 的纵向功率只与电场、磁场横向分量 $\boldsymbol{E}_\mathrm{t}$、$\boldsymbol{H}_\mathrm{t}$有关，而根据波导的传输线模型，横向场量 $\boldsymbol{E}_\mathrm{t}$、$\boldsymbol{H}_\mathrm{t}$可用模式函数 $\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{h}$ 与其幅值 V、I 的乘积表示。模式函数适当归一化后，波导纵向功率流与等效传输线传送的功率相等，所以上式可进一步表示为

$$\begin{aligned}\oint\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S&=\sum_{n=1}^{N}\int_{S_n}(\boldsymbol{E}_\mathrm{t}\times\boldsymbol{H}_\mathrm{t}^*)\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S\\&=\sum_{n=1}^{N}\int_{S_n}[(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{h}^*)\cdot\boldsymbol{n}_0V_nI_n^*]\mathrm{d}S\\&=\sum_{n=1}^{N}V_nI_n^*\int_{S_n}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{h}^*)\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S\\&=\sum_{n=1}^{N}V_nI_n^*\end{aligned}\tag{12.1.1}$$

而根据复数坡印廷定理[见式(3.6.15)]，有

$$-\oint_S\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S=P_R+\mathrm{j}2\omega(W_\mathrm{m}-W_\mathrm{e})\tag{12.1.2}$$

式中 $\boldsymbol{n}_0$取闭曲面向外的法线方向。这就是说通过 N 个端口传输线流入 N 端口网络内复功率的实部等于网络内功率的损耗，而虚部用来平衡网络对于时间呈

现电性或磁性的平均净储能。

12.2 N 端口网络的矩阵表示

N 端口网络可以用阻抗矩阵[Z]、导纳矩阵[Y]、散射矩阵[S]、转移矩阵[A]和传输矩阵[T]等多种形式表示，现分别讨论如下。

12.2.1 阻抗矩阵[Z]与导纳矩阵[Y]

对于图 12-1(b)所示 N 端口网络，只要网络是线性的，端口上的电压与电流就有如下关系：

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \cdots + Z_{1N}I_N \quad (\text{对于端口 }1) \tag{12.2.1a}$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \cdots + Z_{2N}I_N \quad (\text{对于端口 }2) \tag{12.2.1b}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V_N = Z_{N1}I_1 + Z_{N2}I_2 + \cdots + Z_{NN}I_N \quad (\text{对于端口 }N) \tag{12.2.1N}$$

式中(V_1, I_1)、(V_2, I_2)、(V_N, I_N)分别为端口 1、端口 2、端口 N 上的电压、电流。

式(12.2.1)又可写成矩阵形式

$$[V] = [Z][I] \tag{12.2.2}$$

式中[V]、[I]分别表示 N 端口网络的电压、电流向量，且

$$[V] = [V_1, V_2, \cdots, V_N]^{\mathrm{T}} \tag{12.2.3}$$

$$[I] = [I_1, I_2, \cdots, I_N]^{\mathrm{T}} \tag{12.2.4}$$

右上角 T 表示矩阵转置。

[Z]为 $N \times N$ 矩阵，有

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ & & & \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix} \tag{12.2.5}$$

$$Z_{nm} = \left| \frac{V_n}{I_m} \right|_{I_k = 0\,(\text{对于 } k \neq m)} \tag{12.2.6}$$

式(12.2.2)也可写成

$$[I] = [Y][V] \tag{12.2.7}$$

式中[Y]为 $N \times N$ 矩阵，即

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2N} \\ & & & \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \cdots & Y_{NN} \end{bmatrix} \tag{12.2.8}$$

$$Y_{nm}=\left.\frac{I_n}{V_m}\right|_{V_k=0(\text{对于}k\neq m)} \tag{12.2.9}$$

Z_{nm}具有阻抗量纲，Y_{nm}具有导纳量纲，所以$[Z]$矩阵叫做阻抗矩阵，简称 **Z** 矩阵，$[Y]$矩阵叫做导纳矩阵，简称 **Y** 矩阵。式(12.2.2)、(12.2.7)就是 N 端口网络的 **Z** 矩阵、**Y** 矩阵表示。显然 **Z** 矩阵与 **Y** 矩阵有如下关系

$$[Z]=[Y]^{-1} \tag{12.2.10}$$

式中右上角“-1”表示矩阵求逆。

为使网络的矩阵参数与端口波导等效传输线的等效阻抗无关，需将各端口的电压、电流、阻抗进行归一化。所谓归一化是指把网络各端口的阻抗对其等效阻抗归一化，为此令归一化电压 v_n 与归一化电流 i_n 为

$$v_n=\frac{V_n}{\sqrt{Z_{\mathrm{e}n}}} \tag{12.2.11a}$$

$$i_n=I_n\sqrt{Z_{\mathrm{e}n}} \tag{12.2.11b}$$

同时引入归一化电压向量$[v]=[v_1, v_2, \cdots, v_N]^{\mathrm{T}}$，电流向量$[i]=[i_1, i_2, \cdots, i_N]^{\mathrm{T}}$，式(12.2.2)、式(12.2.7)成为

$$[v]=[z][i] \tag{12.2.12}$$

$$[i]=[y][v] \tag{12.2.13}$$

$[z]$和$[y]$都是 $N\times N$ 矩阵，分别叫做归一化阻抗矩阵，归一化导纳矩阵，其中

$$z_{nm}=\frac{Z_{nm}}{\sqrt{Z_{\mathrm{e}n}Z_{\mathrm{e}m}}} \tag{12.2.14a}$$

$$y_{nm}=Y_{nm}\sqrt{Z_{\mathrm{e}n}Z_{\mathrm{e}m}} \tag{12.2.14b}$$

根据归一化电压 v_n、归一化电流 i_n 的定义，从第 n 端口流进的复功率流

$$P_n=V_nI_n^*=v_ni_n^* \tag{12.2.15}$$

例 12-1　求图 12-2 所示 π 网络的 **Z** 矩阵。

解： π 网络属于二端口网络，其 **Z** 矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}V_1\\V_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{11}&Z_{12}\\Z_{21}&Z_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}$$

根据式(12.2.6)，Z_{11}是当端口 2 开路($I_2=0$)时，端口 1 处电压电流之比，故

$$Z_{11}=\left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}=Z_{\mathrm{A}}//(Z_{\mathrm{B}}+Z_{\mathrm{C}})=\frac{Z_{\mathrm{A}}(Z_{\mathrm{B}}+Z_{\mathrm{C}})}{Z_{\mathrm{A}}+Z_{\mathrm{B}}+Z_{\mathrm{C}}}$$

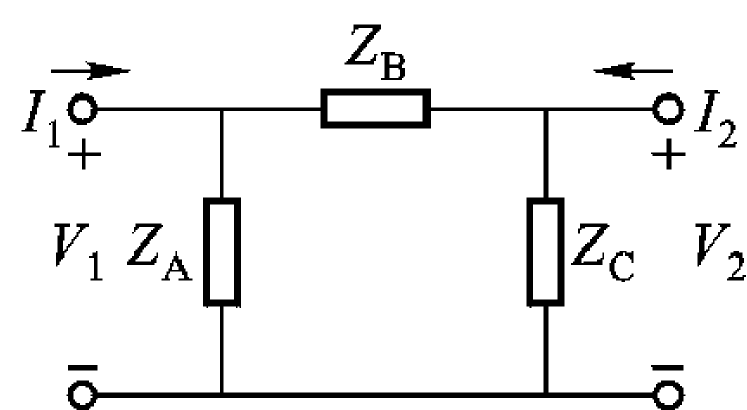


图 12-2　例 12-1 图

而 Z_{12}是当端口 1 开路($I_1=0$)时端口 1 两端的电压

(即 Z_A两端电压)与 I_2 之比，因为

$$V_1 = \frac{Z_A}{Z_A + Z_B} V_{AB}$$

式中，$V_{AB} = I_2[Z_C // (Z_A + Z_B)]$，$V_1$ 是 Z_A与 Z_B串联后 Z_A两端的压降，由此得到

$$Z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0} = \frac{Z_A}{Z_A + Z_B}[Z_C // (Z_A + Z_B)] = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

同理可得到

$$Z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0} = \frac{Z_C}{Z_B + Z_C}[Z_A // (Z_B + Z_C)] = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

$$Z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0} = Z_C // (Z_A + Z_B) = \frac{Z_C(Z_A + Z_B)}{Z_A + Z_B + Z_C}$$

所以 π 网络的 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵为

$$[Z] = \frac{1}{Z_A + Z_B + Z_C}\begin{bmatrix} Z_A(Z_B + Z_C) & Z_A Z_C \\ Z_A Z_C & Z_C(Z_A + Z_B) \end{bmatrix}$$

12.2.2 散射矩阵$[S]$

网络端口的状态既可用等效传输线上的电压 V 与电流 I 表示，也可用入射波电压 V^i和反射波电压 V^r表示。根据传输线理论，V^i、V^r与传输上电压 V、电流 I 的关系为

$$V_n^i = \frac{1}{2}[V_n + Z_{en} I_n] \tag{12.2.16a}$$

$$V_n^r = \frac{1}{2}[V_n - Z_{en} I_n] \tag{12.2.16b}$$

式中下标 n 表示第 n 端口的量。两边除以$\sqrt{Z_{en}}$，对入射波电压 V_n^i，反射波电压 V_n^r进行归一化，并定义 a_n、b_n 分别为归一化入射波和出射波，得到

$$a_n = \frac{V_n^i}{\sqrt{Z_{en}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_n}{\sqrt{Z_{en}}} + \sqrt{Z_{en}} I_n\right) \tag{12.2.17a}$$

$$b_n = \frac{V_n^r}{\sqrt{Z_{en}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{V_n}{\sqrt{Z_{en}}} - \sqrt{Z_{en}} I_n\right) \tag{12.2.17b}$$

以及

$$V_n = \sqrt{Z_{en}}(a_n + b_n) \tag{12.2.18a}$$

$$\sqrt{Z_{en}} I_n = a_n - b_n \tag{12.2.18b}$$

显然

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{V_n^{\mathrm{r}}}{V_n^{\mathrm{i}}}=\Gamma_n \tag{12.2.19}$$

根据式(12.2.11)定义的归一化电压和归一化电流，式(12.2.17)成为

$$a_n=\frac{1}{2}(v_n+i_n) \tag{12.2.20a}$$

$$b_n=\frac{1}{2}(v_n-i_n) \tag{12.2.20b}$$

或

$$v_n=a_n+b_n \tag{12.2.21a}$$

$$i_n=a_n-b_n \tag{12.2.21b}$$

定义归一化入射波列向量$[a]=[a_1, a_2, \cdots, a_N]^{\mathrm{T}}$，出射波列向量$[b]=[b_1, b_2, \cdots, b_N]^{\mathrm{T}}$，则式(12.2.20)、(12.2.21)成为

$$[a]=\frac{1}{2}([v]+[i]) \tag{12.2.22a}$$

$$[b]=\frac{1}{2}([v]-[i]) \tag{12.2.22b}$$

$$[v]=[a]+[b] \tag{12.2.23a}$$

$$[i]=[a]-[b] \tag{12.2.23b}$$

同时由式(12.2.23)可得

$$[V]=[\sqrt{Z_{\mathrm{e}}}]([a]+[b]) \tag{12.2.24a}$$

$$[I]=[\sqrt{Z_{\mathrm{e}}}]^{-1}([a]-[b]) \tag{12.2.24b}$$

$[\sqrt{Z_{\mathrm{e}}}]$是一对角矩阵，对角线上元素为$\sqrt{Z_{\mathrm{e}n}}$。

当端口状态用归一化入射波 a 与归一化出射波 b 表示后，则网络各端口特征量间关系可表示为

$$b_1=S_{11}a_1+S_{12}a_2+\cdots+S_{1N}a_N \quad (\text{对于端口 } 1) \tag{12.2.25a}$$

$$b_2=S_{21}a_1+S_{22}a_2+\cdots+S_{2N}a_N \quad (\text{对于端口 } 2) \tag{12.2.25b}$$

…………

$$b_N=S_{N1}a_1+S_{N2}a_2+\cdots+S_{NN}a_N \quad (\text{对于端口 } N) \tag{12.2.25N}$$

由上式可见，第 n 端口出射波中包括两部分，第一部分由 $S_{nn}a_n$ 组成，表示端口 n 上的反射波，S_{nn}表示第 n 端口反射系数。第二部分 $S_{nm}a_m$ 表示从 m 端口到 n 端口的传输波。所以 n 端口出射波包括反射波和传输波两部分。

式(12.2.25)还可写成更简洁的矩阵形式

$$[b]=[S][a] \tag{12.2.26}$$

[S]为 $N\times N$ 矩阵

$$[S]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2N} \\ \\ S_{N1} & S_{N2} & \cdots & S_{NN} \end{bmatrix} \tag{12.2.27}$$

$$S_{nm}=\left.\frac{b_n}{a_m}\right|_{a_k=0(对于 k\neq m)} \tag{12.2.28}$$

矩阵[S]叫做散射矩阵，简称 **S** 矩阵，式(12.2.26)就是 N 端口网络的散射矩阵表示。按式(12.2.28)定义，显然 S_{nn}就是其他端口匹配时第 n 端口的反射系数。

由式(12.2.23)、(12.2.26)、(12.2.12)、(12.2.13)可求得[z]、[y]和[S]之间关系

$$[S]=([z]-[1])([z]+[1])^{-1} \tag{12.2.29}$$

$$[z]=([1]+[S])([1]-[S])^{-1} \tag{12.2.30}$$

$$[S]=([1]-[y])([1]+[y])^{-1} \tag{12.2.31}$$

$$[y]=([1]-[S])([1]+[S])^{-1} \tag{12.2.32}$$

式中[1]表示单位矩阵。

在微波频率下，S 参数可以直接测量，应用也最广。下面以二端口网络为例，进一步说明 S 参数的物理意义。

按式(12.2.28)关于 S 参数各元素的定义，要测量二端口网络 S 参数，只能在输入、输出端口完全匹配的条件下才能确定。因为只有在输入或输出端口匹配时，才能实现 $a_1=0$ 或 $a_2=0$。

如要测量 S_{11}和 S_{21}，必须保证输出端特征阻抗 Z_e的传输线处于匹配状态，以便形成 $a_2=0$ 的情况，见图 12－3，此时

$$b_1=S_{11}a_1$$

$$b_2=S_{21}a_1$$

即

$$S_{11}=\left.\frac{b_1}{a_1}\right|_{a_2=0}=\Gamma_{in}=\frac{Z_{in}-Z_e}{Z_{in}+Z_e} \tag{12.2.33}$$

$$S_{21}=\left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0}=\left.\frac{V_2^r/\sqrt{Z_e}}{(V_1+Z_eI_1)/(2\sqrt{Z_e})}\right|_{I_2^i=V_2^i=0}$$

由于 $a_2=0$，故端口 2 的正向电压波 V_2^i 和正向电流波 I_2^i 为零。V_1 可以用信号源电压 V_{g1}与信号源内阻 Z_e(与输入端传输线特征阻抗 Z_e相等)上的电压降之

差 $V_{g1}-Z_eI_1$ 代替，于是

$$S_{21}=\frac{2V_2^r}{V_{g1}}=\frac{2V_2}{V_{g1}} \tag{12.2.34}$$

由此可见，端口 2 电压与信号源电压有直接关系，所以 S_{21} 可以表示二端口网络正向电压增益，$|S_{21}|^2$ 定义为正向功率增益。

同理，S_{22} 表示输出端反射系数，S_{12} 表示反向电压增益，而 $|S_{12}|^2$ 定义为反向功率增益。

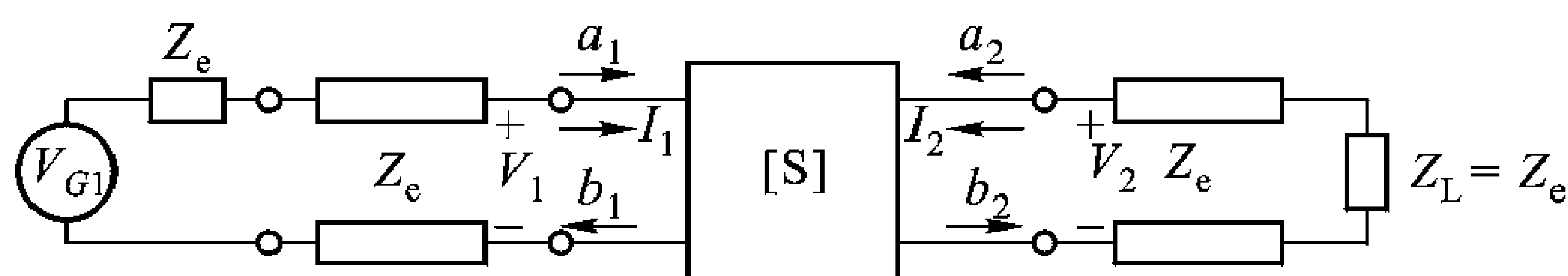


图 12－3　输出端匹配时测量 S_{11}、S_{21}

例 12－2　如图 12－4 (a)所示的 3 dB 衰减器，它是由 R_1、R_2、R_3 3 个电阻组成的二端口 T 型网络，并与特征阻抗 $Z_c=50\ \Omega$ 传输线连接，求该网络的 **S** 矩阵 $\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$ 以及 R_1、R_2、R_3 的数值。

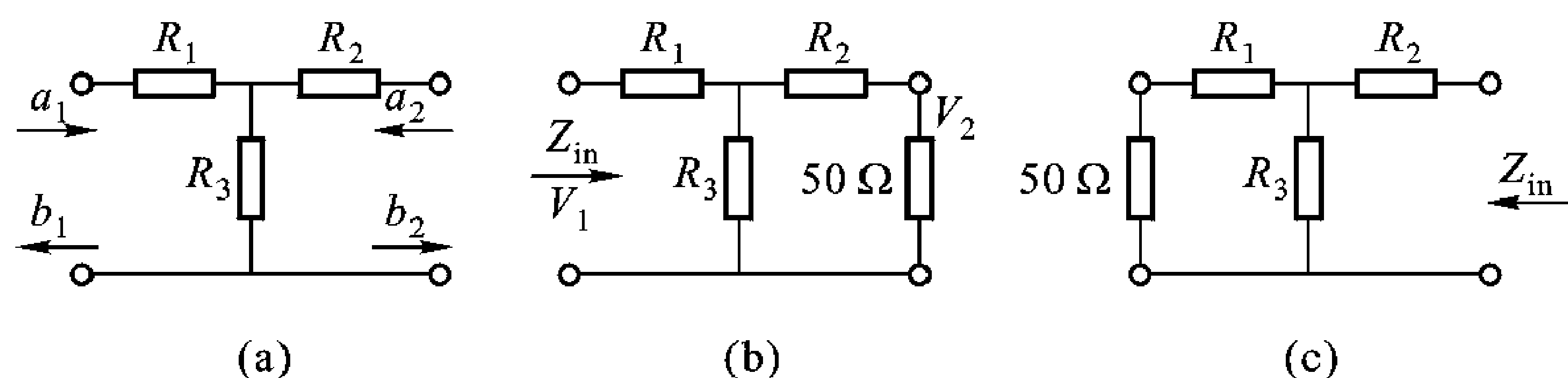


图 12－4　T 型网络 S 参量计算

(a) T 型网络　(b) 端口 2 匹配　(c) 端口 1 匹配

解：作为衰减器，它应当与传输线匹配，即端口 1、2 的反射系数应为零，故得到 $S_{11}=S_{22}=0$，此时

$$b_1=S_{12}a_2$$

$$b_2=S_{21}a_1$$

因为是 3 dB 衰减器，要求输出功率为输入功率的一半，即

$$\frac{b_1}{a_2}=\frac{b_2}{a_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707$$

也就是说

$$S_{12}=S_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707$$

接下来确定 R_1、R_2、R_3。参看图 12－4（b），与输出端口连接的传输线可用 50 Ω的负载等效，因而从端口 1 看进去的输入阻抗

$$Z_{\text{in(从端口1看进去)}}=R_1+\frac{R_3(R_2+50)}{R_3+R_2+50}=50\ \Omega$$

同样参看图 12－4（c），从端口 2 看进去的输入阻抗

$$Z_{\text{in(从端口2看进去)}}=R_2+\frac{R_3(R_1+50)}{R_3+R_1+50}=50\ \Omega$$

比较上面两式，可得 $R_1=R_2$，即此网络结构是对称的，这也正是 $S_{12}=S_{21}$ 所要求的。再次，参考图 12－4（b），端口 2 电压 V_2 与端口 1 电压 V_1 的关系是

$$V_2=\left[\frac{\dfrac{R_3(R_1+50)}{R_3+R_1+50}}{\dfrac{R_3(R_1+50)}{R_3+R_1+50}+R_1}\right]\left(\frac{50}{50+R_1}\right)V_1$$

因为该衰减器两个端口都与连接的传输线匹配，即 $S_{11}=S_{22}=0$，故 $V_1^{\mathrm{r}}=0$，$V_2^{\mathrm{i}}=0$，由此得到 $V_1=V_1^{\mathrm{i}}$，$V_2=V_2^{\mathrm{r}}$，即 $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{V_2^{\mathrm{r}}}{V_1^{\mathrm{i}}}=S_{21}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707$，代入上式并利用输入阻抗关系式即可得到

$$R_1=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}50\ \Omega=8.58\ \Omega,R_3=2\sqrt{2}\times 50\ \Omega=141.4\ \Omega$$

12.2.3　转移矩阵[*A*]和传输矩阵[*T*]

如果 N 为偶数时，欲建立 $N/2$ 个端口的 V、I 与另外 $N/2$ 个端口的 V、I 之间关系，并用矩阵表示，则有

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \\ V_{\frac{N}{2}} \\ I_1 \\ I_2 \\ \\ I_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{1.\frac{N}{2}+1.11},A_{1.\frac{N}{2}+2.11},\cdots A_{1,N.11} & A_{1.\frac{N}{2}+1.12},A_{1.\frac{N}{2}+2.12},\cdots A_{1,N.12} \\ \\ A_{\frac{N}{2}.\frac{N}{2}+1.11},A_{\frac{N}{2}.\frac{N}{2}+2.11},\cdots A_{\frac{N}{2},N.11} & A_{\frac{N}{2}.\frac{N}{2}+1.12},A_{\frac{N}{2}.\frac{N}{2}+2.12},\cdots A_{\frac{N}{2},N.12} \\ A_{1.\frac{N}{2}+1.21},A_{1.\frac{N}{2}+2.21},\cdots A_{1,N.21} & A_{1.\frac{N}{2}+1.22},A_{1.\frac{N}{2}+2.22},\cdots A_{1,N.22} \\ \\ A_{\frac{N}{2}.\frac{N}{2}+1.21},A_{\frac{N}{2}.\frac{N}{2}+2.21},\cdots A_{\frac{N}{2},N.21} & A_{\frac{N}{2}.\frac{N}{2}+1.22},A_{\frac{N}{2}.\frac{N}{2}+2.22},\cdots A_{\frac{N}{2},N.22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{\frac{N}{2}+1} \\ V_{\frac{N}{2}+2} \\ \\ V_N \\ -I_{\frac{N}{2}+1} \\ -I_{\frac{N}{2}+2} \\ \\ -I_N \end{bmatrix}$$

$$
= [A]\begin{bmatrix} V_{\frac{N}{2}+1} \\ V_{\frac{N}{2}+2} \\ \vdots \\ V_N \\ -I_{\frac{N}{2}+1} \\ -I_{\frac{N}{2}+2} \\ \vdots \\ -I_N \end{bmatrix} \tag{12.2.35}
$$

矩阵$[A]$叫做转移矩阵，简称 $\boldsymbol{A}$ 矩阵。

在 $\boldsymbol{A}$ 矩阵定义中，从第$(N/2+1)$到第 N 端口，电流是从网络流出去的。习惯上定义流进网络电流的方向为正，流出网络电流的方向为负，所以从第$(N/2+1)$端口起到第 N 端口，电流 $I_{N/2+1}$到 I_N 前面加上一个负号。注意，把 $\boldsymbol{A}$ 矩阵元素分成四大块，每块用下标“11，12，21，22”区分。凡带下标“11”的元素表示从$(N/2+1)$端口到 N 端口全开路时，所有$(N/2+1)$端口到 N 端口电压对 1 端口到 $N/2$ 端口电压的影响。其他三大块矩阵元素也可作类似的解释。

同样也可建立 $N/2$ 个端口的$[a]$和$[b]$，与另外 $N/2$ 个端口$[a]$和$[b]$之间关系为

$$
\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{\frac{N}{2}} \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} = [T]\begin{bmatrix} b_{\frac{N}{2}+1} \\ b_{\frac{N}{2}+2} \\ \vdots \\ b_N \\ a_{\frac{N}{2}+1} \\ a_{\frac{N}{2}+2} \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \tag{12.2.36}
$$

矩阵$[T]$叫做传输矩阵，简称 $\boldsymbol{T}$ 矩阵。

如果多个网络级连,转移矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与传输矩阵 $\boldsymbol{T}$ 描述起来特别方便。为简化书写,以二端口网络为例说明。二端口网络 $\boldsymbol{A}$ 矩阵的输入输出关系可表示为

$$
\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \tag{12.2.37}
$$

参看图 12－5，如果 N 个二端口网络级连，第 N 个二端口网络的输出就是第$N+1$ 个二端口网络的输入，故 N 个二端口网络级连后，第一个二端口网络的输入$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$与第 N 个二端口网络的输出$\begin{bmatrix} V_{n+1} \\ -I_{n+1} \end{bmatrix}$关系可表示为

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} (A_{11})_i & (A_{12})_i \\ (A_{21})_i & (A_{22})_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{N+1} \\ -I_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_{总} \begin{bmatrix} V_{N+1} \\ -I_{N+1} \end{bmatrix} \tag{12.2.38}$$

所以

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}_{总} &= \prod_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} (A_{11})_i & (A_{12})_i \\ (A_{21})_i & (A_{22})_i \end{bmatrix} \\ &= [A]_1 [A]_2 \cdots [A]_N \end{aligned} \tag{12.2.39}$$

这就是说，级连网络总的 **A** 矩阵等于各单个网络 **A** 矩阵之积。

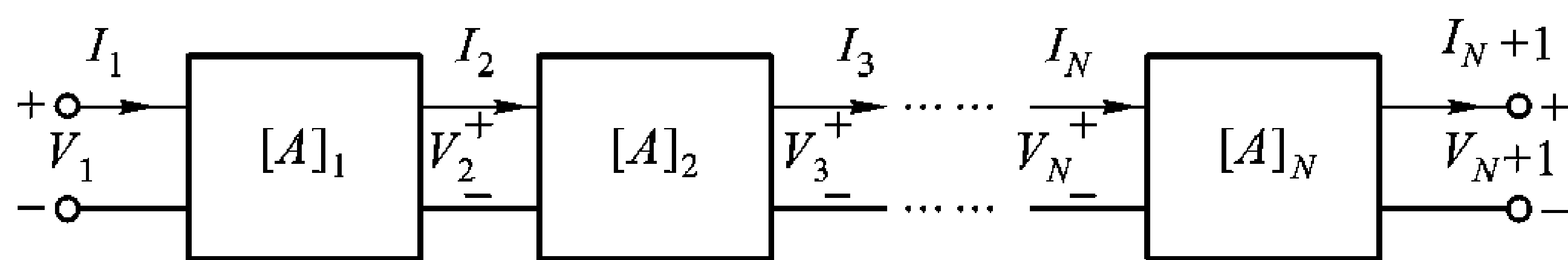


图 12－5　N 个二端口网络的级连 **A** 矩阵表示

对于二端口网络，**A** 矩阵又称为 ***ABCD*** 矩阵，表示为

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

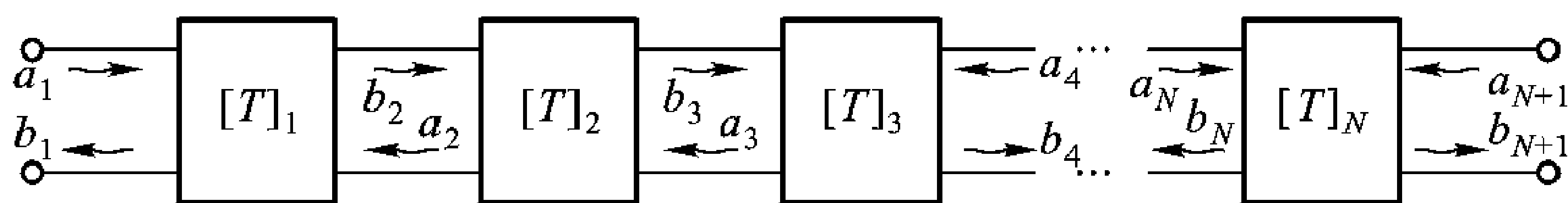


图 12－6　N 个二端口网络级连的 **T** 矩阵表示

同样，如图 12－6 所示级连二端口网络的 **T** 矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = [T]_1 [T]_2 \cdots [T]_N \begin{bmatrix} b_{N+1} \\ a_{N+1} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{N} [T]_i \begin{bmatrix} b_{N+1} \\ a_{N+1} \end{bmatrix} \tag{12.2.40}$$

$$= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}_{总} \begin{bmatrix} b_{N+1} \\ a_{N+1} \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}_{总} = \prod_{i=1}^{N} [T]_i \tag{12.2.41}$$

例 12-3　求图 12-7 (a)所示 T 型网络的 $\boldsymbol{A}$ 矩阵。

解： 图 12-7 (a)所示 T 型网络可分解为图 12-7 (b)所示的 T_1、T_2、$T_3$3 个网络的级连，网络 T_1 和 T_3 的转移矩阵相同，见图 12-7 (c)。欲求网络 T_1 的 $\boldsymbol{ABCD}$ 矩阵元素 A，必须在端口 2 电流为零的情况下(即端口 2 开路)求出端口 1 上电压降与端口 2 上电压降的比值，即

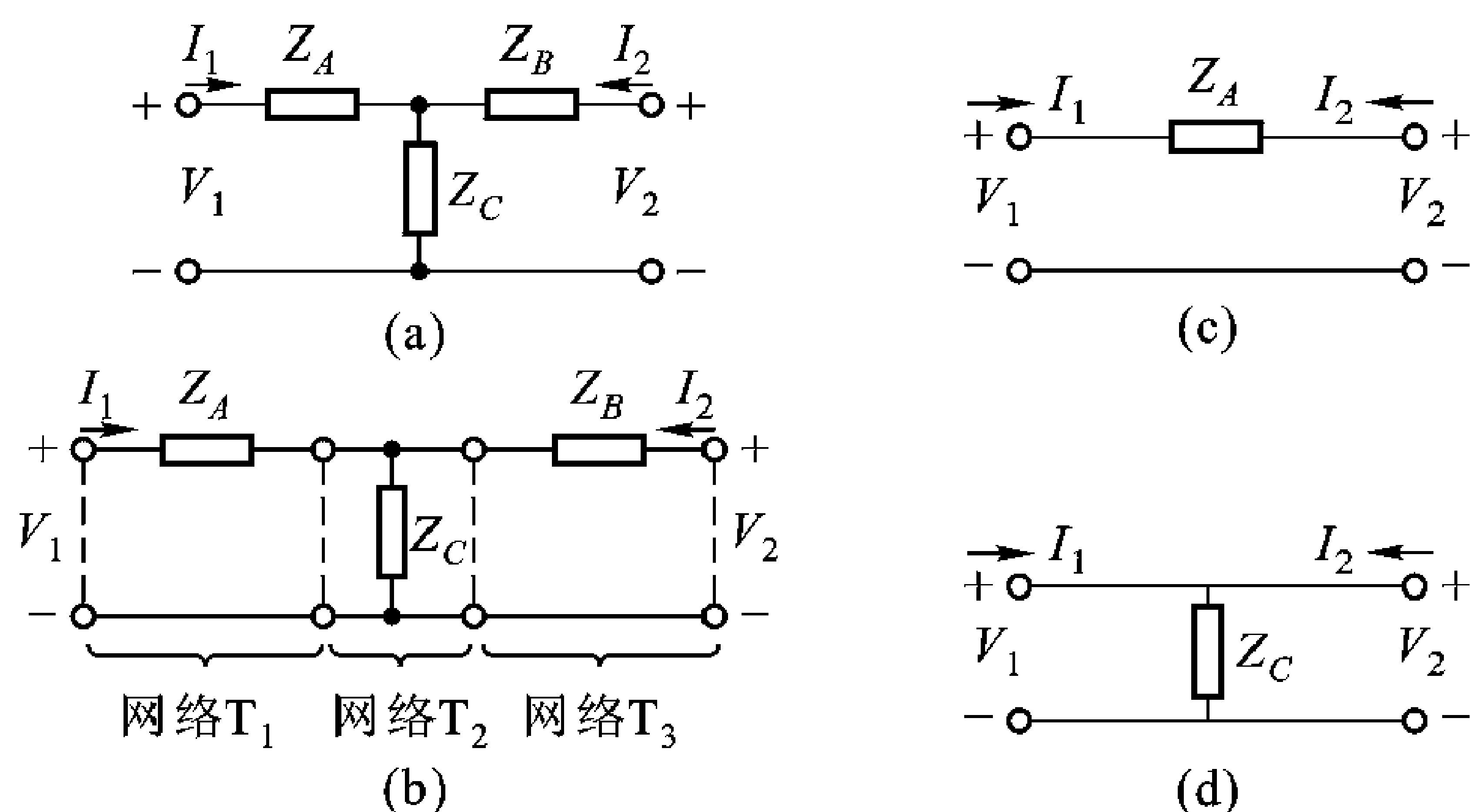


图 12-7　T 型网络及其网络参数计算过程
(a) T 型网络　(b) 分解为 3 个子网络的级连
(c) 串联子网络　(d) 并联子网络

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{i_2=0} = 1$$

而求 B 元素，必须在端口 2 短路情况下，求出端口 1 上电压降与端口 2 输入电流之比，即

$$B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = Z_A$$

同理可求出 C 元素和 D 元素，有

$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = 0$$

$$D = \left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = 1$$

故网络 T_1 的 $\boldsymbol{ABCD}$ 矩阵为$\begin{bmatrix} 1 & Z_A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，网络 T_2 [见图 12-7(d)]的 $\boldsymbol{ABCD}$ 矩阵元素也可同样求得，即

$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0} = 1$$

因为 $I_2=0$，端口 2 开路，故 $V_1=V_2$。

矩阵元素

$$B = \left.\frac{V_1}{-I_2}\right|_{V_2=0} = 0$$

另外两个元素

$$C=\left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0}=Z_C^{-1}=Y_C$$

$$D=\left.\frac{I_1}{-I_2}\right|_{V_2=0}=1$$

故网络 T_2 的 $\boldsymbol{ABCD}$ 矩阵为 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ Z_C^{-1} & 1\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ Y_C & 1\end{bmatrix}$。这样，图 12－7（a)所示 T 型网络的 $\boldsymbol{ABCD}$ 矩阵就是

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & Z_A\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ Z_C^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & Z_B\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\dfrac{Z_A}{Z_C} & Z_A+Z_B+\dfrac{Z_AZ_B}{Z_C}\\ \dfrac{1}{Z_C} & 1+\dfrac{Z_B}{Z_C}\end{bmatrix}$$

与 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵、$\boldsymbol{Y}$ 矩阵、$\boldsymbol{S}$ 矩阵不同，$\boldsymbol{A}$ 矩阵、$\boldsymbol{T}$ 矩阵的元素一般没有明确的物理意义，但 T_{11} 有明确的物理意义。这几个矩阵描述同一个网络，相互间当可转换，$\boldsymbol{Z}$ 矩阵、$\boldsymbol{Y}$ 矩阵与 $[S]$ 矩阵的转换关系前已给出，下面再导出 $\boldsymbol{T}$ 矩阵与 $\boldsymbol{S}$ 矩阵、$\boldsymbol{A}$ 矩阵与 $\boldsymbol{Z}$ 矩阵的转换关系。

对于 N 端口网络，为使运算简便起见，常采用分块矩阵(或称子矩阵)形式来表示。例如式(12.2.26)表示的 $\boldsymbol{S}$ 矩阵可用分块矩阵写成

$$\begin{matrix}m\{\\ m\{\end{matrix}\begin{bmatrix}[b_a]\\ [b_b]\end{bmatrix}=\begin{matrix}m\{\\ m\{\end{matrix}\left[\begin{array}{c:c}\overbrace{[S_{aa}]}^{m} & \overbrace{[S_{ab}]}^{m}\\ \hdashline [S_{ba}] & [S_{bb}]\end{array}\right]\begin{bmatrix}[a_a]\\ [a_b]\end{bmatrix}\begin{matrix}\}m\\ \}m\end{matrix}\quad\left(m=\frac{N}{2}\right)\qquad(12.2.42)$$

式中

$$[b_a]=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^{\mathrm{T}}\qquad [b_b]=[b_{m+1},b_{m+2},\cdots,b_N]^{\mathrm{T}}$$

$$[a_a]=[a_1,a_2,\cdots,a_m]^{\mathrm{T}}\qquad [a_b]=[a_{m+1},a_{m+2},\cdots,a_N]^{\mathrm{T}}$$

$$[S_{aa}]=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1m}\\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2m}\\ & & & \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mm}\end{bmatrix}$$

$$[S_{ab}]=\begin{bmatrix}S_{1,m+1} & S_{1,m+2} & \cdots & S_{1,N}\\ S_{2,m+1} & S_{2,m+2} & \cdots & S_{2,N}\\ & & & \\ S_{m,m+1} & S_{m,m+2} & \cdots & S_{m,N}\end{bmatrix}$$

$$[S_{ba}]=\begin{bmatrix} S_{m+1,1} & S_{m+1,2} & \cdots & S_{m+1,m} \\ S_{m+2,1} & S_{m+2,2} & \cdots & S_{m+2,m} \\ \\ S_{N,1} & S_{N,2} & \cdots & S_{N,m} \end{bmatrix}$$

$$[S_{bb}]=\begin{bmatrix} S_{m+1,m+1} & S_{m+1,m+2} & \cdots & S_{m+1,N} \\ S_{m+2,m+1} & S_{m+2,m+2} & \cdots & S_{m+2,N} \\ \\ S_{N,m+1} & S_{N,m+2} & \cdots & S_{N,N} \end{bmatrix}$$

同样，式(12.2.36)表示的 $\boldsymbol{T}$ 矩阵，可用分块矩阵表示成

$$\begin{matrix} m\{ \\ m\{ \end{matrix}\begin{bmatrix} [a_a] \\ [b_a] \end{bmatrix} = \begin{matrix} m\{ \\ m\{ \end{matrix}\begin{bmatrix} \overbrace{[T_{aa}]}^{m} & \overbrace{[T_{ab}]}^{m} \\ [T_{ba}] & [T_{bb}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [b_b] \\ [a_b] \end{bmatrix}\begin{matrix} \}m \\ \}m \end{matrix} \quad \left(m=\frac{N}{2}\right) \tag{12.2.43}$$

由式(12.2.42)、(12.2.43)可得，$\boldsymbol{T}$ 矩阵与 $\boldsymbol{S}$ 矩阵的转换关系

$$[T]=\begin{bmatrix} [s_{ba}]^{-1} & -[s_{ba}]^{-1}[s_{bb}] \\ [s_{aa}][s_{ba}]^{-1} & [s_{ab}]-[s_{aa}][s_{ba}]^{-1}[s_{bb}] \end{bmatrix} \tag{12.2.44}$$

同理从式(12.2.42)、(12.2.43)还可得

$$[S]=\begin{bmatrix} [T_{ba}][T_{aa}]^{-1} & [T_{bb}]-[T_{ba}][T_{aa}]^{-1}[T_{ab}] \\ [T_{aa}]^{-1} & -[T_{aa}]^{-1}[T_{ab}] \end{bmatrix} \tag{12.2.45}$$

式(12.2.44)(12.2.45)就是[T]和[S]之间变换关系。

　　同样，用分块矩阵可将式(12.2.2)、(12.2.35)写成

$$\begin{matrix} m\{ \\ m\{ \end{matrix}\begin{bmatrix} [V_a] \\ [V_b] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{[Z_{aa}]}^{m} & \overbrace{[Z_{ab}]}^{m} \\ [Z_{ba}] & [Z_{bb}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} [I_a] \\ [I_b] \end{bmatrix}\begin{matrix} \}m \\ \}m \end{matrix} \quad \left(m=\frac{N}{2}\right) \tag{12.2.46}$$

$$\begin{matrix} m\{ \\ m\{ \end{matrix}\begin{bmatrix} [V_a] \\ [I_a] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{[A_{aa}]}^{m} & \overbrace{[A_{ab}]}^{m} \\ [A_{ba}] & [A_{bb}] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_b \\ -I_b \end{bmatrix}\begin{matrix} \}m \\ \}m \end{matrix} \quad \left(m=\frac{N}{2}\right) \tag{12.2.47}$$

由式(12.2.46)和(12.2.47)可求得[A]与[Z]之间关系

$$[A]=\begin{bmatrix} [Z_{aa}][Z_{ba}]^{-1} & -[Z_{ab}]+[Z_{aa}][Z_{ba}]^{-1}[Z_{bb}] \\ [Z_{ba}]^{-1} & [Z_{ba}]^{-1}[Z_{bb}] \end{bmatrix} \tag{12.2.48}$$

$$[Z]=\begin{bmatrix} [A_{aa}][A_{ba}]^{-1} & -[A_{ab}]+[A_{aa}][A_{ba}]^{-1}[A_{bb}] \\ [A_{ba}]^{-1} & [A_{ba}]^{-1}[A_{bb}] \end{bmatrix} \tag{12.2.49}$$

　　表 12－1 给出二端口网络各种网络参数矩阵换算关系。

表 12－1　二端口网络各种网络参数矩阵换算表

	[z]	[y]	[a]	[T]	[S]
[z]	$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\|y\|}\begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{21}}\begin{bmatrix} a_{11} & \|a\| \\ 1 & a_{22} \end{bmatrix}$	$z_{11}=\frac{T_{11}+T_{12}+T_{21}+T_{22}}{T_{11}+T_{12}-T_{21}-T_{22}}$ $z_{12}=\frac{2\|T\|}{T_{11}+T_{12}-T_{21}-T_{22}}$ $z_{21}=\frac{2}{T_{11}+T_{12}-T_{21}-T_{22}}$ $z_{22}=\frac{T_{11}-T_{12}-T_{21}+T_{22}}{T_{11}+T_{12}-T_{21}-T_{22}}$	$z_{11}=\frac{1+S_{11}-S_{22}-\|S\|}{1-S_{11}-S_{22}+\|S\|}$ $z_{12}=\frac{2S_{12}}{1-S_{11}-S_{22}+\|S\|}$ $z_{21}=\frac{2S_{21}}{1-S_{11}-S_{22}+\|S\|}$ $z_{22}=\frac{1-S_{11}+S_{22}-\|S\|}{1-S_{11}-S_{22}+\|S\|}$
[y]	$\frac{1}{\|z\|}\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{12}}\begin{bmatrix} a_{22} & -\|a\| \\ -1 & a_{11} \end{bmatrix}$	$y_{11}=\frac{T_{11}-T_{12}-T_{21}+T_{22}}{T_{11}-T_{12}+T_{21}-T_{22}}$ $y_{12}=\frac{-2\|T\|}{T_{11}-T_{12}+T_{21}-T_{22}}$ $y_{21}=\frac{-2}{T_{11}-T_{12}+T_{21}-T_{22}}$ $y_{22}=\frac{T_{11}+T_{12}+T_{21}+T_{22}}{T_{11}-T_{12}+T_{21}-T_{22}}$	$y_{11}=\frac{1-S_{11}+S_{22}-\|S\|}{1+S_{11}+S_{22}+\|S\|}$ $y_{12}=\frac{-2S_{12}}{1+S_{11}+S_{22}+\|S\|}$ $y_{21}=\frac{-2S_{21}}{1+S_{11}+S_{22}+\|S\|}$ $y_{22}=\frac{1+S_{11}-S_{22}-\|S\|}{1+S_{11}+S_{22}+\|S\|}$
[a]	$\frac{1}{z_{21}}\begin{bmatrix} z_{11} & \|z\| \\ 1 & z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{-1}{y_{21}}\begin{bmatrix} y_{22} & 1 \\ \|y\| & y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	$a_{11}=\frac{1}{2}(T_{11}+T_{12}+T_{21}+T_{22})$ $a_{12}=\frac{1}{2}(T_{11}-T_{12}+T_{21}-T_{22})$ $a_{21}=\frac{1}{2}(T_{11}+T_{12}-T_{21}-T_{22})$ $a_{22}=\frac{1}{2}(T_{11}-T_{12}-T_{21}+T_{22})$	$a_{11}=\frac{1+S_{11}-S_{22}-\|S\|}{2S_{21}}$ $a_{12}=\frac{1+S_{11}+S_{22}+\|S\|}{2S_{21}}$ $a_{21}=\frac{1-S_{11}-S_{22}+\|S\|}{2S_{21}}$ $a_{22}=\frac{1-S_{11}+S_{22}-\|S\|}{2S_{21}}$

续表

	[z]	[y]	[a]	[T]	[S]
[T]	$T_{11}=\frac{z_{11}+z_{22}+1+\lvert z\rvert}{2z_{21}}$ $T_{12}=\frac{z_{11}-z_{22}+1-\lvert z\rvert}{2z_{21}}$ $T_{21}=\frac{z_{11}-z_{22}-1+\lvert z\rvert}{2z_{21}}$ $T_{22}=\frac{z_{11}+z_{22}-1-\lvert z\rvert}{2z_{21}}$	$T_{11}=\frac{-y_{11}-y_{22}-1-\lvert y\rvert}{2y_{21}}$ $T_{12}=\frac{y_{11}-y_{22}+1-\lvert y\rvert}{2y_{21}}$ $T_{21}=\frac{y_{11}-y_{22}-1+\lvert y\rvert}{2y_{21}}$ $T_{22}=\frac{-y_{11}-y_{22}+1+\lvert y\rvert}{2y_{21}}$	$T_{11}=\frac{a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}}{2}$ $T_{12}=\frac{a_{11}-a_{12}+a_{21}-a_{22}}{2}$ $T_{21}=\frac{a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22}}{2}$ $T_{22}=\frac{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}{2}$	$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{S_{21}}\begin{bmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & -\lvert S\rvert \end{bmatrix}$
[S]	$S_{11}=\frac{\lvert z\rvert+z_{11}-z_{22}-1}{\lvert z\rvert+z_{11}+z_{22}+1}$ $S_{12}=\frac{2z_{12}}{\lvert z\rvert+z_{11}+z_{22}+1}$ $S_{22}=\frac{2z_{21}}{\lvert z\rvert+z_{11}+z_{22}+1}$ $S_{22}=\frac{\lvert z\rvert-z_{11}+z_{22}-1}{\lvert z\rvert+z_{11}+z_{22}+1}$	$S_{11}=\frac{1-y_{11}+y_{22}-\lvert y\rvert}{1+y_{11}+y_{22}+\lvert y\rvert}$ $S_{12}=\frac{-2y_{12}}{1+y_{11}+y_{22}+\lvert y\rvert}$ $S_{21}=\frac{-2y_{21}}{1+y_{11}+y_{22}+\lvert y\rvert}$ $S_{22}=\frac{1+y_{11}-y_{22}-\lvert y\rvert}{1+y_{11}+y_{22}+\lvert y\rvert}$	$S_{11}=\frac{a_{11}+a_{12}-a_{21}-a_{22}}{a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}}$ $S_{12}=\frac{2\lvert a\rvert}{a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}}$ $S_{21}=\frac{2}{a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}}$ $S_{22}=\frac{a_{22}+a_{12}-a_{21}-a_{11}}{a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}}$	$\frac{1}{T_{11}}\begin{bmatrix} T_{21} & \lvert T\rvert \\ 1 & -T_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$

12.3　无源、互易和无耗网络矩阵特性

本书讨论的波导器件主要是无源器件，当其损耗很小时可视为无耗器件，除隔离器、环形器外多数又是互易器件，它们对应的网络就是无源网络、无耗网络、互易网络（或可逆网络）。本节主要讨论当网络无源、无耗、互易时网络参数的特点，尤其是 S 参数的特点，因为在微波、光波段，S 参数用得最多。

12.3.1　互易网络散射矩阵的对称性，即 $S_{mk}=S_{km}$

3.7.7 节以二端口网络为例，由场的互易定理导出电路的互易定理，即网络的阻抗矩阵具有对称性

$$Z_{mk}=Z_{km}\quad \text{或}\,[Z]^{\mathrm{T}}=[Z]$$

下面将证明，如果网络是互易的，S 矩阵也具有对称性，即 $S_{mk}=S_{km}$ 或 $[S]^{\mathrm{T}}=[S]$。

由式(12.2.29)

$$[S]=([z]-[1])([z]+[1])^{-1}$$

令

$$[G]=[z]+[1]$$
$$[F]=[z]-[1]$$

则

$$[S]=[F][G]^{-1} \tag{12.3.1}$$

而

$$[F][G]=([z]-[1])([z]+[1])=[z]^2-[1]$$
$$[G][F]=([z]+[1])([z]-[1])=[z]^2-[1]$$

故有

$$[F][G]=[G][F] \tag{12.3.2}$$

在此式两边左右都乘 $[G]^{-1}$，得到

$$[G]^{-1}[F]=[F][G]^{-1}$$

代入式(12.3.1)，得到

$$[S]=[G]^{-1}[F]$$

取转置，并注意到 $[F]$、$[G]$ 都是互易的（因为阻抗矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 是互易的），则得

$$\begin{aligned}[S]^{\mathrm{T}}&=([G]^{-1}[F])^{\mathrm{T}}=[F]^{\mathrm{T}}([G]^{\mathrm{T}})^{-1}\\&=[F][G]^{-1}=[S]\end{aligned} \tag{12.3.3}$$

由此可见，散射矩阵是对称矩阵，其元素

$$S_{mk} = S_{km} \tag{12.3.4}$$

需要注意的是，假定电路各端口阻抗不相同时，则

$$[S] \neq [S]^{\mathrm{T}}, \quad S_{mk} \neq S_{km}$$

12.3.2　无源微波电路的耗散矩阵 $[D]=[1]-[S]^+[S]$ 为非负厄米矩阵，且 $|S_{mk}| \leqslant 1$

经过 N 端口输入网络总的复功率

$$P = \sum_{n=1}^{N} V_n I_n^* = [V]^{\mathrm{T}}[I]^* = [I]^+ [V]$$

式中右上角"*"表示取复共轭，而"+"表示共轭转置。将式(12.2.24)代入，得到

$$\begin{aligned} P &= ([a]-[b])^+ \left([\sqrt{z_e}]^{\mathrm{T}}\right)^{-1} [\sqrt{z_e}]([a]+[b]) \\ &= ([a]^+ - [b]^+)([a]+[b]) \\ &= [a]^+([1]-[S]^+)([1]+[S])[a] \\ &= [a]^+([1]-[S]^+[S]-[S]^+ + [S])[a] \\ &= [a]^+([1]-[S]^+[S])[a] + [a]^+([S]-[S]^+)[a] \\ &= [a]^+[D][a] + [a]^+[Q][a] \end{aligned} \tag{12.3.5}$$

式中

$$[D] = [1] - [S]^+[S] \tag{12.3.6}$$

称为耗散矩阵，而

$$[Q] = [S] - [S]^+ \tag{12.3.7}$$

由于

$$[D]^+ = [1] - ([S]^+[S])^+ = [1] - [S]^+[S] = [D]$$
$$[Q]^+ = [S]^+ - [S] = -[Q]$$

所以 $[D]$ 为厄米矩阵，而 $[Q]$ 为反厄米矩阵。则式(12.3.5)中右边第一项，由厄米矩阵性质可知

$$[a]^+[D][a] = \text{实数}$$

而根据反厄米矩阵性质，$[Q]$ 可用厄米矩阵乘以 $\mathrm{j}(=\sqrt{-1})$ 来表示，因此

$$[a]^+[Q][a] = \text{虚数}$$

将式(12.3.5)与(12.1.2)比较，式(12.3.5)右边第一项，实数 $[a]^+[D][a]$ 就是复数坡印廷功率流的实部 P_{R}，第二项虚数 $[a]^+[Q][a]$ 就是复数坡印廷流虚部，因为 P_{R} 表示平均功率损耗，总是大于等于零，即

$$[a]^+[D][a] = P_{\mathrm{R}} \geqslant 0 \tag{12.3.8a}$$

而

$$[a]^+[Q][a]=2j\omega(W_m-W_e) \tag{12.3.8b}$$

式(12.3.8a)表示$[D]=[1]-[S]^+[S]$为非负厄米矩阵，即为半正定的。其元素

$$D_{mk}=D_{km}^*=\sum_{n=1}^{N}S_{nm}^*S_{nk} \quad (k\neq m) \tag{12.3.9a}$$

$$D_{mm}=1-\sum_{n=1}^{N}|S_{nm}|^2\leqslant 1 \quad (k=m) \tag{12.3.9b}$$

由于$[a]$为任意矢量，如果$[a]=[0,\cdots;0,a_m,0,\cdots,0]^T$，则由式(12.3.8)可知，$D_{mn}\geqslant 0$，于是有

$$\sum_{n=1}^{N}|S_{nm}|^2\leqslant 1 \quad (m=1,2,\cdots,N) \tag{12.3.10}$$

这表明，在无源微波电路中，S参数的绝对值$|S_{mk}|$不能大于1，即

$$|S_{mk}|\leqslant 1 \quad (m,k=1,2,\cdots,N) \tag{12.3.11}$$

12.3.3 无耗网络的散射矩阵是幺正的

所谓散射矩阵是幺正的，即$[S]^+[S]=[1]$。如果网络又可逆，则

$$[S]^*[S]=[1]$$

此性质在网络分析中很有用，现证明如下：

对于无耗网络，其平均耗散功率为零，所以复数坡印廷功率流的实部$P_R=0$，由式(12.3.8a)可得

$$[a]^+[D][a]=0$$

根据式(12.3.6)，上式为

$$[1]-[S]^+[S]=0$$

或

$$[S]^+[S]=[1] \tag{12.3.12}$$

此即$[S]$的幺正性，对于可逆网络，$[S]^T=[S]$，则有

$$[S]^*[S]=[1] \tag{12.3.13}$$

12.3.4 参考面移动时 S 参数的幅值不变

如图12-1(a)所示，如果将端口i的参考面S_i向外移动l_i后得到新的参考面S'_i，设新参考面入射波和反射波分别为a'_i和b'_i，则有

$$a_i=e^{-j\beta_i l_i}a'_i=p_i a'_i \tag{12.3.14a}$$

$$b'_i=e^{-j\beta_i l_i}b_i=p_i b_i \tag{12.3.14b}$$

式中$p_i=e^{-j\beta_i l_i}$，β_i为波导等效传输线传播常数。用矩阵表示为

$$[p]=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & p_N \end{bmatrix} \tag{12.3.15}$$

即$[p]$为一对角矩阵，则式(12.3.14)可表示为

$$[a]=[p][a'] \tag{12.3.16a}$$

$$[b']=[p][b] \tag{12.3.16b}$$

参考面为 S_i 和 S'_i时网络的散射矩阵分别为$[S]$和$[S']$，则有

$$[b]=[S][a] \tag{12.3.17a}$$

$$[b']=[S'][a'] \tag{12.3.17b}$$

将式(12.3.16)代入式(12.3.17b)得到

$$[S'][a']=[p][S][a]=[p][S][p][a']$$

将此式两边右乘$[a']^{-1}$，由于$[a'][a']^{-1}=[1]$，因此得到

$$[S']=[p][S][p] \tag{12.3.18}$$

其参数间关系为

$$S'_{ij}=S_{ij}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\beta_i l_i+\beta_j l_j)} \tag{12.3.19}$$

由此可见，当参考面移动时，S 参数的幅值不变，只是相位发生变化，新的散射参数可由简单的相位关系得到。

以上 4 个性质对波导器件等效网络参数特性的分析很有用，将在下节予以说明。

12.4　波导器件的等效网络矩阵特性

本章开始根据波导器件与系统连接端口的多少予以分类，并用一端口网络、二端口网络、三端口网络、四端口网络等表示相应端口器件的外部特性，本节从端口网络的角度分析波导器件的特性。

12.4.1　一端口器件与一端口网络

一端口波导器件不是很多，常用的有终端反射器，终端匹配负载与失配负载，它们都是无源一端口器件。微波振荡源、激光器、微波检波器、光探测器则是有源一端口器件，本节不予讨论。

无源一端口器件可用无源一端口网络等效(见图 12－8)，因为端口数 $N=1$，其耗散矩阵$[D]$，散射矩阵$[S]$、阻抗矩阵$[Z]$和导纳矩阵$[Y]$都成为标量。对于终端反射器、终端匹配负载和失配负载等无源一端口器件，由式

(12.3.9b)和式(12.3.10)可知

$$0 \leqslant 1 - |S_{11}|^2 = d_{11} \leqslant 1 \tag{12.4.1}$$

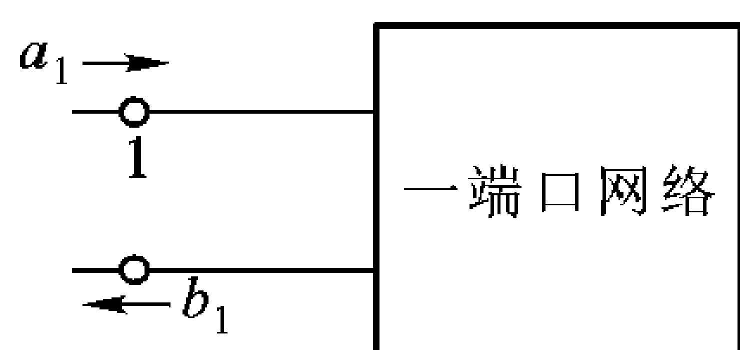


图 12－8　一端口网络

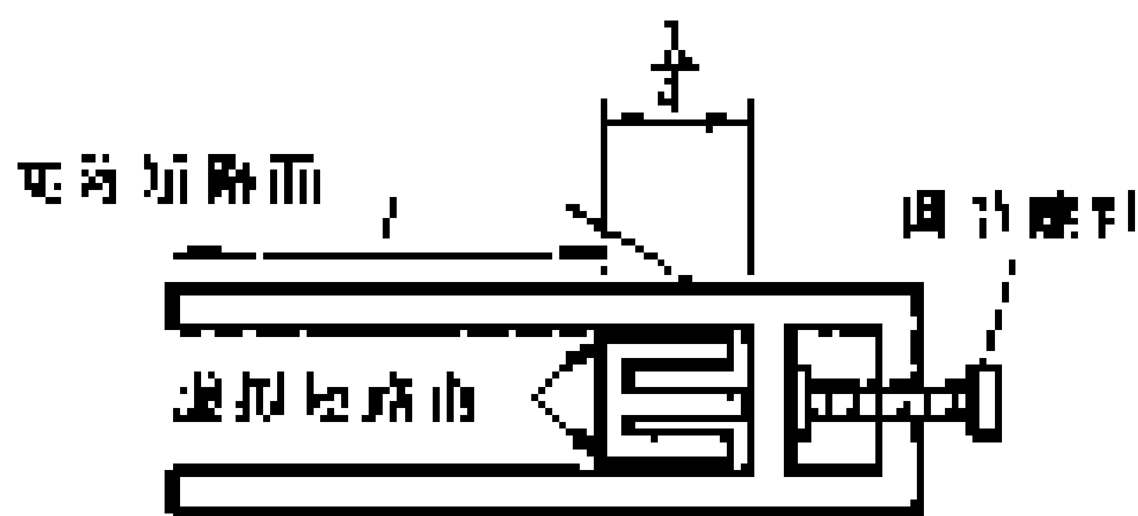


图 12－9　矩形波导短路器

式中 S_{11}为反射系数。

对于终端反射器，如果损耗忽略不计，$d_{11}=0$，因此$|S_{11}|=1$，这就是说如果无源一端口器件无损耗，一定全反射。现以矩形波导短路器(见图 12－9)为例对这一结论作一说明。设 l 是短路器与参考面(一般为输出法兰所在平面)之间的长度，从参考面看进去的短路器的输入阻抗

$$Z_{in} = \mathrm{j}Z_0 \tan k_z l$$

Z_0 为波导的特征阻抗，k_z 为波导的纵向传播常数。短路器的反射系数

$$\Gamma = S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} = \frac{\mathrm{j}Z_0 \tan k_z l - Z_0}{\mathrm{j}Z_0 \tan k_z l + Z_0} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\theta}$$

这表明短路器输入参考面的反射系数的模应等于 1，而相角是可变的，取决于参考面的位置。

对于终端匹配负载，理想情况下，入射波能量全部被负载吸收，反射系数 $S_{11}=0$，所以 $d_{11}=1$。

作测量标准的终端失配负载，入射波能量一部分被吸收，一部分被反射，$|S_{11}|<1, 0<d_{11}<1$ 。

任何无源一端口器件，不管它的具体结构工作原理有多大差别，从 S 参数角度看，总可分为 3 类：一类是 $S_{11}=0$，通常叫匹配负载；另一类 $S_{11}=1$，叫做短路器；而 $0<S_{11}<1$ 的一类就叫做失配负载。

12.4.2　二端口器件与二端口网络

无源二端口器件种类较多，常用的有连接器、匹配器、衰减器、相移器、滤波器、波型变换器等等，可用二端口网络等效(见图 12－10)。除衰减器外，多数器件损耗很小，可作无耗近似，一般也是互易的。下

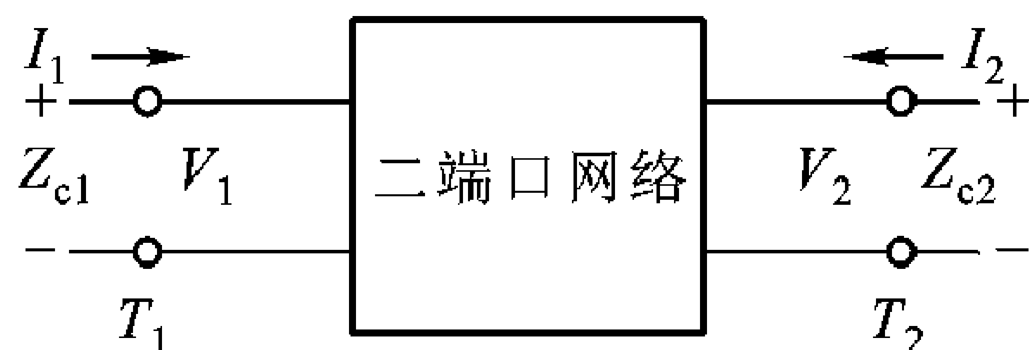


图 12－10　二端口网络

面先分析无耗、互易二端口网络的基本性质。

二端口器件等效为二端口网络时，其耗散矩阵[D]为

$$[D]=\begin{bmatrix}1-|S_{11}|^2-|S_{21}|^2 & S_{11}^*S_{12}+S_{21}^*S_{22}\\ S_{12}^*S_{11}+S_{22}^*S_{21} & 1-|S_{12}|^2-|S_{22}|^2\end{bmatrix} \tag{12.4.2}$$

由式(12.3.10)得到

$$\left.\begin{aligned}|S_{11}|^2+|S_{12}|^2\leqslant 1\\ |S_{12}|^2+|S_{22}|^2\leqslant 1\end{aligned}\right\}\text{振幅关系} \tag{12.4.3}$$

对于无耗二端口网络，则为

$$\left.\begin{aligned}|S_{11}|^2+|S_{12}|^2=1\\ |S_{12}|^2+|S_{22}|^2=1\end{aligned}\right\} \tag{12.4.4}$$

又根据无耗二端口网络 S 矩阵的特性，得

$$\left.\begin{aligned}S_{11}^*S_{12}+S_{21}^*S_{22}=0\\ S_{12}^*S_{11}+S_{22}^*S_{21}=0\end{aligned}\right\}\text{相位关系} \tag{12.4.5}$$

于是，对于无耗可逆二端口网络，可得到

$$|S_{11}|=|S_{22}| \tag{12.4.6}$$

$$2\arg S_{12}-(\arg S_{11}+\arg S_{22})=\pm\pi \tag{12.4.7}$$

若 $S_{11}=0$，则 $|S_{12}|=|S_{21}|=1$，$S_{22}=0$；若 $|S_{12}|=1$，则 $S_{11}=S_{22}=0$，或相反。由此可得如下无耗可逆二端口网络的基本性质：

(1) 若一个端口匹配，则另一个端口自动匹配；

(2) 若网络是完全匹配的，则必然是完全传输的，或相反；

(3) S_{11}、S_{12}和 S_{22}的相角只有两个是独立的，已知其中两个相角，则第三个相角便可确定。

对于有耗情况，如果网络完全匹配，则有

$$|S_{21}|<1,\ |S_{12}|<1 \tag{12.4.8}$$

性质(1)和(2)是完全可以理解的，如图12-11，用一段矩形波导把系统的源和负载连起来，这段矩形波导就是二端口连接器件。显然，当损耗可忽略时，如果空波导与负载是匹配的，那么从源端看进去也是匹配的。如果空波导与源、负载都是匹配的，则源的电磁功率可全部传输到负载，这就是说这段空波导满足性质(1)与(2)，因为它是无源、互易、无耗二端口元件。

利用以上性质，当模拟或测量无源、互易、无耗二端口网络 S 参数时，可减少独立测量或模拟的次数。

空波导看作二端口器件时，其转移矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在传输线理论分析中早已导出，即

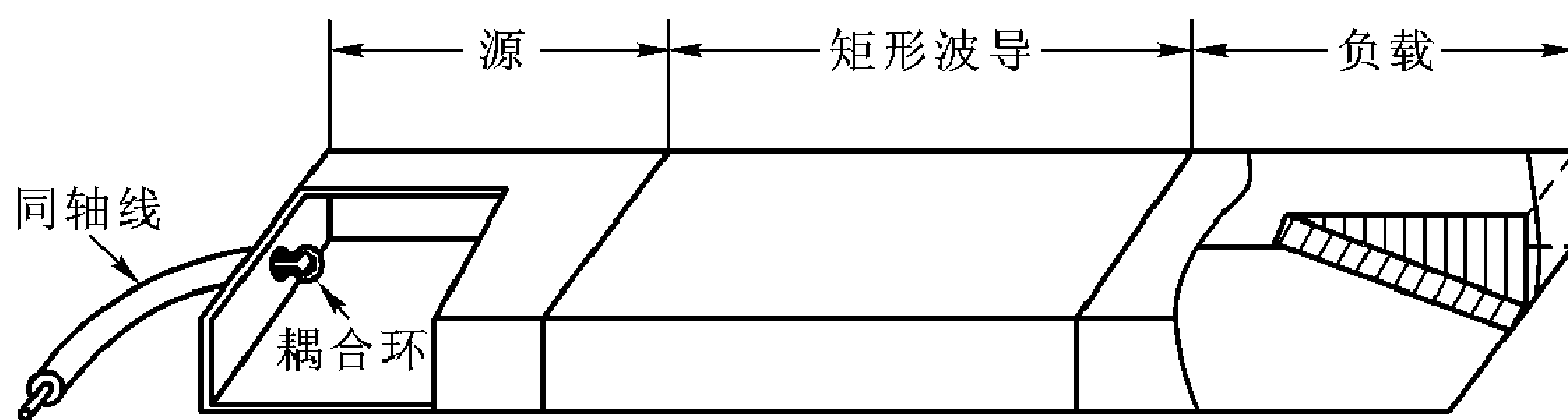


图 12-11 连接源与负载的矩形波导

$$[A]=\begin{bmatrix}\cos k_z l & jZ_0\sin k_z l\\ jY_0\sin k_z l & \cos k_z l\end{bmatrix} \tag{12.4.9}$$

空波导也可看成改变相位 $k_z l$ 的移相器，其 $\boldsymbol{S}$ 矩阵

$$[S]=\begin{bmatrix}0 & e^{-jk_z l}\\ e^{-jk_z l} & 0\end{bmatrix} \tag{12.4.10}$$

理想的衰减器应该是一个相移为零，衰减量可变的二端口网络，其散射矩阵

$$[S]=\begin{bmatrix}0 & e^{-\alpha l}\\ e^{-\alpha l} & 0\end{bmatrix} \tag{12.4.11}$$

α 为衰减因数，l 为衰减器长度。

矩形波导系统在小功率时，单螺调配器[见图 12-12(a)]用得较多，随螺钉插入波导深度的增加，由容性负载转到感性负载，见图 12-12 (b)。螺钉旋入波导的深度小于 $3b/4$ (b 为波导窄边尺寸)，一般为容性。

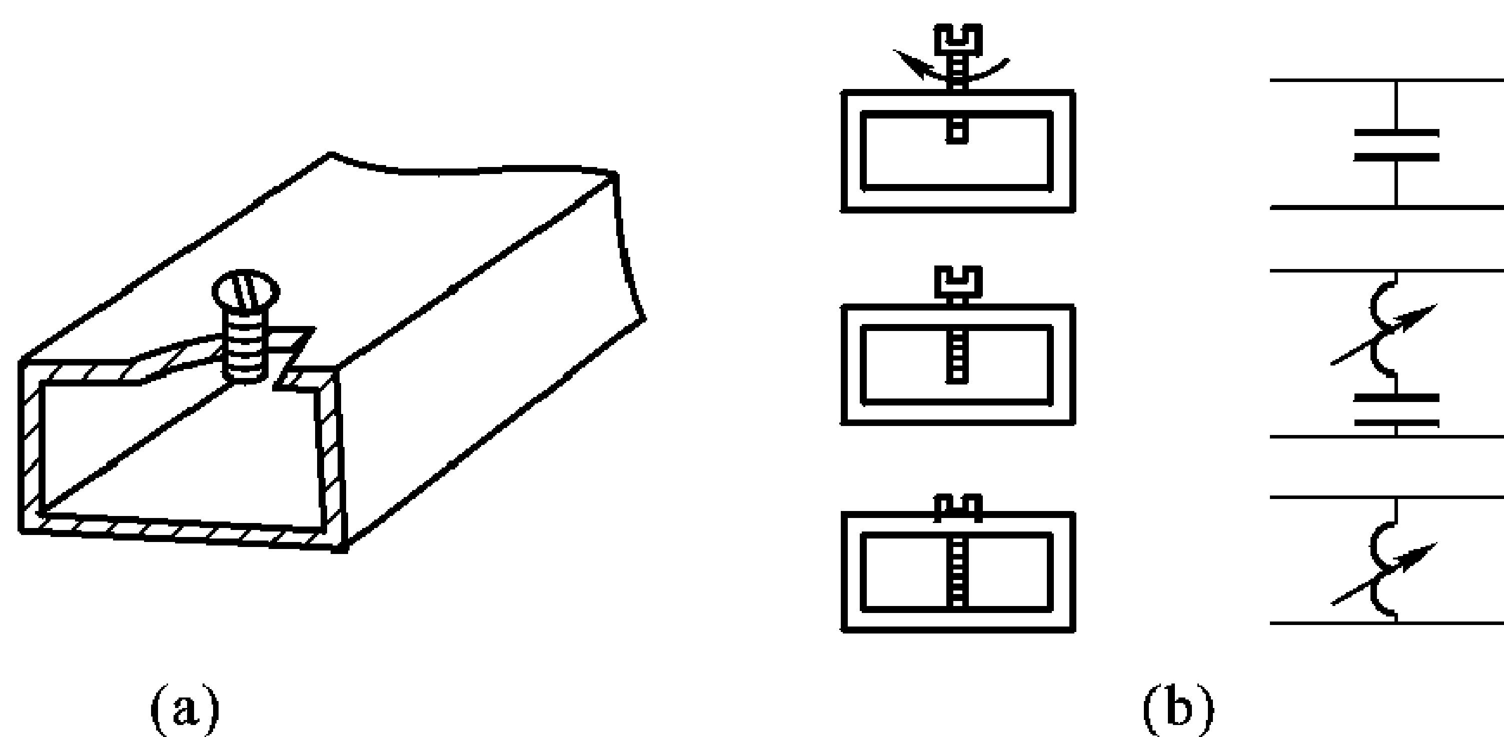


图 12-12 单螺调配器及其等效电路
(a) 单螺调配器 (b) 等效电路

其转移矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为(见例 12-3)

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ Y & 1\end{bmatrix} \tag{12.4.12}$$

对于由波导宽边中间沿轴向间隔 $\lambda_g/4$ 插入螺钉构成的三腔滤波器，螺钉旋入深度对于工作频率刚好谐振，可看成两个 $\lambda_g/4$ 空波导与 3 个螺钉的级连，

其等效网络如图 12－13，空波导与螺钉的 **A** 矩阵由式(12.4.9)、(12.4.12)给出，总的级连矩阵

$$[A]_{总} = [A_1][A_2][A_1][A_2][A_1][A_2][A_1] \qquad (12.4.13)$$

$[A_1]$是 $\lambda_g/4$ 空波导等效的 **A** 矩阵，$[A_2]$为螺钉等效的 **A** 矩阵。

二端口器件种类很多，在此不再一一列举。它们的网络参数，有兴趣的读者可自行分析。

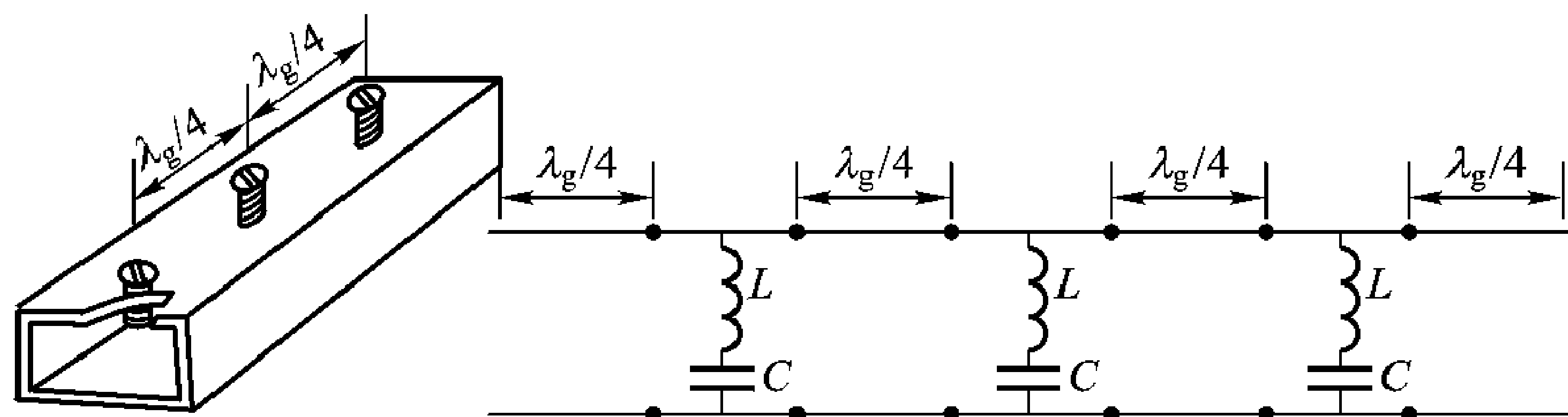


图 12－13　三螺钉滤波器及其等效网络

12.4.3　三端口器件与三端口网络

三端口器件常用作分路元件或功率分配器和合成器。本节先讨论无耗三端口网络的基本性质，再选择波导对称 Y 分支进行具体分析。

无耗三端口网络的基本性质

三端口元件等效为三端口网络时，其网络的散射矩阵

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \qquad (12.4.14)$$

由前面的分析可知，对于线性、无源、无耗三端口网络，不论其是否可逆，由散射矩阵的么正性可以得到

$$\left.\begin{aligned} |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 + |S_{32}|^2 = 1 \\ |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 = 1 \end{aligned}\right\} \text{振幅关系} \qquad (12.4.15)$$

和

$$\left.\begin{aligned} S_{11}^* S_{12} + S_{21}^* S_{22} + S_{31}^* S_{32} = 0 \\ S_{11}^* S_{13} + S_{21}^* S_{23} + S_{31}^* S_{33} = 0 \\ S_{12}^* S_{13} + S_{22}^* S_{23} + S_{32}^* S_{33} = 0 \end{aligned}\right\} \text{相位关系} \qquad (12.4.16)$$

$$\det [S] = 1 \qquad (12.4.17)$$

无耗三端口网络具有如下两个重要性质：

性质(1)：无耗可逆三端口网络不可能完全匹配，即 3 个端口不可能同时都匹配。

性质(2)：无耗非可逆三端口网络能够完全匹配，并且适当地选择参考面，其正、反旋散射矩阵可表示为

$$[S_T]=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix} \text{和} [S_R]=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} \qquad (12.4.18)$$

下面证明这两个性质。

首先假定无耗三端口网络完全匹配，即假定 $S_{11}=S_{22}=S_{33}=0$，则由式(12.4.16)和式(12.4.17)可以得到

$$|S_{12}S_{23}S_{31}+S_{13}S_{32}S_{21}|=1 \qquad (12.4.19)$$

$$S_{12}S_{13}=S_{23}S_{21}=S_{31}S_{32}=0 \qquad (12.4.20)$$

对于可逆网络，由式(12.4.19)，则得

$$2|S_{12}S_{23}S_{31}|=1$$

这与式(12.4.20)相矛盾。这是由于假定了 $S_{11}=S_{22}=S_{33}=0$ 所致，即此假定不应成立，故知可逆无耗三端口网络不可能完全匹配。性质(1)得证。

对于非可逆情况，由式(12.4.19)可知，它与式(12.4.20)不矛盾，即式(12.4.20)条件实际上存在。这可有两种情况，即如果：

(1) $S_{12}=S_{23}=S_{31}=0$，则$\det[S]=[S_{13}S_{32}S_{21}|=1$；

(2) $S_{13}=S_{21}=S_{32}=0$，则$\det[S]=|S_{12}S_{23}S_{31}|=1$。

由此可知，无耗非可逆三端口网络能够完全匹配。

又由 S 矩阵么正性条件 $\sum_{k=1}^{N}S_{ki}^{*}S_{kj}=\delta_{ij}$ 可知，对于 $i=j$ 情况，可得到：

对应于情况(1)，有

$$|S_{13}|=|S_{32}|=|S_{21}|=1$$

因此

$$S_{13}=e^{j\theta_{13}},\quad S_{32}=e^{j\theta_{32}},\quad S_{21}=e^{j\theta_{21}}$$

对应于情况(2)，有

$$|S_{12}|=|S_{23}|=|S_{31}|=1$$

因此

$$S_{12}=e^{j\theta_{12}},\quad S_{23}=e^{j\theta_{23}},\quad S_{31}=e^{j\theta_{31}}$$

如果将各个端口的参考面向外移动 l_i，则 $j\theta_i=j\beta_i l_i$ （$i=1，2，3$），于是得到情况(1)条件下的 S 矩阵为

$$[S]=\begin{bmatrix}0 & 0 & e^{j(\theta_{13}-\theta_1-\theta_3)}\\ e^{j(\theta_{21}-\theta_2-\theta_1)} & 0 & 0\\ 0 & e^{j(\theta_{32}-\theta_3-\theta_2)} & 0\end{bmatrix}$$

如果选取参考面，使得

$$\theta_1=\frac{1}{2}(\theta_{13}+\theta_{21}-\theta_{32})$$

$$\theta_2=\frac{1}{2}(-\theta_{13}+\theta_{21}+\theta_{32})$$

$$\theta_3=\frac{1}{2}(\theta_{13}-\theta_{21}+\theta_{32})$$

即得到

$$[S]=[S_R]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \tag{12.4.21}$$

同样可以证明情况(2)条件下的 **S** 矩阵为

$$[S]=[S_T]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{12.4.22}$$

于是性质(2)得证。

由上述$[S_T]$和$[S_R]$表示的非可逆无耗三端口元件称为无耗完全匹配的理想三端口环行器。$[S]=[S_R]$时，$S_{21}=1$ 表示由端口 1 输入的功率完全传输至端口 2；而 $S_{31}=0$，表示端口 3 无输出，其余类推，如图 12－14 (a)所示。同理，图 12－14 (b)表示$[S]=[S_T]$的情况。

我们已分析过铁氧体环形器的工作原理，本章从非可逆三端口网络的分析证明了非可逆三端口器件作环形器的可能性。

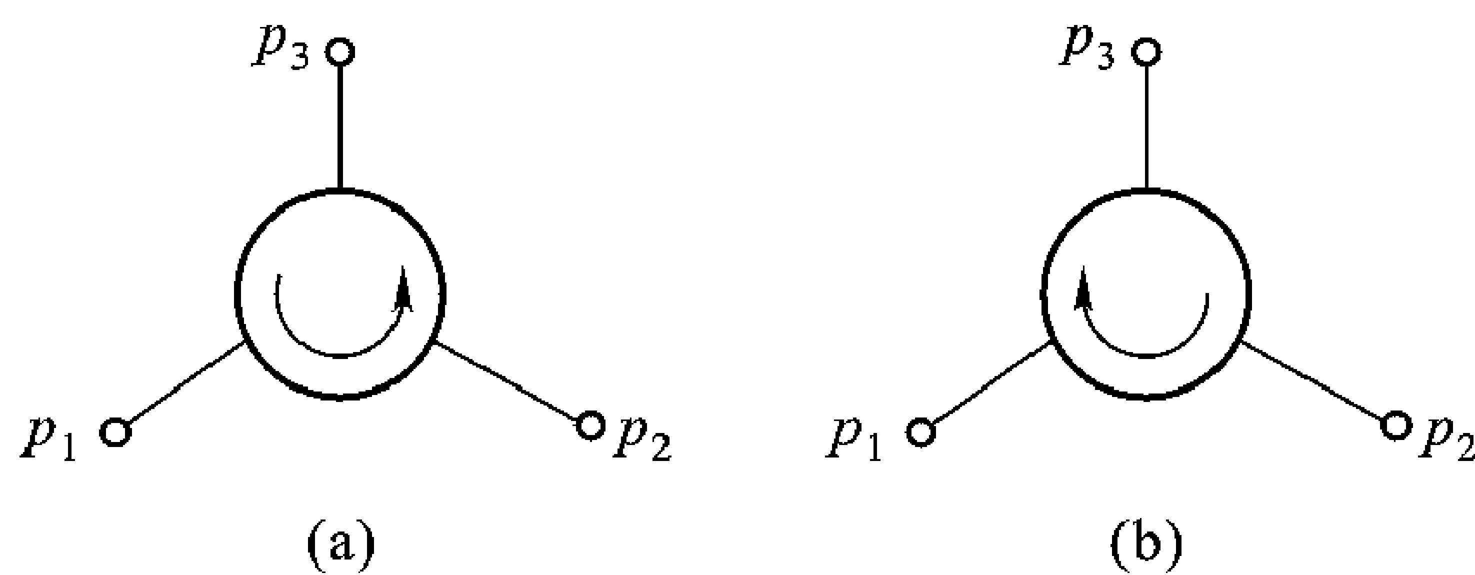


图 12－14　三端口环行器的 **S** 矩阵

(a) $[S_R]$　(b) $[S_T]$

矩形波导对称 Y 分支及其等效网络的 S 参数

下面以矩形波导对称 Y 分支为例导出三端口器件的具体网络参数。图

12－15 给出矩形波导对称 Y 分支的结构和等效电路。各个端口具有对称性。由等效电路(1)各个端口电压的方向可以看出，$S_{11}=S_{22}=S_{33}$；其次，如以相同功率分别输入到端口 p_1（p_2，p_3），则在端口 p_2（p_3，p_1）的输出功率相等，于是有 $S_{21}=S_{32}=S_{13}$。同理有 $S_{31}=S_{12}=S_{23}$。因此得到 E 面和 H 面对称 Y 分支的 $\boldsymbol{S}$ 矩阵相同，即

$$[S]_Y=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} \end{bmatrix} \tag{12.4.23}$$

	对称 Y 分支	等效电路(1)	等效电路(2)
E 面(串联)分支	p_3 120° 120° p_1 120° p_2	p_3 p_1 p_2	p_3 p_1 p_2
H 面(串联)分支	120° 120° 120°	p_3 p_1 p_2	p_3 p_1 p_2

图 12－15 波导对称 Y 分支及其等效电路

12.4.4 四端口器件与四端口网络

定向耦合器是四端口器件的代表，下面主要讨论定向耦合器的 S 参数表示。

对于无耗可逆四端口网络，其 $\boldsymbol{S}$ 矩阵为

$$[S]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \tag{12.4.24}$$

按照习惯，规定端口 1 为输入端口，其他 3 个都可为输出端口或隔离端口，它们的 $\boldsymbol{S}$ 矩阵分别用 $[S_{02}]$、$[S_{03}]$ 和 $[S_{04}]$ 表示之，如图 12－16。

下面先证明无耗可逆四端口网络一个最基本的性质：即无耗可逆四端口网络可以完全匹配，且为一理想定向耦合器。

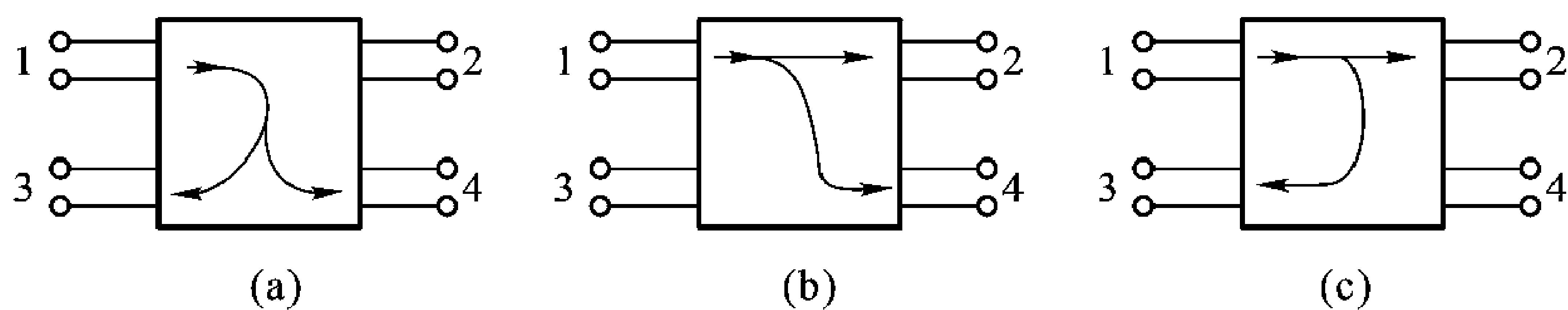


图 12-16　无耗可逆四端口网络的 S 矩阵

(a) $[S_{02}]$　(b) $[S_{03}]$　(c) $[S_{04}]$

这可由无耗可逆四端口网络 S 矩阵的么正性得到证明。事实上，先假定其中 3 个端口匹配，即假定

$$S_{11}=S_{22}=S_{33}=0$$

则由式(12.4.24)的么正性，可以得到

$$|S_{12}|^2+|S_{13}|^2+|S_{14}|^2=1 \tag{12.4.25}$$

$$|S_{12}|^2+|S_{23}|^2+|S_{24}|^2=1 \tag{12.4.26}$$

$$|S_{13}|^2+|S_{23}|^2+|S_{34}|^2=1 \tag{12.4.27}$$

$$|S_{14}|^2+|S_{24}|^2+|S_{34}|^2+|S_{44}|^2=1 \tag{12.4.28}$$

$$S_{13}^*S_{23}+S_{14}^*S_{24}=0 \tag{12.4.29}$$

由式(12.4.26)减去式(12.4.25)，得到

$$(|S_{23}|^2+|S_{24}|^2)-(|S_{13}|^2+|S_{14}|^2)=0 \tag{12.4.30}$$

由式(12.4.29)得到

$$|S_{13}||S_{23}|=|S_{14}||S_{24}| \tag{12.4.31}$$

则式(12.4.30)可以写成

$$\begin{aligned}&(|S_{23}|^2+|S_{24}|^2)-\frac{|S_{13}|^2|S_{23}|^2+|S_{14}|^2|S_{23}|^2}{|S_{23}|^2}\\&=(|S_{23}|^2+|S_{24}|^2)-\frac{|S_{14}|^2|S_{24}|^2+|S_{14}|^2|S_{23}|^2}{|S_{23}|^2}\\&=(|S_{23}|^2+|S_{24}|^2)\left(1-\frac{|S_{14}|^2}{|S_{23}|^2}\right)=0\end{aligned} \tag{12.4.32}$$

显然，当

$$|S_{14}|=|S_{23}| \tag{12.4.33}$$

时，式(12.4.32)成立，则由式(12.4.31)可得

$$|S_{13}|=|S_{24}| \tag{12.4.34}$$

将式(12.4.33)代入式(12.4.25)，并与式(12.4.29)比较，得到

$$|S_{12}|=|S_{34}| \tag{12.4.35}$$

将式(12.4.34)、(12.4.35)和式(12.4.25)代入式(12.4.28)，得到

$$
\begin{aligned}
|S_{44}|^2 &= 1 - (|S_{14}|^2 + |S_{24}|^2 + |S_{34}|^2) \\
&= 1 - (|S_{14}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{12}|^2) = 1 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

故得

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = 0 \tag{12.4.36}$$

因此得到无耗可逆四端口网络的 $\boldsymbol{S}$ 矩阵为

$$[S_0] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \tag{12.4.37}$$

利用式(12.4.33)、(12.4.34)和式(12.4.35)，由式(12.4.37)所示 $\boldsymbol{S}_0$ 矩阵的幺正性得到

$$\left.\begin{aligned}
&|S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \\
&S_{13}S_{14}^* + S_{14}S_{13}^* = 0 \\
&S_{12}S_{14}^* + S_{14}S_{12}^* = 0 \\
&S_{12}S_{13}^* + S_{13}S_{12}^* = 0
\end{aligned}\right\} \tag{12.4.38}$$

若要上式成立，即若 4 个端口完全匹配，则 S_{12}、S_{13}和 S_{14}中必须有一个为零。这就是说，此四端口网络必定具有定向性，即为定向耦合器。若 $S_{12}=0$，则式(12.4.37)变成

$$[S_{02}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\ 0 & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & 0 \\ S_{14} & S_{24} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12.4.39}$$

式(12.4.39)即表示图 12-16 (a)的完全匹配网络的 $\boldsymbol{S}$ 矩阵；若 $S_{13}=0$，则式(12.4.37)变成

$$[S_{03}] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & 0 \\ 0 & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & 0 & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \tag{12.4.40}$$

式(12.4.40)即表示图 12-16 (b)的 $\boldsymbol{S}$ 矩阵；若 $S_{14}=0$，则得到图 12-16 (c)的 $\boldsymbol{S}$ 矩阵为

$$[S_{04}] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{24} \\ S_{13} & 0 & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \tag{12.4.41}$$

由上面的分析可知，无耗可逆四端口元件可以完全匹配，其 S 矩阵只有 $[S_{02}]$、$[S_{03}]$和 $[S_{04}]$3 种形式，且均为一理想定向耦合器，分别称为双向定向耦合器、同向定向耦合器和反向定向耦合器。

下面分析图 12－17 所示的同向定向耦合器的 S 参数表示。所有定向耦合器都是由耦合机构联系在一起的两对传输线构成的(见图 12－17)，1－2 为一条传输线，称为主线，3－4 为另一条传输线，称为副线。对于同向定向耦合器，副线功率流方向与主线一致。当功率由主线的端口 1 向端口 2 传输时，如果端口 2、3、4 都接匹配负载，则副线中只有端口 4 有耦合输出，另一端口 3 无输出。我们称端口 1 为输入端，端口 2 为直通端，端口 4 为耦合端，端口 3 为隔离端。

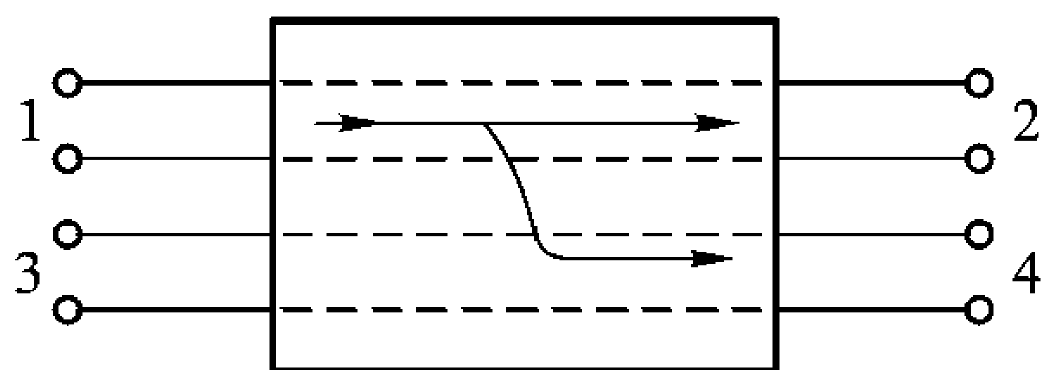


图 12－17　同向定向耦合器网络

对于图 12－17 所示同向定向耦合器，由$[S_{03}]$的么正性可得

$$|S_{14}| = |S_{23}|$$

$$|S_{12}| = |S_{34}|$$

实际应用时，定向耦合器需与信号源和负载连接，如图 12－18。设端口 2、3、4 接负载后产生的反射系数为 Γ_2、Γ_3、Γ_4，则其反射波矩阵可由$[S_{03}]$求得，为

$$[b_{03}] = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & S_{23} & 0 \\ S_{23} & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_4 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} S_{12} \\ 0 \\ S_{14} \end{bmatrix} a_1 \tag{12.4.42}$$

当端口 3 和 4 接匹配负载时，$\Gamma_3 = \Gamma_4 = 0$，于是

$$\begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} S_{12} \\ S_{12} S_{23} \Gamma_2 \\ S_{14} \end{bmatrix} \tag{12.4.43}$$

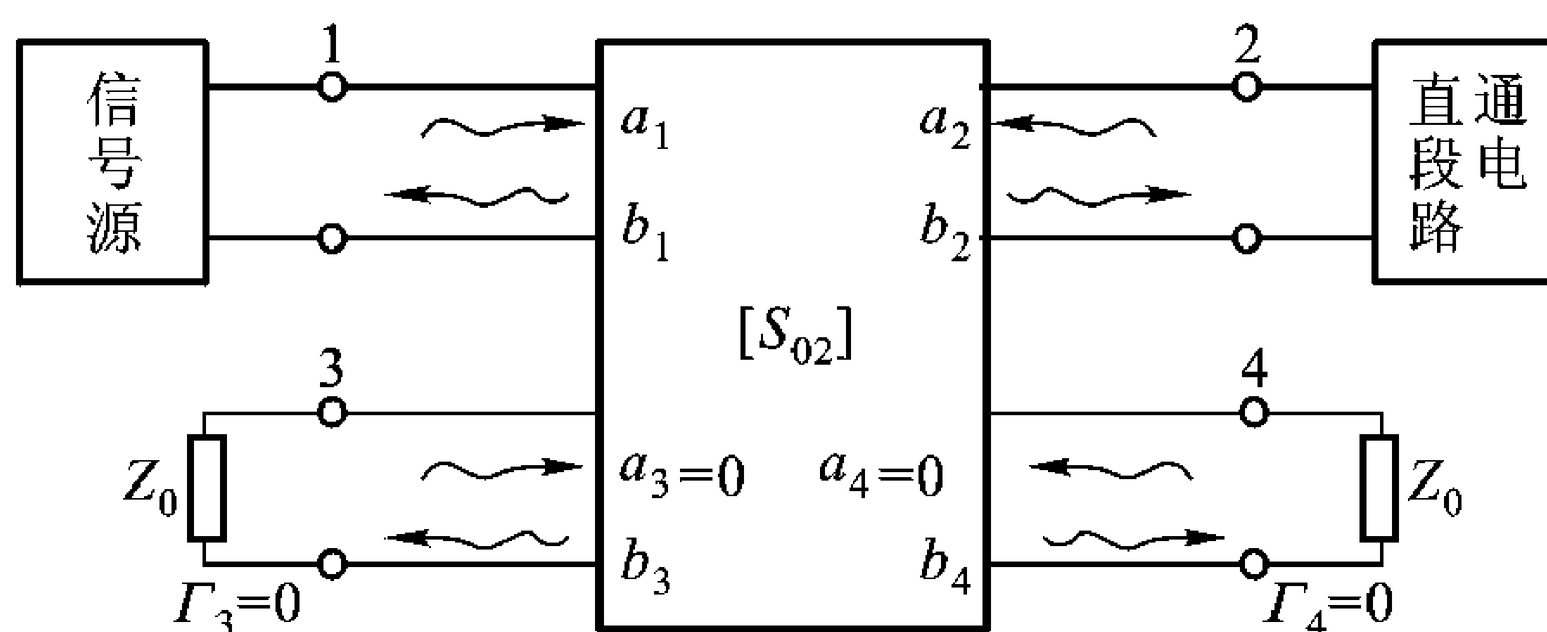


图 12－18　连接信号源和负载的理想定向耦合器

即得到

$$b_2 = S_{12} a_1 \tag{12.4.44}$$

$$b_3 = S_{12} S_{23} \Gamma_2 a_1 = S_{23} a_2 \tag{12.4.45}$$

$$b_4 = S_{14} a_1 \tag{12.4.46}$$

因此端口 3 和 4 反射波的幅值为

$$|b_3| = |S_{23}||a_2| = |S_{14}||a_2| \tag{12.4.47}$$

$$|b_4| = |S_{14}||a_1| \tag{12.4.48}$$

这表明端口 3 和 4 的反射波分别由不同入射波引起，却受到等量的衰减，如果在端口 3 和 4 接上匹配检波器则可以分别检测出来。所以利用定向耦合器可以构成反射计。这样，由主线上电磁波的不同传输方向，在副线中可得到不同端口的耦合输出。这正是定向耦合器名称的来由。

实际应用的定向耦合器的性能指标主要有：

(1) 耦合度 C：定义为副线耦合输出功率 P_{40}与主线输入功率 P_{1i}之比的分贝数，即

$$C = 10\ \lg \frac{P_{40}}{P_{1i}} = 20\ \lg |S_{41}| \quad (单位为\ dB) \tag{12.4.49}$$

(2) 隔离度 I：定义为输入功率 P_{1i}与副线隔离端的功率 P_{30}之比的分贝数，即

$$I = 10\ \lg \frac{P_{1i}}{P_{30}} = 20\ \lg \frac{1}{|S_{31}|} \quad (单位为\ dB) \tag{12.4.50}$$

反映定向耦合器隔离度的指标有时用定向性 D，它定义为副线耦合输出功率 P_{40}与隔离端功率 P_{30}之比的分贝数，即

$$D = 10\ \lg \frac{P_{40}}{P_{30}} = 10\ \lg \frac{P_{40} P_{1i}}{P_{1i} P_{30}} = 20\ \lg \left| \frac{S_{41}}{S_{31}} \right|$$
$$= I - C \quad (单位为\ dB)$$

可见定向性等于隔离度与耦合度之差。

(3) 输入驻波比：指端口 2、3、4 都接匹配负载时，主线输入端的驻波比。

(4) 工作频带宽度：它是指满足上述 3 个指标时的工作频率范围。

对于图 12－16 所示定向耦合器，其 S 矩阵为$[S_{03}]$，如式(12.4.40)所示。由其么正性可得

$$\left.\begin{aligned} |S_{12}|^2 + |S_{14}|^2 = 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\ |S_{23}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \\ |S_{14}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \end{aligned}\right\} \tag{12.4.51}$$

和

$$S_{12}S_{14}^* + S_{23}S_{34}^* = S_{12}S_{23}^* + S_{14}S_{34}^* = 0 \tag{12.4.52}$$

由式(12.4.51)和式(12.4.52)得到

$$S_{12} = S_{34} = C_1 \tag{12.4.53}$$

则由式(12.4.52)，得到

$$S_{14} = S_{23} = jC_2 \tag{12.4.54}$$

而 $C_1^2 + C_2^2 = 1$。因此得到定向耦合器的 **S** 矩阵为

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & 0 & jC_2 \\ C_1 & 0 & jC_2 & 0 \\ 0 & jC_2 & 0 & C_1 \\ jC_2 & 0 & C_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{12.4.55}$$

定向耦合器的结构形式很多，有波导型、同轴线型、微带线型等，主线与副线的耦合方式也有孔(或槽)形，分支波导、耦合线段等已在前面有关章节讨论过，此处不再赘述。

本章要点

- 波导器件按与系统连接的端口数来分类就有一端口器件、二端口器件、三端口器件、四端口器件，以至更多端口器件。相应地，这些器件在系统中地位就是一端口网络、二端口网络、三端口网络、四端口网络，及更多端口网络。从系统角度看可以不关心器件内部的具体工作原理，而只关心器件表示各端口状态的特征量之间的关系。这种关系可以用 **Z** 矩阵(或 **Y** 矩阵)、**S** 矩阵、**A** 矩阵、**T** 矩阵表示，它们相互间可以转换。高频时，S 参数易于测量，应用最多。网络级连时，**A** 矩阵、**T** 矩阵用起来较方便。阻抗(或导纳)在低频时是容易测量的量，**Z** 矩阵、**Y** 矩阵在频率低时应用较多。
- 无耗、互易、无源网络矩阵有以下几点性质：

  (1) 互易网络 **S** 矩阵具有对称性，即 $S_{mk} = S_{km}$；

  (2) 无源网络的耗散矩阵 $[D] = [1] - [S]^+[S]$ 为非负厄米矩阵，且 $|S_{mk}| \leqslant 1$；

  (3) 无耗网络散射矩阵是么正的，即 $[S]^+[S] = [1]$，如果网络又可逆，则 $[S]^*[S] = [1]$；

  参考面移动时，S 参数的幅值不变。
- 一端口器件只用一个 S 参数 S_{11} 表示，S_{11} 满足关系

$$0 \leqslant 1 - |S_{11}|^2 = d_{11} \leqslant 1$$

  无耗非可逆三端口网络可构成理想的三端口环形器，无耗可逆四端口网络可

作成定向耦合器。

- 波导器件的网络参数可从理论分析得到，更多的是通过数值模拟、具体测量得到。

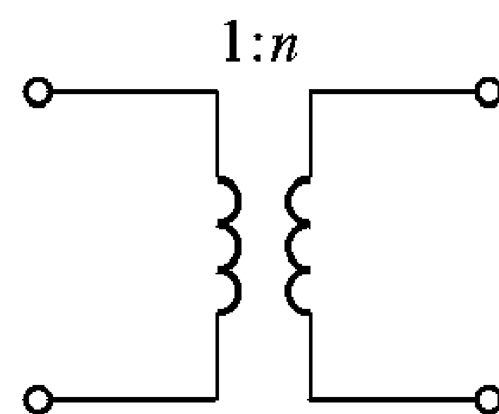
习题

12.1　求变压器（见题图 12.1）的 **A** 矩阵和 **S** 矩阵。

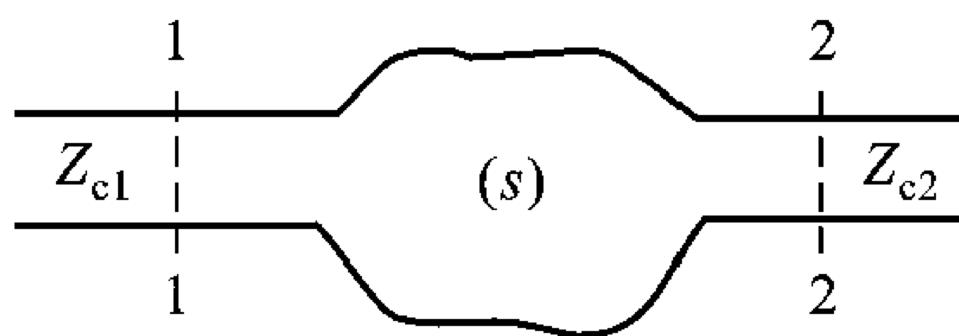
12.2　对于无耗、互易、对称的二端口网络，其独立的 S 参数有几个？并说明理由。

12.3　有一个对称无损二端口网络，若输出端口接匹配负载，测得输入口的驻波比 $\rho=1.5$，驻波相位 $d_{min}=0.125\lambda_g$，求二端口网络的 S 参量。

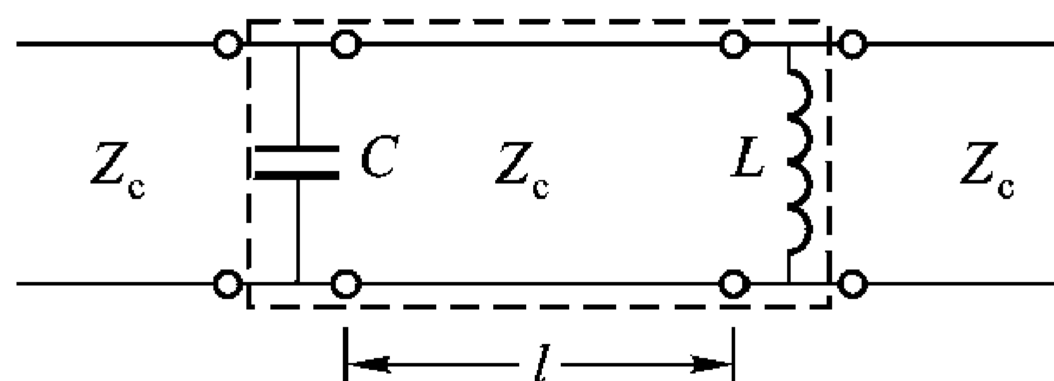
12.4　一任意二端口网络如题图 12.4 所示，其 S 已知，当 2－2 面接负载其电压反射系数为 Γ_2 时，求 1－1 面的 Γ_{in}。



题图 12.1



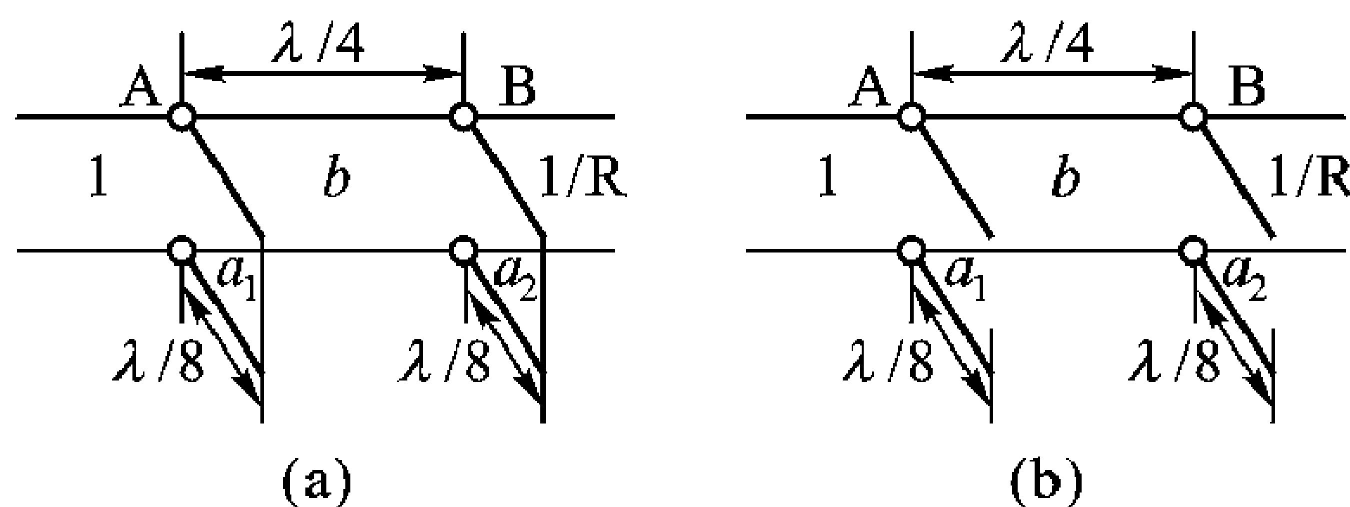
题图 12.4



题图 12.5

12.5　某微波元件的等效电路如题图 12.5 所示，工作角频率为 ω，求此元件的等效网络散射矩阵参数。

12.6　微带双分支定向耦合器（见 2.7.3 节）可用奇、偶模进行分析，奇、偶模情况下的等效电路见图 2－39（d）、（e），并重绘于题图 12.6（a）、（b），求奇、偶模两种情况下的 **A** 矩阵。



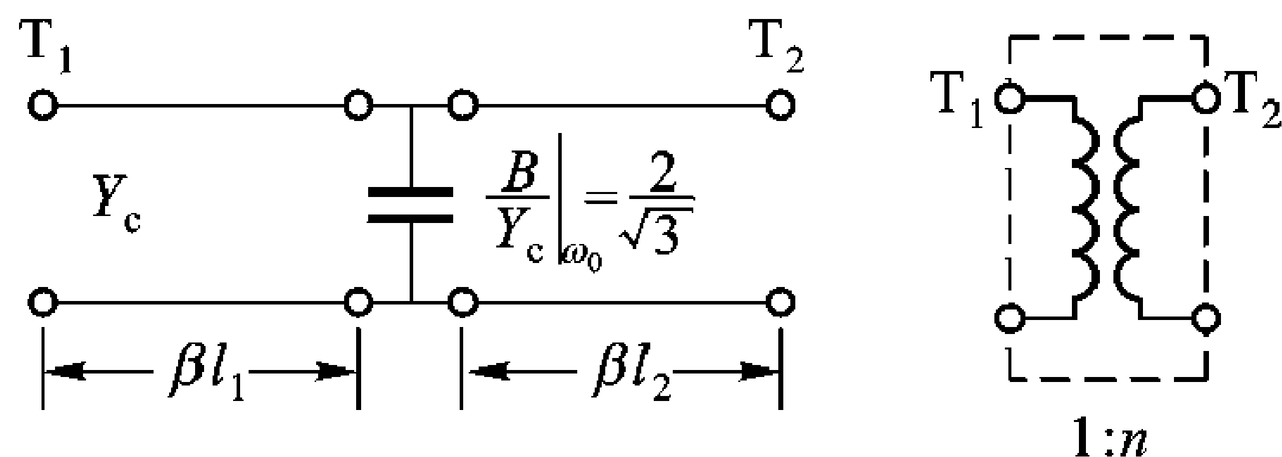
题图 12.6

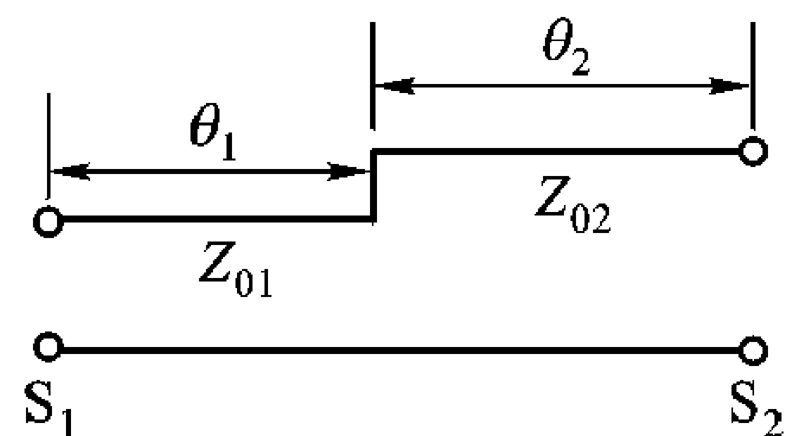
12.7　在一传输系统上，其无损不均匀性可等效成一个电容，已知此电容的归一化电纳为 $\left.\frac{\omega C}{Y_c}\right|_{\omega_0}=\frac{2}{\sqrt{3}}$，在传输线上可以找到适当的截面 T_1 和 T_2，以 T_1 和 T_2 截面为参考面则可等效成一个理想变压器，见题图 12.7。求 T_1 和 T_2 截面的位置（即 βl_1 和 βl_2）以及理想变压器的变换比 n。

12.8　如题图 12.8 所示波导阶梯：

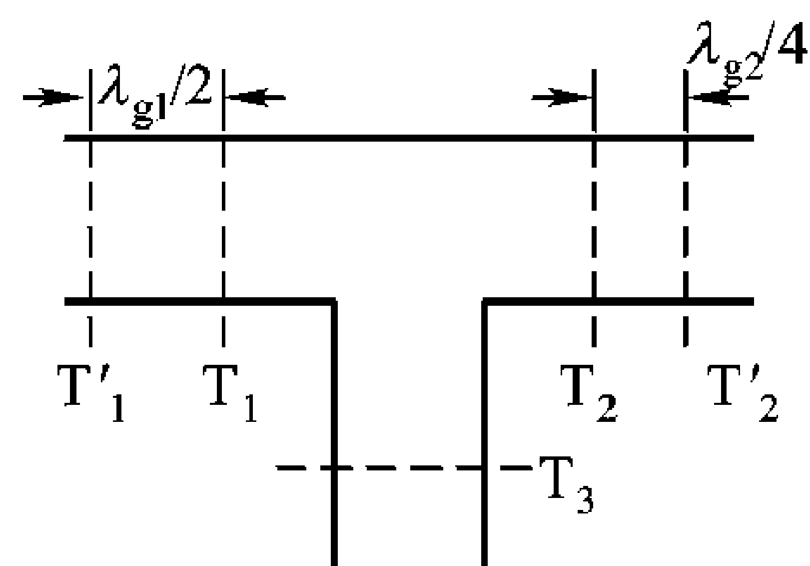
（1）求阶梯处的 **T** 和 **A** 矩阵及其等效电路；

（2）求电长度为 θ_1 和 θ_2 的参考面 S_1 和 S_2 之间电路总的 **T** 矩阵和 **A** 矩阵。





题图 12.7



题图 12.8

12.9 如题图 12.9 所示三端口网络，当参考面为 T_1、T_2、T_3 时的散射矩阵为

$$[S]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$

若 T_1 外移 $\lambda_{g1}/2$，T_2 外移 $\lambda_{g2}/4$，分别得到新的参考面 T_1 和 T_2，试求参考面移动后三端口网络的散射矩阵。

题图 12.9

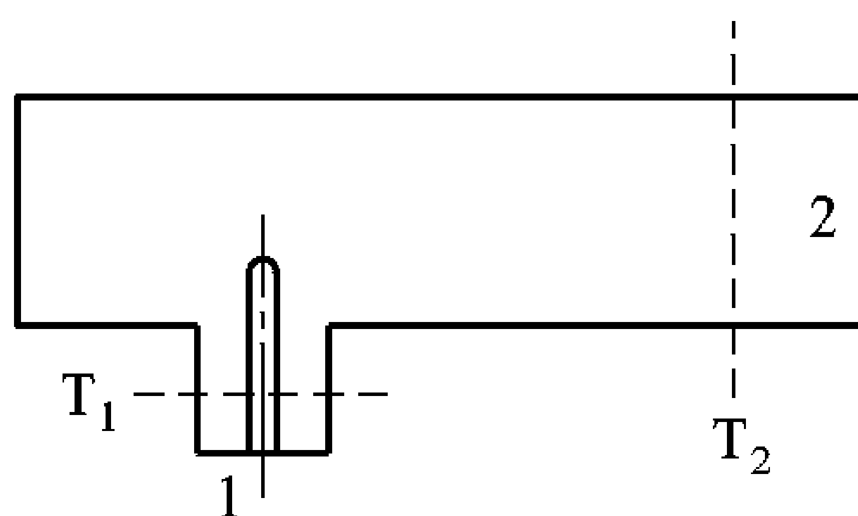
12.10 如题图 12.10 所示同轴波导转换接头，已知其散射矩阵为

$$[S]=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

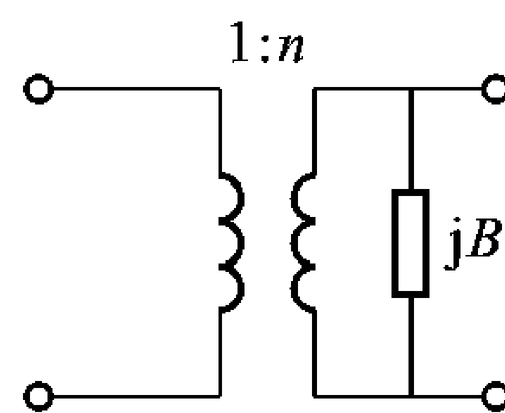
(1) 求端口 2 匹配时端口 1 的驻波系数；

(2) 求当端口 2 接负载产生的反射系数为 Γ_2 时，端口 1 的反射系数；

(3) 求端口 1 匹配时端口 2 的驻波系数。



题图 12.10



题图 12.11

12.11 如题图 12.11 所示微波接头等效电路，今测得

$$S_{11}=-\frac{1+\mathrm{j}}{3+\mathrm{j}},\quad S_{22}=\frac{1-\mathrm{j}}{3+\mathrm{j}}$$

求理想变压器的匝数比 n、接头处电纳 B 及 S_{12}值。

第 13 章　波导及波导器件等效网络参数的数值模拟

结构相对简单的规则波导(如第 6 章讨论的柱形波导)可以得到解析解，但结构复杂的波导及波导器件一般只能用数值方法对其特性进行模拟。计算机及数值分析技术的进步使得用数值方法模拟波导及波导器件特性参数成为可能。数值模拟已成为电磁场与电磁波分析的有力工具。对波导及波导器件的设计制作网络参数的测量是必不可少的，但是在波导器件设计过程中，网络参数的数值模拟对于优化器件设计、缩短设计周期、降低设计成本越来越重要。由于波导器件种类繁多，结构各异，所依据的物理原理也差别很大，业已发展的数值模拟方法也多种多样。本章作为入门的引子，仅选择几种常用的数值模拟方法进行初步讨论。

本章 13.1、13.2 节用模式匹配法分析矩形波导分叉不连续的问题以及条形介质波导的色散关系，13.3 节用谱域法分析微带线，这两种方法没有本质区别。13.4 节用有限元法分析介质谐振器。前面几种方法都是在频域中进行的。13.5 节则介绍时域中数值模拟电磁问题的方法——时域有限差分法(FDTD)。13.6 节用 FDTD 法数值模拟微带器件的等效网络参数。13.7 节讨论用谐振法数值模拟波导器件的等效网络参数。

13.1　矩形波导分叉不连续面的等效网络表示

如图 13-1，矩形波导 A 在 $z=0$ 平面分叉为矩形波导 B 和 C，并假定波导 B 和 C 被无限薄的完纯导电壁分开。所讨论的问题是区域 A 中 TE_{10}基模沿 z 方向投射到 $z=0$ 的分叉不连续面，由于分叉不连续面存在，将激励起包括基模 TE_{10}在内的各高次模式。要求的是区域 A 所激励起各模式函数的幅值 $V^a(z)$、$I^a(z)$与 B、C 区域激励的各模式函数幅值 $V^b(z)$、$I^b(z)$、$V^c(z)$、$I^c(z)$有什么关系，并用怎样的网络表示？

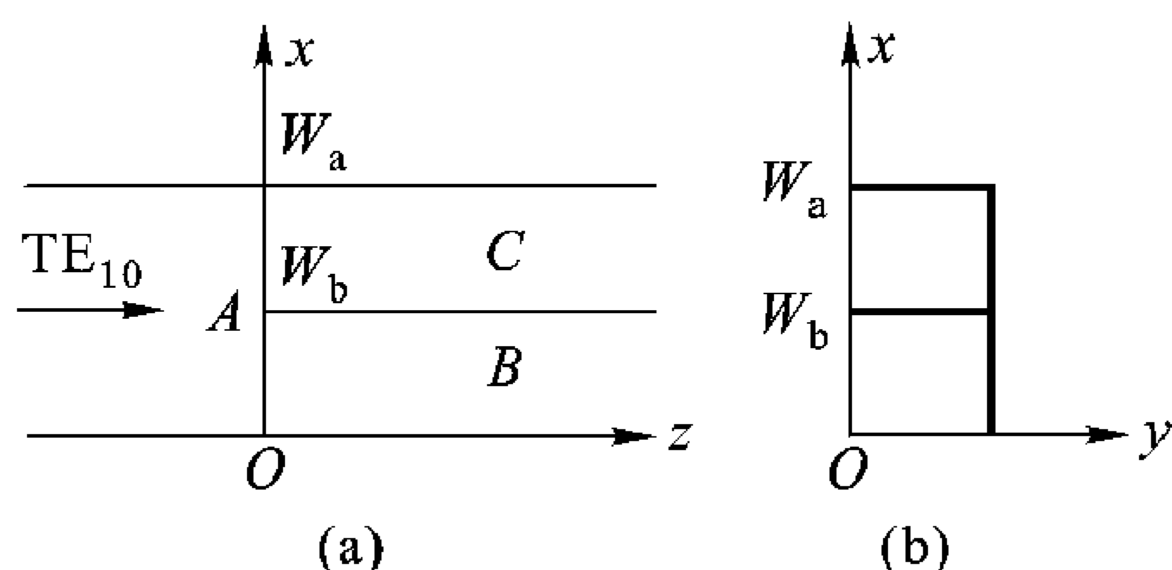


图 13-1　矩形波导分叉

(a) 纵截面　(b) 横截面

由于我们讨论的结构只在 x 方向

不均匀，y 方向仍然是均匀的，而激励波 TE_{10} 在 y 方向无变化，也是均匀的，所以 TE_{10} 波投射到分叉不连续面只激励起 TE_{m0} 各高次模式。因此本节讨论的问题与 y 方向不受限制的平行板分叉波导相当。平行板分叉波导这一典型不均匀性问题已为许多作者详细研究过。本节这样处理，以便于和其他作者的研究结果比较。

由于只考虑 TE_{m0} 诸模式，各区域横向场量只有 E_y、H_x 两个分量。它们可分解为无限多模式场的叠加

$$E_y^{\mathrm{r}} = \sum_m E_{ym}^{\mathrm{r}}(x,z) = -\sum_m \varphi_m^{\mathrm{r}}(x) V_m^{\mathrm{r}}(z) \tag{13.1.1}$$

$$H_x^{\mathrm{r}} = \sum_m H_{xm}^{\mathrm{r}}(x,z) = \sum_m \varphi_m^{\mathrm{r}}(x) I_m^{\mathrm{r}}(z) \tag{13.1.2}$$

这里上标 r 可为 a、b、c，表示相应区域 A、B、C 中的量。φ_m^{r} 为 r 区域的模式函数，因为场在 y 方向没有变化，故 φ_m^{r} 满足的方程为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + k_x^2\right)\varphi_m^{\mathrm{r}}(x) = 0 \tag{13.1.3}$$

其解为

$$\varphi_m^{\mathrm{a}}(x) = A_m \sin\frac{m\pi}{W_{\mathrm{a}}}x \tag{13.1.4}$$

$$\varphi_m^{\mathrm{b}}(x) = B_m \sin\frac{m\pi}{W_{\mathrm{b}}}x \tag{13.1.5}$$

$$\varphi_m^{\mathrm{c}}(x) = C_m \sin\frac{m\pi}{W_{\mathrm{c}}}(x - W_{\mathrm{b}}) \tag{13.1.6}$$

式中 W_{a}、W_{b} 为波导 A、B 的宽度(见图 13-1)，$W_{\mathrm{c}} = W_{\mathrm{a}} - W_{\mathrm{b}}$ 为波导 C 的宽度。

$V_m^{\mathrm{r}}(z)$、$I_m^{\mathrm{r}}(z)$表示模式函数幅值，具有电压、电流量纲，简称模式电压或模式电流，它们满足传输线方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}V_m^{\mathrm{r}}(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_{zm}^{\mathrm{r}} Z_m^{\mathrm{r}} I_m^{\mathrm{r}}(z) & (13.1.7) \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}I_m^{\mathrm{r}}(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{j}k_{zm}^{\mathrm{r}} Y_m^{\mathrm{r}} V_m^{\mathrm{r}}(z) & (13.1.8) \end{cases}$$

式中

$$k_{zm}^{\mathrm{r}2} = \omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{W_{\mathrm{r}}}\right)^2 \tag{13.1.9}$$

$$Z_m^{\mathrm{r}} = \frac{1}{Y_m^{\mathrm{r}}} = \frac{\omega\mu}{k_{zm}^{\mathrm{r}}} \tag{13.1.10}$$

k_{zm}^{r} 为 TE_m 模的传播常数，Z_m^{r}（或 Y_m^{r}）为 TE_m 模的特征波阻抗(或特征波导纳)。

引入归一化条件，有

$$\int_{x_1}^{x_2}\varphi_m^{\mathrm{r}}(x)\varphi_m^{\mathrm{r}}(x)\mathrm{d}x=1$$

积分限定义如下：

$$A\text{ 区：}\ x_1=0,\ x_2=W_{\mathrm{a}}$$

$$B\text{ 区：}\ x_1=0,\ x_2=W_{\mathrm{b}}$$

$$C\text{ 区：}\ x_1=W_{\mathrm{b}},\ x_2=W_{\mathrm{a}}$$

由此可得

$$A_m=\sqrt{\frac{2}{W_{\mathrm{a}}}}$$

$$B_m=\sqrt{\frac{2}{W_{\mathrm{b}}}}$$

$$C_m=\sqrt{\frac{2}{W_{\mathrm{a}}-W_{\mathrm{b}}}}$$

由式(13.1.4)~(13.1.6)定义的模式函数以及上面归一化条件确定的常数 A_m，B_m，C_m，不难得到模式函数的正交性

$$\left\langle\varphi_m^{\mathrm{a}}\middle|\varphi_n^{\mathrm{a}}\right\rangle=\int_0^{W_{\mathrm{a}}}\varphi_m^{\mathrm{a}}\varphi_n^{\mathrm{a}}\mathrm{d}x=\delta_{mn}$$

$$\left\langle\varphi_m^{\mathrm{b}}\middle|\varphi_n^{\mathrm{b}}\right\rangle=\int_0^{W_{\mathrm{b}}}\varphi_m^{\mathrm{b}}\varphi_n^{\mathrm{b}}\mathrm{d}x=\delta_{mn}$$

$$\left\langle\varphi_m^{\mathrm{c}}\middle|\varphi_n^{\mathrm{c}}\right\rangle=\int_{W_{\mathrm{b}}}^{W_{\mathrm{a}}}\varphi_m^{\mathrm{c}}\varphi_n^{\mathrm{c}}\mathrm{d}x=\delta_{mn}$$

δ_{mn}是 Kronecker delta 函数，当 $m=n$ 时，$\delta_{mn}=1$，否则为零。

分叉不连续面的存在将引起分叉不连续面两边各区域模式之间的耦合，这种耦合关系可利用模式匹配技术求得。所谓模式匹配技术是指分叉不连续面两边场的全部切向分量必须连续。即

$$\begin{cases}E_y^{\mathrm{a}}(0^-)=\begin{cases}E_y^{\mathrm{b}}(0^+) & (0<x<W_{\mathrm{b}})\\ E_y^{\mathrm{c}}(0^+) & (W_{\mathrm{b}}<x<W_{\mathrm{a}})\end{cases}\\ H_x^{\mathrm{a}}(0^-)=\begin{cases}H_x^{\mathrm{b}}(0^+) & (0<x<W_{\mathrm{b}})\\ H_x^{\mathrm{c}}(0^+) & (W_{\mathrm{b}}<x<W_{\mathrm{a}})\end{cases}\end{cases}\tag{13.1.11}$$

因场的切向分量可表示为模式函数和模式电压或模式电流的乘积，把式(13.1.1)、(13.1.2)代入式(13.1.11)便可得到分叉不连续面两边模式电流或模式电压之间的关系

$$\sum_m\varphi_m^{\mathrm{a}}V_m^{\mathrm{a}}(0^-)=\begin{cases}\sum_n\varphi_n^{\mathrm{b}}V_n^{\mathrm{b}}(0^+) & (0<x<W_{\mathrm{b}}) & (13.1.12\mathrm{a})\\ \sum_n\varphi_n^{\mathrm{c}}V_n^{\mathrm{c}}(0^+) & (W_{\mathrm{b}}<x<W_{\mathrm{a}}) & (13.1.12\mathrm{b})\end{cases}$$

$$\sum_m \varphi_m^a I_m^a(0^-) = \begin{cases} \sum_n \varphi_n^b I_n^b(0^+) & (0 < x < W_b) & (13.1.13a) \\ \sum_n \varphi_n^c I_n^c(0^+) & (W_b < x < W_a) & (13.1.13b) \end{cases}$$

将式（13.1.12a）、（13.1.13a）两边同乘以 φ_n^b，将式（13.1.12b）、(13.1.13b)两边同乘以 φ_n^c，并分别在 $(0, W_b)$、(W_b, W_a) 范围内积分，利用模式函数的正交性可得

$$\begin{aligned} V_n^b(0^+) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{nm} V_m^a(0^-) \\ V_n^c(0^+) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_{nm} V_m^a(0^-) \\ I_n^b(0^+) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{nm} I_m^a(0^-) \\ I_n^c(0^+) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_{nm} I_m^a(0^-) \\ n &= 1, 2, 3, \cdots \end{aligned} \tag{13.1.14}$$

式中

$$\begin{cases} P_{nm} = \int_0^{W_b} \varphi_n^b \varphi_m^a \mathrm{d}x \\ Q_{nm} = \int_{W_b}^{W_a} \varphi_n^c \varphi_m^a \mathrm{d}x \end{cases} \tag{13.1.15}$$

式(13.1.15)表明，P_{nm}、Q_{nm}均为实数。将式(13.1.12)、(13.1.13)两边同时乘以 φ_m^a，并在 $(0, W_a)$ 范围内积分可得

$$\begin{cases} V_m^a(0^-) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} V_n^b(0^+) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} V_n^c(0^+) \\ I_m^a(0^-) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{mn} I_n^b(0^+) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} I_n^c(0^+) \\ m = 1, 2, 3, \cdots \end{cases} \tag{13.1.16}$$

式(13.1.14)、(13.1.16)可进一步写成矩阵形式

$$[V^b(0^+)] = [P][V^a(0^-)] \tag{13.1.17}$$

$$[I^b(0^+)] = [P][I^a(0^-)] \tag{13.1.18}$$

$$[V^c(0^+)] = [Q][V^a(0^-)] \tag{13.1.19}$$

$$[I^c(0^+)] = [Q][I^a(0^-)] \tag{13.1.20}$$

$$[V^a(0^-)] = [P]^T[V^b(0^+)] + [Q]^T[V^c(0^+)] \tag{13.1.21}$$

$$[I^a(0^-)] = [P]^T[I^b(0^+)] + [Q]^T[I^c(0^+)] \tag{13.1.22}$$

$$[V^r] = (V_1^r, V_2^r, \cdots\cdots)^T$$

$$[I^{r}]=(I_1^{r},V_2^{r},\cdots\cdots)^{T}$$

上标 T 表示矩阵转置。

式(13.1.17)～(13.1.22)清楚地表明了分叉不连续面两边模式电压和模式电流之间的耦合关系，据此，我们可以用图 13－2 所示的一个多端口网络 M 来表示它们之间的关系，从而把场的问题归结到网络问题来处理。

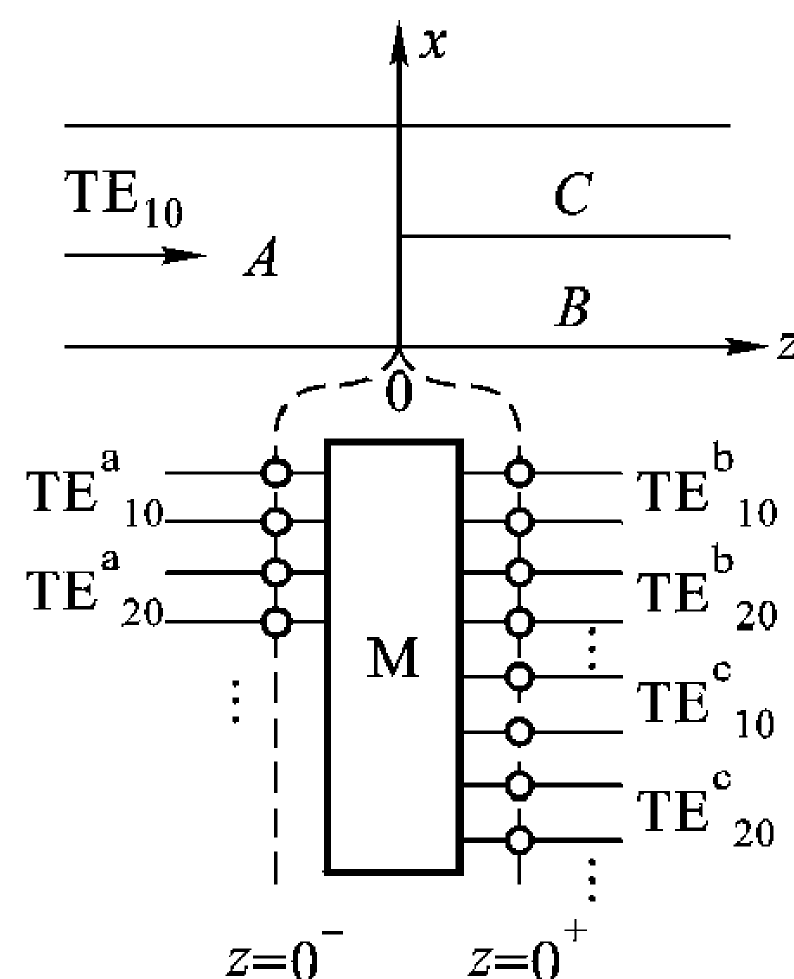


图 13－2 矩形波导分叉不连续面及其等效网络

必须指出，式(13.1.17)～(13.1.22)6 组式中只有 3 组是独立的，它们可决定区域 A、B、C 中模式函数的幅值。特别是式(13.1.21)、(13.1.22)同时包含了 3 个区域的场量，是反映分叉不连续面特征的最本质的方程组。将式(13.1.17)、(13.1.19)代入式(13.1.21)可得

$$\begin{aligned}V^{a}(0^{-})&=[P]^{T}[V^{b}(0^{+})]+[Q]^{T}[V^{c}(0^{+})]\\&=\{[P]^{T}[P]+[Q]^{T}[Q]\}V^{a}(0^{-})\end{aligned}$$

所以

$$[P]^{T}[P]+[Q]^{T}[Q]=[1] \qquad (13.1.23)$$

同样式(13.1.18)、(13.1.20)取转置并复共轭，分别右乘$[V^{b}]$、$[V^{c}]$，再相加，并利用式(13.1.17)、(13.1.19)及(13.1.23)得到

$$[I^{b}]^{+}[V^{b}]+[I^{c}]^{+}[V^{c}]=[I^{a}]^{+}[V^{a}] \qquad (13.1.24)$$

式(13.1.23)表示了矩阵$[P]$、$[Q]$的性质，$[1]$为单位矩阵。式(13.1.24)中上标＋表示矩阵转置并共轭。该式表明在分叉不连续面两旁的功率流是守恒的，这正是用网络 M 等效分叉不连续面的基础。

如果我们关心的主要是区域 A 中的反射波，则可把多端网络连同 $z>0$ 的区域 B、C 等效为一个输入阻抗矩阵，并可求得区域 A 的反射系数矩阵，由此可从已知的入射波求出 A 区的$[V^{a}]$、$[I^{a}]$，再利用式(13.1.17)～(13.1.20)即可求得$[V^{b}]$、$[I^{b}]$、$[V^{c}]$、$[I^{c}]$。

如定义$[Z_{in}^{a}]$、$[Z_{in}^{b}]$、$[Z_{in}^{c}]$分别为 $z=0$ 平面处 A、B、C 区域向＋z 方向看过去的输入阻抗矩阵，则

$$[V^{a}(0^{-})]=[Z_{in}^{a}][I^{a}(0^{-})] \qquad (13.1.25)$$

$$[V^{b}(0^{+})]=[Z_{in}^{b}][I^{b}(0^{+})] \qquad (13.1.26)$$

$$[V^{c}(0^{+})]=[Z_{in}^{c}][I^{c}(0^{+})] \qquad (13.1.27)$$

$[Z_{in}^{b}]$、$[Z_{in}^{c}]$与传输线的终端负载有关。当传输线为无限长时，$[Z_{in}^{b}]$、$[Z_{in}^{c}]$简化为对角矩阵$[Z^{b}]$、$[Z^{c}]$，其对角线上的元素分别为 B、C 区域相应模式的特征阻抗。

我们再定义 $z=0$ 分叉不连续面处的电压反射系数矩阵$[\Gamma^{a}]$，及电流反射波、入射波列向量$[I^{r}]$、$[I^{i}]$，即

$$[I^{r}]=[I_1^{r},I_2^{r},\cdots]^{T}$$

$$[I^{i}]=[I_1^{i},I_2^{i},\cdots]^{T}$$

根据传输线理论可得

$$[I^{a}(0^{-})]=([1]-[\Gamma^{a}(0^{-})])[I^{i}] \tag{13.1.28}$$

$$[V^{a}(0^{-})]=[Z^{a}]([1]+[\Gamma^{a}(0^{-})])[I^{i}] \tag{13.1.29}$$

$[Z^{a}]$为 A 区的特征阻抗矩阵，是个对角矩阵，其对角线上的元素分别为相应模式的特征阻抗。

由式(13.1.25)、(13.1.28)、(13.1.29)可得

$$[\Gamma^{a}(0^{-})]=([Z^{a}]+[Z_{in}^{a}])^{-1}([Z_{in}^{a}]-[Z^{a}]) \tag{13.1.30}$$

而从式(13.1.25)～(13.1.27)以及式(13.1.18)、(13.1.20)、(13.1.21)可得

$$[Z_{in}^{a}(0^{-})]=[P]^{T}[Z_{in}^{b}(0^{+})][P]+[Q]^{T}[Z_{in}^{c}(0^{+})][Q] \tag{13.1.31}$$

当 B、C 区延伸至无穷远时，有

$$[Z_{in}^{b}(0^{+})]=[Z^{b}]$$

$$[Z_{in}^{c}(0^{+})]=[Z^{c}]$$

$$[Z_{in}^{a}(0^{-})]=[P]^{T}[Z^{b}][P]+[Q]^{T}[Z^{c}][Q] \tag{13.1.32}$$

式(13.1.30)、(13.1.32)是本节的最主要结果。很显然，当不计及模式间的耦合时，这两式就简化为通常熟知的标量反射系数和标量输入阻抗的表达式。求得 A 区的电压反射系数$[\Gamma^{a}]$后，可利用前面推导的式子，分别求得 A、B、C 区中的场量及 A 区中的反射功率和 B、C 区中的传输功率。

图 13-3 为数值计算结果。计算中我们取 $W_a=1.5\lambda$，$W_b=W_c=0.75\lambda$，λ 为自由空间波长，TE_{10}模从 A 区输入，其归一化功率为 1。当 TE_{10}导行波到达分叉不连续面 $z=0$ 处时，一部分被反射，另一部分透过 B、C 区继续传播。因 $W_b=W_c$，故 B、C 区通过的功率(P_{tb}、P_{tc})应相等且这些通过功率加上 A 区的反射功率总和 P_{ts}应等于入射功率 P_{in}。实际计算时，由于所取的模式不可能无限多，必须在某处切断，因此计算结果的准确度与所取的模式数有关，模式数取得越多，计算结果就越精确。

计算时 A 区所取的模式数 N_a 等于 B、C 区模式数 N_b，N_c 之和。计算结果表明，不管 $N_b=N_c$，还是 $N_b\neq N_c$，只要所取的模式数足够大，总的散射功率总是收敛到入射功率之值，并不出现相对收敛问题。当 $N_b=N_c=N_a/2>15$ 时，总的散射功率与入射功率之差将小于 10^{-5}。

如果波导 B 或 C 在 $z=z_1$ 处短路，$[Z_{in}^{b}]$、$[Z_{in}^{c}]$仍为对角矩阵，但在对角线上元素分别为 B、C 区域当 $z=z_1$ 处短路时的输入阻抗。

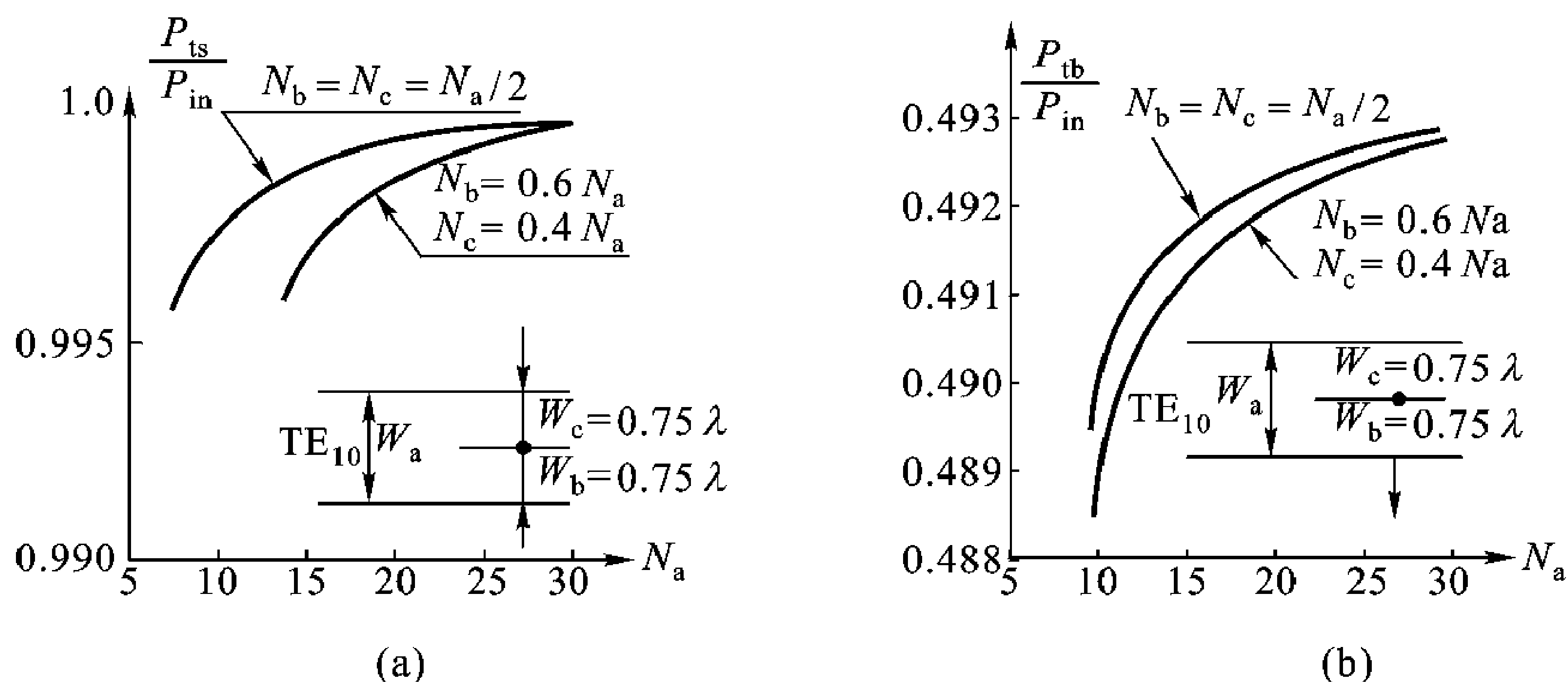


图 13－3　波导分叉不连续面总的散射功率与所取模式数关系

(a)　$P_{ts}/P_{in}\sim N$　(b)　$P_{tb}/P_{in}\sim N$

图 13－1 所示矩形波导分叉不连续，假定区域 B、C 被无限薄的完纯导电片分开，而实际上导电薄片都是为有限厚度的。如果把前面的分析模型推广一下，也可用于分析有限厚度导电片的情况。先把图 13－1 的二分叉模型推广到三分叉，如图 13－4 (a)，在 $z=0$ 分叉为 3 个矩形波导。如果第二个区域波导 C 在 $z=0$ 处短路，如图 13－4 (b)，波导 C 就是有限厚度导电片。如果波导 B、D 又在 $z=z_1$ 分叉为 E、F、G、H 4 个波导，如图 13－4 (c)，并使波导 F、G 在 $z=z_1$ 短路，即如图 13－4 (d)。所以将 13－1 的模型推广可以分析矩形波导中更复杂的不连续问题。

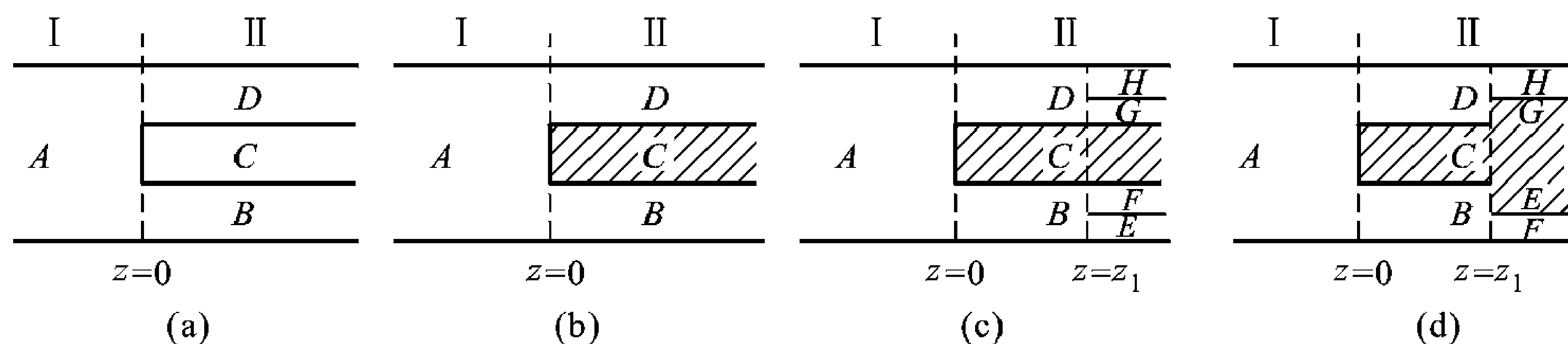


图 13－4　矩形波导分叉不连续模型的推广

(a)　三分叉矩形波导　(b)、(c)、(d)　分叉矩形波导的推广

13.2　条形介质波导的模式匹配分析

第 6 章我们已用 EDC 法近似分析过条形介质波导的色散关系。下面给出用模式匹配法严格分析条形介质波导的过程及结果。对此问题有兴趣的读者，可进一步参阅“波导系统的等效网络分析”(见本书最后参考文献)。

13.2.1　横向等效网络

图 13－5 (a)所示的条形介质波导可分为条形介质所在的内部区域Ⅰ与外

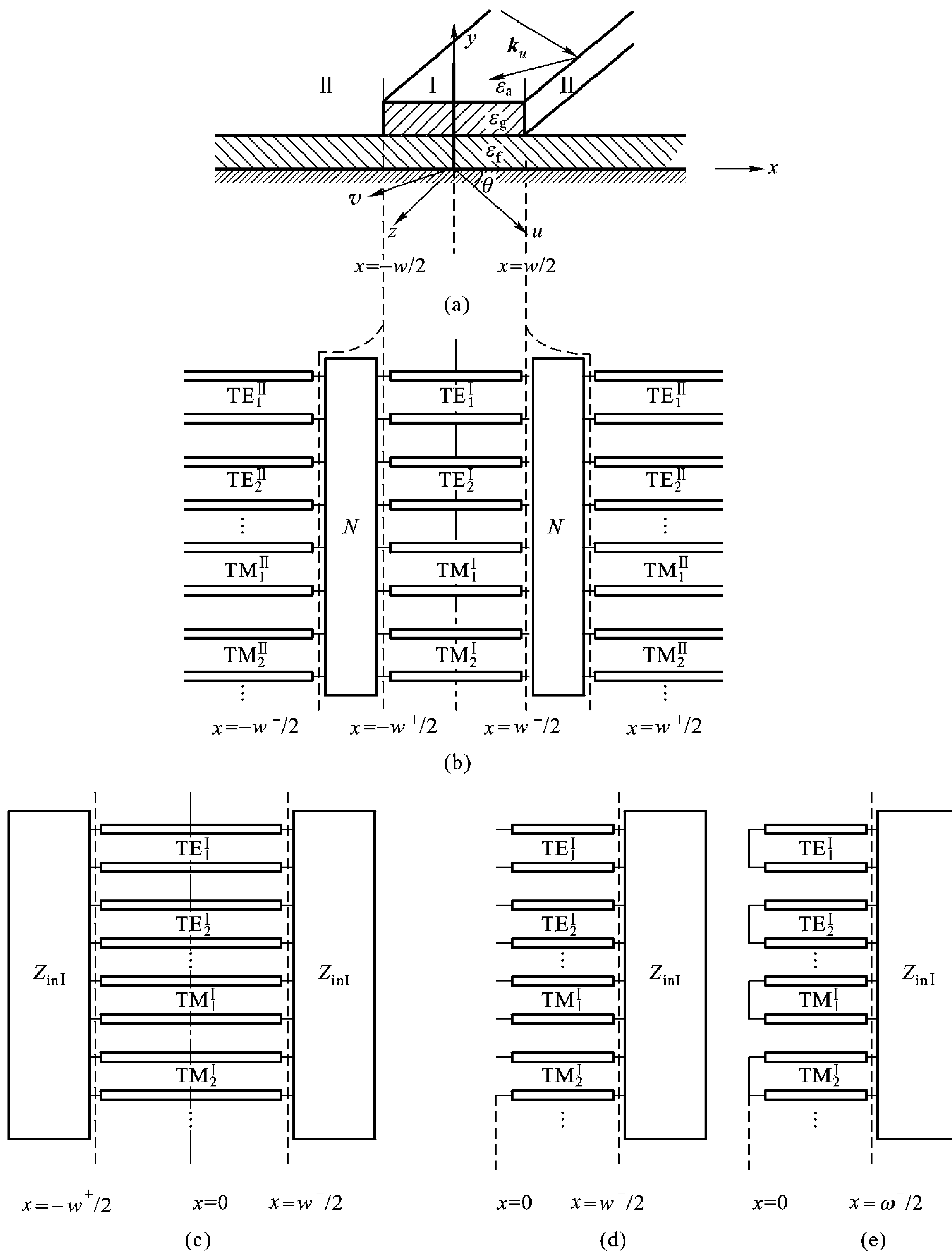


图 13－5　条形介质波导及其分析模型

(a) 条形介质波导　(b)、(c)、(d)、(e) 等效网络

部区域Ⅱ，内部区域、外部区域都可看成多层介质波导，条形介质波导中波传播的过程是：内部区域传播的以波矢 k_u 为特征的波倾斜投射到内外区域的交界面，产生全反射，如此限制在内部区域沿 z 轴传播。内部区域、外部区域 x 方向波的传播用传输线等效，内外区域交界面可用一网络表示，这样就得到图 13－5 (b)所示的横向等效网络。由于条形介质波导侧面不连续效应，单一的 TE、TM 模已不能满足侧面不连续的边界条件，因而 TE、TM 模必须同时考虑。因为外部区域趋于无穷远，在 $x=-\frac{w^-}{2}$，$\frac{w^+}{2}$处向 $-z$、$+z$ 方向看进去的输入阻抗就是外部区域的特征阻抗矩阵 $[Z_{\mathrm{II}}]$。由网络对两边电压、电流的变换关系可求出 $x=\frac{-w^+}{2}$，$x=\frac{w^-}{2}$处看进去的输入阻抗矩阵$\left[\overleftarrow{Z}_{\mathrm{inI}}\left(x=-\frac{w^+}{2}\right)\right]$，$\left[\vec{Z}_{\mathrm{inI}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right]$。上标箭头“←”表示向 $-x$ 方向看去的输入阻抗矩阵，“→”表示向 $+x$ 方向看去的输入阻抗。于是图13－5(b)又可简化为图13－5(c)。由于结构对称性(对称面 $x=0$)，如果对称面对于电压是波腹(电压偶对称)，相当于开路。如果对称面对于电压是波节(电压奇对称)，相当于短路。这样就得到图 13－5 (d)和(e)所示的两个等效电路。

图 13－5 (a)中同时标出两个坐标系，一个是结构坐标系(x，y，z)，另一个是本征坐标系(u，y，v)。在结构坐标系中，坐标等于常数的平面与条形介质结构的不连续面一致。在本征坐标系中，波矢 $\boldsymbol{k}$ 只有两个分量，$\boldsymbol{k}=k_u\boldsymbol{u}_0+k_y\boldsymbol{y}_0$，场在 v 方向没有变化。对于 TE 模场量只有 E_v、H_u、H_y 3 个分量，对于 TM 模场量只有 H_v、E_u、E_y 3 个分量。本征坐标系(u，y，v)绕 y 轴转过 θ 角即到结构坐标系(x，y，z)。

13.2.2　表示 y 方向场分布的模式函数φ（y）

前已指出条形介质波导内部区域、外部区域都可看成多层介质波导，见图 13－6 (a)。图中所用坐标系为本征坐标系(u，y，v)，坐标轴 y 与界面垂直，u 的方向与波矢 $\boldsymbol{k}_u$ 的方向一致，而 v 与 u、y 垂直。实际条形介质波导底部常用金属板支撑，上面有时加一个金属板屏蔽，只要上盖板离开介质波导覆盖层足够远，对波传播的影响可忽略，那么把所研究多层介质波导限制在两导电板之间并不失去分析的普遍性。如取与层状介质交界面垂直的 y 轴为纵向，则 y 方向相对介电系数分布可表示为

$$\varepsilon_{\mathrm{r}}(y)=\begin{cases}\varepsilon_{\mathrm{r1}} & (0<y<t_1)\\ \varepsilon_{\mathrm{r2}} & (t_1<y<t_2)\\ \cdots\cdots & \\ \varepsilon_{\mathrm{rn}} & (t_1+t_2\cdots+t_{n-1}<y<h)\end{cases}\tag{13.2.1}$$

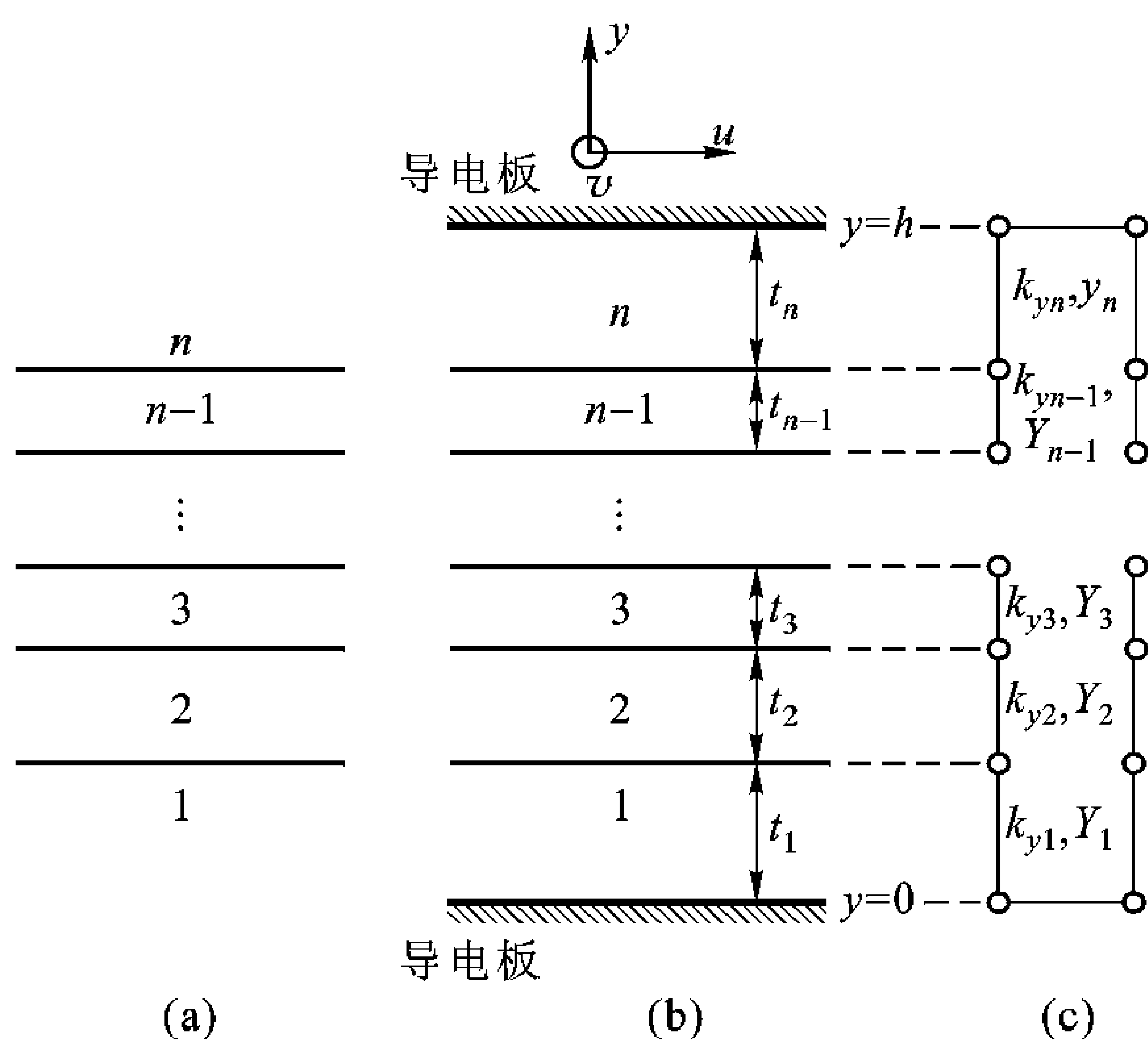


图 13－6　多层介质波导及其分析模型

(a) 多层介质波导　(b) 分析模型　(c) 等效网络

式中 ε_{ri}为第 i 层介质的相对介电系数，t_i 为第 i 层介质的厚度。在(u, y, v)本征坐标系下波矢 $\boldsymbol{k}$ 只有两个分量，$\boldsymbol{k}=k_u\boldsymbol{u}_0+k_y\boldsymbol{y}_0$，$k_v=0$，$v$ 方向场没有变化。y 方向传输线模型如图 13－6 (c)，为 n 段不同特征参数的传输线的级连。对应于 n 层介质的 n 个传输线方程可合并写成一个方程

$$\frac{\mathrm{d}V(y)}{\mathrm{d}y}=-\mathrm{j}k_yZ_yI(y) \tag{13.2.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}I(y)}{\mathrm{d}y}=-\mathrm{j}k_yY_yV(y) \tag{13.2.3}$$

式中

$$Z_y=\frac{1}{Y_y}=\begin{cases}\omega\mu/k_y & \text{(TE 模)}\\ k_y/(\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(y)) & \text{(TM 模)}\end{cases} \tag{13.2.4}$$

$$k_y^2=k_0^2\varepsilon_r(y)-k_u^2 \tag{13.2.5}$$

耦合的一阶微分方程(13.2.2)、(13.2.3)还可合并写成一个二阶微分方程。对于 TE 模，将式(13.2.2)再微分一次，并将式(13.2.3)、(13.2.4)、(13.2.5)代入，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2V'(y)}{\mathrm{d}y^2}+k_0^2\varepsilon_r(y)V'(y)=k'^2_uV'(y) \tag{13.2.6}$$

对于 TM 模，将式(13.2.3)写成

$$\frac{1}{\varepsilon_r(y)}\frac{\mathrm{d}I''(y)}{\mathrm{d}y}=-\mathrm{j}\omega\varepsilon_0V''(y)$$

对 y 再微分一次，再将式(13.2.2)、(13.2.4)、(13.2.5)代入，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}(y)}\frac{\mathrm{d}I''(y)}{\mathrm{d}y}\right]+k_0^2 I''(y)=k_u''^2\frac{1}{\varepsilon_{\mathrm{r}}(y)}I''(y) \tag{13.2.7}$$

上标一撇、二撇分别表示属于TE、TM模的量。

式(13.2.6)和(13.2.7)又可写成统一的形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}p(y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(y)+q(y)\varphi(y)=\lambda w(y)\varphi(y) \tag{13.2.8}$$

式中

$$\varphi(y)=\begin{cases}V'(y) & (\text{TE 模})\\ I''(y) & (\text{TM 模})\end{cases} \tag{13.2.9}$$

$$p(y)=w(y)=\begin{cases}1 & (\text{TE 模})\\ 1/\varepsilon_{\mathrm{r}}(y) & (\text{TM 模})\end{cases} \tag{13.2.10}$$

$$q(y)=\begin{cases}k_0^2\varepsilon_{\mathrm{r}}(y) & (\text{TE 模})\\ k_0^2 & (\text{TM 模})\end{cases} \tag{13.2.11}$$

$$\lambda=\begin{cases}k_u'^2 & (\text{TE 模})\\ k_u''^2 & (\text{TM 模})\end{cases} \tag{13.2.12}$$

根据 $y=0$，h 上下导电板上电场切向分量 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}$ 等于零或磁场切向分量 $\frac{\partial \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}}{\partial y}=0$ 这两个边界条件，式(13.2.8)的边界条件为

$$\varphi(0)=\varphi(h)=0 \qquad (\text{TE 模}) \tag{13.2.13}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=\left.\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=h}=0 \qquad (\text{TM 模}) \tag{13.2.14}$$

式(13.2.8)就是决定 y 方向场分布的方程，这是熟知的斯特姆－刘维叶微分方程。本征值 λ 由边界条件确定，对于由两导电板限制的多层介质波导，本征值 λ 构成分立谱，即 $\lambda=\lambda_1$，λ_2，…，λ_n，…，相应的本征函数 $\varphi_1(y)$，$\varphi_2(y)$，…，$\varphi_n(y)$，…，就是我们要求的模式函数。可以证明本征值 λ_i 及模式函数 $\varphi_i(y)$ 具有如下两个性质：

性质(1)：如果 $\varepsilon_{\mathrm{r}}(y)$ 是实数，本征值 λ_i 也是实数；

性质(2)：模式函数具有正交性

$$\langle\varphi_m(y)\,|\,w(y)\,|\,\varphi_n(y)\rangle=\int_0^h w(y)\varphi_m(y)\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y=\delta_{mn} \tag{13.2.15}$$

δ_{mn} 是 delta 函数，其值为

$$\delta_{mn}=\begin{cases}0 & m\neq n\\ 1 & m=n\end{cases}$$

式(13.2.15)对于 TE、TM 模都是适用的，表示相同极化模式的场(TE 或 TM)模式函数之间的正交关系。

对于不同极化模式的场，它们之间也有类似关系

$$
\begin{aligned}
&(k''_{un})^2 \left\langle \varphi''_n \left| \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \right| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi'_m \right\rangle + (k'^2_{un}) \left\langle \varphi'_m \left| \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \right| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi^n_n \right\rangle \\
&\quad = (k''^2_{un})\int_0^h \left[\varphi''_n(y) \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi'_m(y) \right] \mathrm{d}y + (k'^2_{un}) \int_0^h \left[\varphi'_m(y) \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi''_n(y) \right] \mathrm{d}y \\
&\quad = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi''_n \frac{1}{\varepsilon_r(y)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi'_m \right]_0^h + k_0^2 \varphi''_n \varphi'_m \Big|_0^h = 0
\end{aligned}
\tag{13.2.16}
$$

式(13.2.16)将保证交界面两旁功率流守恒。

13.2.3 *x* 方向等效传输线模型

条形介质波导内、外区域的场在图 13-6 所示本征坐标系(u, y, v)下只有 3 个场量，由于模式函数 $\varphi_n(y)$的正交性，它们可用模式函数 $\varphi_n(y)$展开，见表 13-1。

表 13-1 本征坐标系下场量表达式

TE 模	TM 模
$E'_v = -\sum\limits_m \varphi'_n(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'_{un}u}$	$H''_v = \sum\limits_n \varphi''_n(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k''_{un}u}$
$H'_y = \sum\limits_n \frac{k'_{un}}{\omega\mu}\varphi'_n(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'_{un}u}$	$E''_y = \sum\limits_n \frac{k''_{un}}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(y)}\varphi''_n(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k''_{un}u}$
$H'_u = \sum\limits_n \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi'_n(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'_{un}u}$	$E''_u = \sum\limits_n \frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(y)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi''_n(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k''_{un}u}$

定义坐标等于常数的平面与条形介质波导不连续面一致的坐标系(x, y, z)叫结构坐标系，如图 13-5 中坐标系，在结构坐标系中波矢 $\boldsymbol{k}$ 有 3 个分量，TE、TM 各有 5 个场量。而在前面讨论的本征坐标(u, y, v)中，$\boldsymbol{k}$ 只有两个分量，TE、TM 场各有 3 个分量。结构坐标系与本征坐标系关系见图 13-7。

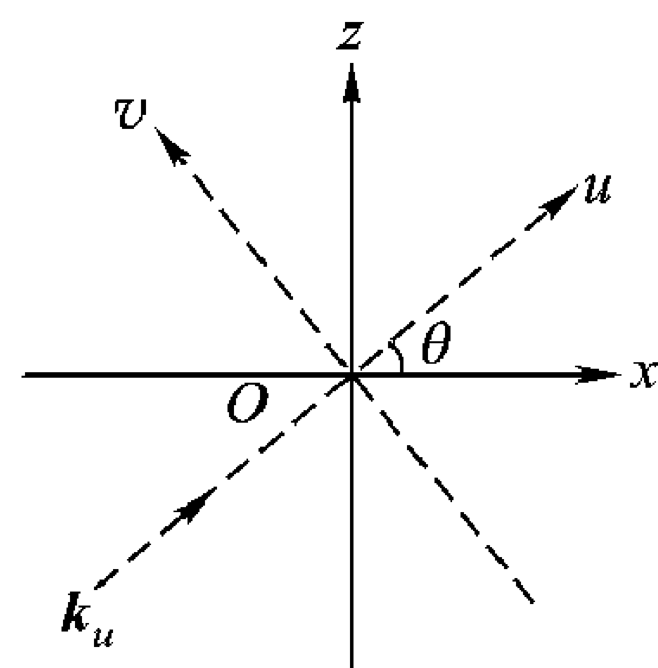


图 13-7 多层介质波导坐标变换关系

本征坐标系绕 y 轴旋转 θ 角即变换到(x, y, z)结构坐标系。利用坐标变换关系

$$u = x\cos\theta + z\sin\theta \tag{13.2.17}$$

$$v = -x\sin\theta + z\cos\theta \tag{13.2.18}$$

可以得出结构坐标系下场量表达式，对于 TE 模，其电场的变换关系为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}'_n &= E'_{vn}\boldsymbol{v}_0 = -\boldsymbol{v}_0\varphi'_n(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'_{un}u}\\ &= -(-\boldsymbol{x}_0\sin\theta'_n + \boldsymbol{z}_0\cos\theta'_n)\varphi'_n(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'_{un}(x\cos\theta'_n + z\sin\theta'_n)}\\ &= \boldsymbol{x}_0E'_{xn}(x,y,z) + \boldsymbol{z}_0E'_{zn}(x,y,z)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}E'_{xn} &= \sin\theta'_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'_{xn}x}\varphi'_n(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'_{zn}z}\\ E'_{zn} &= -\cos\theta'_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'_{xn}x}\varphi'_n(y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'_{zn}z}\\ k'_{xn} &= k'_{un}\cos\theta'_n\\ k'_{zn} &= k'_{un}\sin\theta'_n\end{aligned}$$

对于其他场量也可进行同样的变换。由于 x 方向不均匀，必须考虑 x 方向反射波，其结果列于表 13 – 2。

表 13 – 2　结构坐标系中场量(用 V、I 表示)

TE_y	TM_y
$E'_x = -\sum\limits_n \frac{\omega\mu}{k'_{un}}\sin\theta'_n I'_n(x)\varphi'_n(y)$	$E''_x = \sum\limits_n \frac{1}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r(y)} I''_n(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi''_n(y)$
$E'_y = 0$	$E''_y = \sum \mathrm{j}V''_n(x)\varphi''_n(y)\frac{1}{\varepsilon_r(y)}$
$E'_z = \sum\limits_n V'_n(x)\varphi'_n(y)$	$E''_z = \sum\limits_n \frac{1}{k''_{un}}\sin\theta''_n V''_n(x)\frac{1}{\varepsilon_r(y)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi''_n(y)$
$H'_x = \sum \mathrm{j}\frac{1}{\omega\mu}V'_n(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi'_n(y)$	$H''_x = \sum\limits_n -\mathrm{j}\frac{\omega\varepsilon_0}{k''_{un}}\sin\theta''_n V''_n(x)\varphi''_n(y)$
$H'_y = \sum\limits_n -I'_n(x)\varphi'_n(y)$	$H''_y = 0$
$H'_z = \sum\limits_n \mathrm{j}\frac{1}{k'_{un}}\sin\theta'_n I'_n(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi'_n(y)$	$H''_z = \sum \mathrm{j}I''_n(x)\varphi''_n(y)$

表 13 – 2 中 $\boldsymbol{k}_u = k_x\boldsymbol{x}_0 + k_z\boldsymbol{z}_0$，$\theta$ 为 $\boldsymbol{k}_u$ 与 x 轴之间夹角，即从本征坐标系(u, y, v)到结构坐标系(x, y, z)绕 y 轴旋转的角度。电压 $V_n(x)$、电流 $I_n(x)$的定义是

$$V'_n(x) = -\cos\theta'_n(a'_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'_{xn}x} + b'_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}k'_{xn}x}) \tag{13.2.19a}$$

$$I'_n(x) = -\frac{k'_{un}}{\omega\mu}(a'_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k'_{xn}x} - b'_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}k'_{xn}x}) \tag{13.2.19b}$$

$$V''_n(x) = \frac{k''_{un}}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}(a''_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k''_{xn}x} + b''_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}k''_{xn}x}) \tag{13.2.20a}$$

$$I''_n(x) = -\mathrm{j}\cos\theta''_n(a''_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k''_{xn}x} - b''_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}k''_{xn}x}) \tag{13.2.20b}$$

它们满足传输线方程

$$\frac{\mathrm{d}V_n(x)}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{j}k_{xn}Z_{xn}I_n(x) \tag{13.2.21a}$$

$$\frac{\mathrm{d}I_n(x)}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{j}k_{xn}Y_{xn}V_n(x) \tag{13.2.21b}$$

式中 k_{xn}是x方向第n次模传播常数。Z_{xn}、Y_{xn}是x方向第n次模等效传输线的特征阻抗或特征导纳，且

$$Z_{xn} = \frac{1}{Y_{xn}} = \begin{cases} \dfrac{\omega\mu k'_{xn}}{(k'_{un})^2} & \text{(TE 模)} \\ \dfrac{(k''_{un})^2}{\omega\varepsilon_0 k''_{xn}} & \text{(TM 模)} \end{cases} \tag{13.2.22}$$

因此多层介质波导中场量在结构坐标系中用 TE_y、TM_y(下标 y 表示以 y 为纵向)模分开后，就 x 方向波的传播而言，每个模式可用传输线等效。

13.2.4　内外区域交界面的横向等效网络表示

根据表 13-2 给出的场量表达式，在内外区域交界面(以 $x = w/2$ 为例)切向场量(E_y, E_z, H_y, H_z)连续，可得

$$E_{y\,\mathrm{I}}(x = w/2) = E_{y\,\mathrm{II}}(x = w/2) \tag{13.2.23a}$$

$$E_{z\,\mathrm{I}}(x = w/2) = E_{z\,\mathrm{II}}(x = w/2) \tag{13.2.23b}$$

$$H_{y\,\mathrm{I}}(x = w/2) = H_{y\,\mathrm{II}}(x = w/2) \tag{13.2.23c}$$

$$H_{z\,\mathrm{I}}(x = w/2) = H_{z\,\mathrm{II}}(x = w/2) \tag{13.2.23d}$$

下标Ⅰ、Ⅱ表示属于区域Ⅰ、Ⅱ中的量，余下同。利用模式函数正交性式(13.2.15)、(13.2.16)可得到交界面两旁电压、电流(或横向电场与磁场场量)之间变换关系

$$[V_{\mathrm{I}}] = [T_v][V_{\mathrm{II}}] \tag{13.2.24a}$$

$$[I_{\mathrm{I}}] = [T_i][I_{\mathrm{II}}] \tag{13.2.24b}$$

式中$[V]$、$[I]$为电压、电流向量，且

$$[V] = [V'_1, V'_2, \cdots, V'_n, \cdots; V''_1, V''_2, \cdots, V''_n, \cdots]^{\mathrm{T}}$$

$$[I] = [I'_1, I'_2, \cdots, I'_n, \cdots; I''_1, I''_2, \cdots, I''_n, \cdots]^{\mathrm{T}}$$

矩阵$[T_v]$、$[T_i]$表示交界面两旁电压、电流的变换关系，可表示为

$$[T_v] = \begin{bmatrix} [Q'] & ([S''] - [R''][P'']) \\ 0 & [P''] \end{bmatrix} \tag{13.2.25}$$

$$[T_i] = \begin{bmatrix} [P'] & 0 \\ ([S'] - [R'][P']) & [Q''] \end{bmatrix} \tag{13.2.26}$$

$[P]$，$[Q]$，$[R]$，$[S]$是子矩阵，其矩阵元素分别为

$$P''_{mn} = \int_0^h \varphi''_{\mathrm{I}\,m}(y)\frac{1}{\varepsilon_{r\,\mathrm{II}}(y)}\varphi''_{\mathrm{II}\,n}(y)\,\mathrm{d}y \tag{13.2.27a}$$

$$R''_{mn} = \int_0^h \varphi'_{\mathrm{I}\,m}(y)\,\psi''_{\mathrm{I}\,n}(y)\,\mathrm{d}y \tag{13.2.27b}$$

$$Q'_{mn} = P'_{mn} = \int_0^h \varphi'_{\mathrm{I}\,m}(y)\,\varphi'_{\mathrm{II}\,n}(y)\,\mathrm{d}y \tag{13.2.27c}$$

$$S''_{mn} = \int_0^h \varphi'_{\mathrm{I}\,m}(y)\,\psi''_{\mathrm{II}\,n}(y)\,\mathrm{d}y \tag{13.2.27d}$$

$$R'_{mn} = \int_0^h \varphi''_{\mathrm{I}\,m}(y)\,\psi'_{\mathrm{I}\,n}(y)\,\mathrm{d}y \tag{13.2.27e}$$

$$S'_{mn} = \int_0^h \varphi''_{\mathrm{I}\,m}(y)\,\psi'_{\mathrm{II}\,n}(y)\,\mathrm{d}y \tag{13.2.27f}$$

$$Q''_{mn} = \int_0^h \varphi''_{\mathrm{I}\,m}(y)\,\varphi''_{\mathrm{II}\,n}(y)\,\mathrm{d}y \tag{13.2.27g}$$

式中

$$\psi'_n(y) = \frac{1}{k'_{un}}\sin\theta'_n\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi'_n(y) \tag{13.2.28}$$

$$\psi''_n(y) = \frac{1}{k''_{un}}\sin\theta''_n\,\frac{1}{\varepsilon_r(y)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi''_n(y) \tag{13.2.29}$$

利用模式函数的性质可以证明交界不连续面两边坡印廷功率流相等，即

$$[I_{\mathrm{I}}]^+[V_{\mathrm{I}}] = [I_{\mathrm{II}}]^+[V_{\mathrm{II}}] \tag{13.2.30}$$

式中右上角“+”表示矩阵转置再取复共轭。

定义交界面两边输入阻抗矩阵$[Z_{\mathrm{in}}]$或输入导纳矩阵$[Y_{\mathrm{in}}]$为

$$\left[V_{\mathrm{I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right] = [Z_{\mathrm{in\,I}}]\left[I_{\mathrm{I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right] \tag{13.2.31a}$$

$$\left[I_{\mathrm{I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right] = [Y_{\mathrm{in\,I}}]\left[V_{\mathrm{I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right] \tag{13.2.31b}$$

$$\left[V_{\mathrm{II}}\left(x=\frac{w^+}{2}\right)\right] = [Z_{\mathrm{in\,II}}]\left[I_{\mathrm{II}}\left(x=\frac{w^+}{2}\right)\right] \tag{13.2.32a}$$

$$\left[I_{\mathrm{II}}\left(x=\frac{w^+}{2}\right)\right] = [Y_{\mathrm{in\,II}}]\left[V_{\mathrm{II}}\left(x=\frac{w^+}{2}\right)\right] \tag{13.2.32b}$$

再定义反射系数矩阵$[\Gamma]$为

$$\left[V^{\mathrm{r}}_{\mathrm{I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right] = [\Gamma]\left[V^{\mathrm{i}}_{\mathrm{I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right] \tag{13.2.33}$$

$[V^{\mathrm{i}}_{\mathrm{I}}]$、$[V^{\mathrm{r}}_{\mathrm{I}}]$分别为入射波、反射波电压向量。那么交界面 $x = w^-/2$ 处电压、电流向量为

$$\left[V'_{\mathrm{I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right] = [[1]+[\Gamma]][V^{\mathrm{i}}_{\mathrm{I}}] \tag{13.2.34a}$$

$$\left[I_{\mathrm{I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right] = [[1]-[\Gamma]][I^{\mathrm{i}}_{\mathrm{I}}] \tag{13.2.34b}$$

根据上面的定义式(13.2.31)～(13.2.34)及变换关系式(13.2.24)可进一步得到交界面两旁阻抗变换关系

$$[Z_{\text{in I}}(w^-/2)] = [T_v][Z_{\text{in II}}(w^+/2)][T_i]^{-1} \qquad (13.2.35)$$

式中$[Z_{\text{in I}}(w^-/2)]$是从区域Ⅰ中 $x=\dfrac{w^-}{2}$处向 $+x$ 方向看去的输入阻抗。区域Ⅰ中 $x=\dfrac{w^-}{2}$处的反射系数矩阵

$$\Gamma\left(x=\frac{w^-}{2}\right) = ([Z_{\text{in I}}(w^-/2)] + [Z_{\text{I}}])^{-1}([Z_{\text{in I}}(w^-/2)] - [Z_{\text{I}}]) \qquad (13.2.36)$$

$[Z_{\text{I}}]$为特征阻抗矩阵，它是一个对角矩阵，矩阵对角线上第 i 个元素为区域Ⅰ第 i 模的特征阻抗 $Z_{\text{I}i}$。同样可得到从 $x=-w^+/2$ 处向 $-x$ 方向看去的输入阻抗矩阵$[Z_{\text{in I}}(-w^+/2)]$以及反射系数矩阵 $\Gamma(x=-w^+/2)$。

13.2.5 横向谐振与色散方程

取 $x=w^-/2$ 为参考面，横向谐振要求

$$\det\left[\overleftarrow{Z}_{\text{in I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)+\overrightarrow{Z}_{\text{in I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right]=0 \qquad (13.2.37)$$

上标“←”表示向 $-x$ 方向看去的输入阻抗矩阵，“→”表示向 $+x$ 方向看去的输入阻抗矩阵。其中

$$\left[\overleftarrow{Z}_{\text{in I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right]=\begin{bmatrix}\left[\overleftarrow{Z}'_{\text{in I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right] & 0\\ 0 & \overleftarrow{Z}''_{\text{in I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\end{bmatrix}$$

$\left[\overleftarrow{Z}'_{\text{in I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right]$、$\left[\overleftarrow{Z}''_{\text{in I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right]$为对角矩阵，对角线上第 n 个元素为

$$\left[\overleftarrow{Z}'_{\text{in I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right]_n=\begin{cases}\mathrm{j}Z'_{\text{I}n}\tan k'_{xn}\dfrac{w}{2} & (\text{对称面短路})\\ -\mathrm{j}Z'_{\text{I}n}\cot k'_{xn}\dfrac{w}{2} & (\text{对称面开路})\end{cases}$$

$$\left[\overleftarrow{Z}''_{\text{in I}}\left(x=\frac{w^-}{2}\right)\right]_n=\begin{cases}\mathrm{j}Z''_{\text{I}n}\tan k''_{xn}\dfrac{w}{2} & (\text{对称面短路})\\ -\mathrm{j}Z''_{\text{I}n}\cot k''_{xn}\dfrac{w}{2} & (\text{对称面开路})\end{cases}$$

式(13.2.37)就是条形介质波导的色散关系，只能得到数值解。进行数值解时，如果 ω 给定，则改变波矢 $\boldsymbol{k}_u$的方向，即 θ 角使式(13.2.37)得到满足，如果给定 θ，则改变 ω 使式(13.2.37)得到满足。

图 13－8 给出了毫米波介质波导色散特性的数值计算结果。该介质波导的尺寸也示于图中。为了比较，图中同时给出了 EDC 法的计算结果。对两者比较可知，远离截止频率时差别很小，接近截止频率时差别明显，但不大。故

EDC 法是一种很好的近似方法。

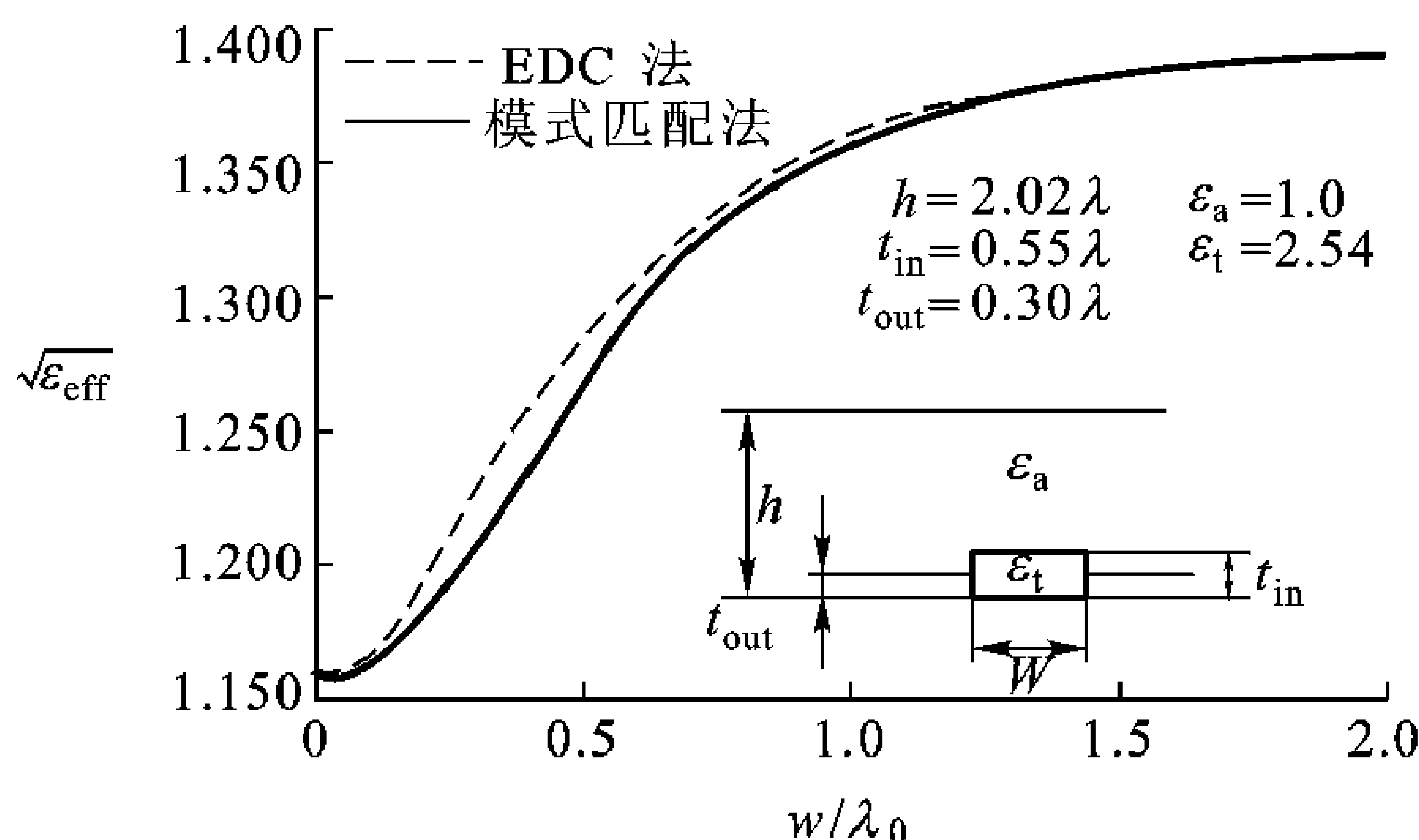


图 13－8　毫米波介质波导色散特性

可以证明条形介质波导侧面不连续效应忽略时式(13.2.37)就简化到 EDC 法。

13.3　微带线的谱域分析

第 2 章中对微带线的讨论将微带线看成是平行板波导的变形。平行板波导属平行双导体传输系统，可工作于 TEM 模。实际上由于介质填充的不均匀，微带线不支持纯 TEM 模。因此对微带线进行严格分析时，TE、TM 模必须同时考虑。本节介绍的谱域法是一种较为成功的微带线的数值分析方法。谱域分析的要点是将场按空间傅里叶展开，相当于用模式函数展开，然后在谱域中进行分析。所以谱域法与模式匹配法本质上没有什么大的差别。

13.3.1　微带线工作于混合模

参看图 13－9，在微带线的介质与空气交界面电场切向分量连续，即

$$E_x^d = E_x^a \qquad (13.3.1)$$

上标 d 和 a 分别表示介质和空气中的量。应用麦克斯韦方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}$$

介质分界面 E_x 分量连续也可表示成

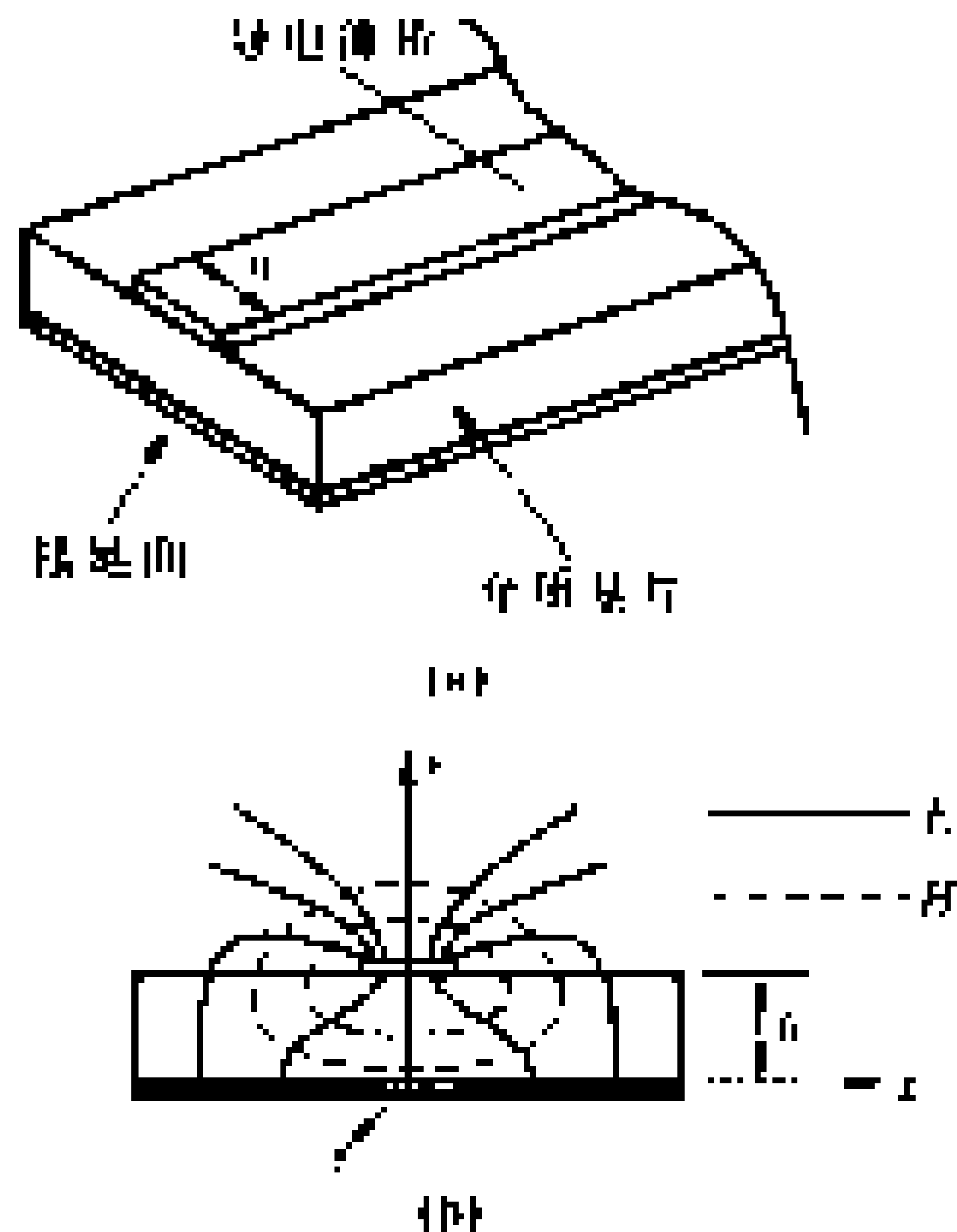


图 13－9　微带线及其场分布
(a) 微带线结构　(b) 场分布

$$(\nabla \times \boldsymbol{H})_x^{\mathrm{d}} = \varepsilon_{\mathrm{r}} (\nabla \times \boldsymbol{H})_x^{\mathrm{a}} \tag{13.3.2}$$

ε_r为介质的相对介电系数，将式(13.3.2)展开并应用介质和空气分界面磁场法向分量连续条件，当相对磁导率 $\mu_r=1$ 时得到

$$\varepsilon_{\mathrm{r}}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)^{\mathrm{a}} - \left(\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)^{\mathrm{d}} = (\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1)\frac{\partial H_y}{\partial z} \tag{13.3.3}$$

因为 $\varepsilon_r \neq 1$，$H_y \neq 0$，所以式(13.3.3)左边为非零量。这只有当 $H_z \neq 0$ 时才能满足。所以实际结构的微带线由于介质填充的不均匀，磁场的纵向分量必定存在。总之，由于介质与空气交界面导带附近边缘场 E_x、H_x 分量的存在使得微带线不可能工作于纯 TEM 模，即微带线工作于混合模(非 TEM 模)。对微带线的分析，TE、TM 模必须同时考虑。第 2 章给出的微带线特征参数(主要是传播常数) k_z (ω)与等效阻抗 Z_e的修正公式都是基于微带线工作在混合模情况下通过数值模拟得到的。

13.3.2　分析模型及场量的积分方程表达式

图 13 - 9 所示微带线现用图 13 - 10 的分析模型代替。该分析模型与图 13 - 9微带线的差别主要有两点：一是用无限薄的完纯导电片代替有限厚度、有限电导率的导电薄带，二是 x 方向也可以为导电壁屏蔽。如果导电薄带的电导率非常大，其厚度与波长相比非常小，将导电薄带视作无限薄的完纯导电片是可以接受的。x 方向为导电壁屏蔽的条件并不是必要的，如果将场沿 x 方向按傅里叶积分展开，而不是傅里叶级数展开。在图 13 - 10 的分析模型中，导电薄片与接地板之间有两层介质，导电薄片上又有覆盖层。导电片两旁都视为多层介质结构更接近集成电路中微带线的应用情况。图 13 - 10 (a)同时标两

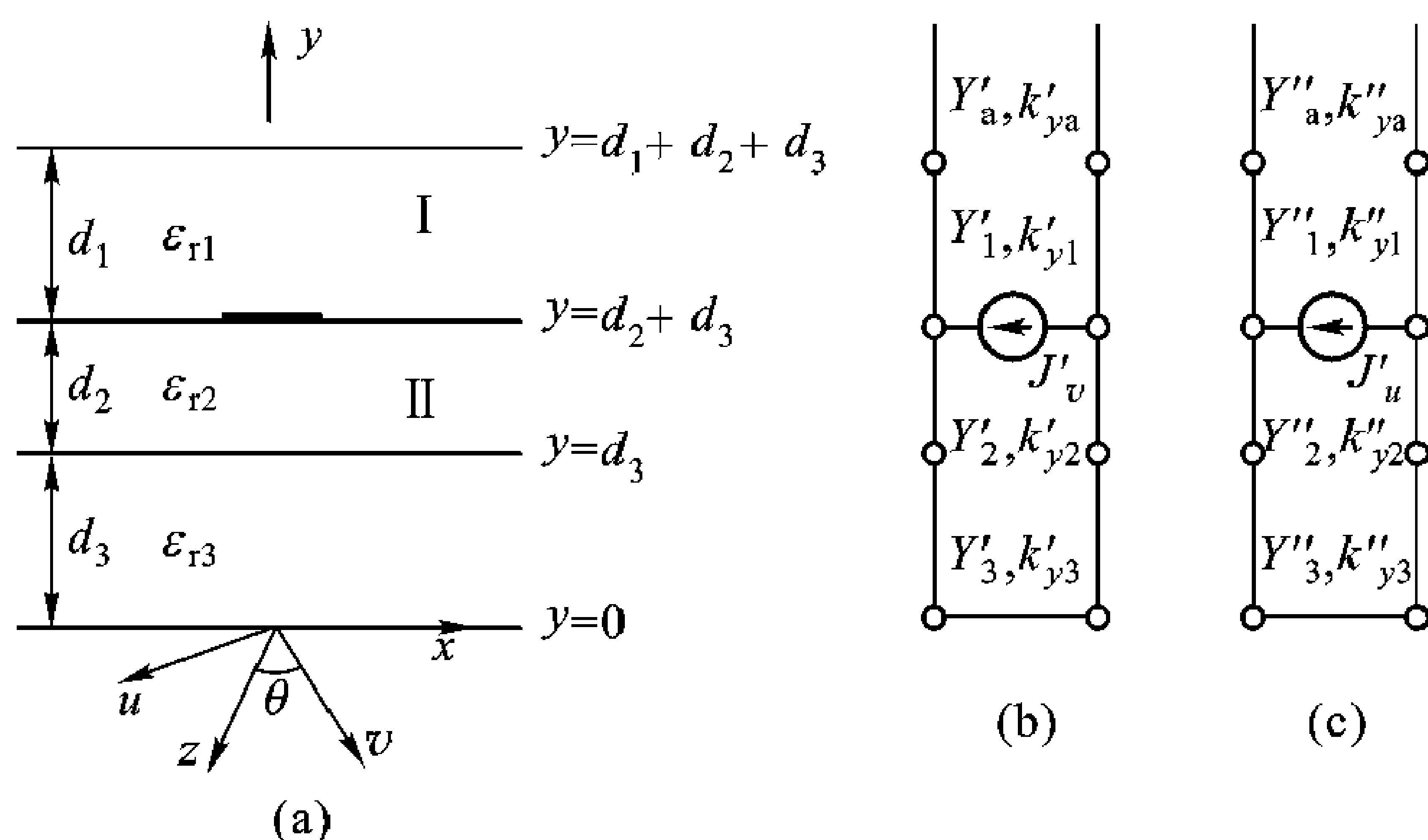


图 13 - 10　微带线的具体分析模型及其等效网络

(a) 微带线分析模型　(b)、(c) 等效网络

个坐标系，即结构坐标系(x,y,z)与本征坐标系(u,v,y)。本征坐标系绕 y 轴逆时针转过$(90°-\theta)$就到结构坐标系。在结构坐标系中波矢 $\boldsymbol{k}=k_u\boldsymbol{u}_0+k_y\boldsymbol{y}_0$，对于 TE、TM 模场量各只有 3 个分量。

为便于分析，将微带线以导电薄片为界分为两个区域。夹在导电薄片和金属基板间的区域以罗马数字Ⅱ标记，该区域介质有两层，其相对介电系数分别为 ε_{r2}，ε_{r3}，厚度分别为 d_2，d_3。导电薄片上面的区域用罗马数字Ⅰ标记。导电片上面的覆盖层，相对介电系数为 ε_{r1}，厚度为 d_1。覆盖层上面就是空气，覆盖层本身有时就是空气。

夹在区域Ⅰ、Ⅱ之间的导电薄片可看作场的二次激励源，这是有物理根据的。当电磁波沿微带线传播时，导电薄片附近的交变磁场将在导电薄片表面感应起高频电流，这个高频电流又激励起高频电磁场。为了跟初始激励源相区别故称为二次激励源。

区域Ⅰ与Ⅱ都可视为多层介质，根据多层平板介质的传输线模型，如果知道了导电薄片所在平面(或源所在平面)场量关系，多层介质中场量关系均可由此得出。所以微带线的分析归结为求导电薄片所在平面切向电场与表面电流(由切向磁场决定)的关系。

如果微带线的填充介质都是线性的，我们分析的微带线就是线性系统。根据线性系统的叠加原理，如果知道点源激励的场，任何源激励的场都可由点源激励场的线性组合得到，因为任何复杂的源可分解为点源的组合。研究天线问题时我们已得到过这种关系。如果定义点源产生的场叫格林函数，并考虑到空间不变性，那么微带线中作为二次激励源的导电薄片激励的场可表示为

$$E_z(x,y,z)=-\int\left[Z_{zz}(x-x',z-z',y)J_z(x',z',y)+Z_{zx}(x-x',z-z',y)J_x(x',z',y)\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}z' \tag{13.3.4}$$

$$E_x(x,y,z)=-\int\left[Z_{xz}(x-x',z-z',y)J_z(x',z',y)+Z_{xx}(x-x',z-z',y)J_x(x',z',y)\right]\mathrm{d}x'\mathrm{d}z' \tag{13.3.5}$$

式中 E_z、E_x 分别为导电薄片所在平面电场切向分量的 z、x 分量，J_z、J_x 分别为导电薄片所在平面电流的 z、x 分量，Z_{zz}、Z_{zx}、Z_{xz}、Z_{xx}是格林函数的 4 个分量，Z_{zz}表示点源的 z 分量激励时产生的 z 分量的电场，Z_{zx}表示点源的 x 分量激励时产生的 z 分量的电场。Z_{xz}、Z_{xx}也可作类似解释。坐标(x,y,z)为所研究空间场量的坐标，(x',y',z')为二次电流源所在的坐标，导电片所在平面，$y=d_2+d_3$。如果所讨论的微带线沿 z 方向趋于无穷，所有场分量沿 z 轴取 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$形式的解，则式(13.3.4)、(13.3.5)简化为

$$E_z(x,y) = -\int [Z_{zz}(x-x',y)J_z(x',y) + Z_{zx}(x-x',y)J_x(x',y)]\,\mathrm{d}x' \tag{13.3.6}$$

$$E_x(x,y) = -\int [Z_{xz}(x-x',y)J_z(x',y) + Z_{xx}(x-x',y)J_x(x',y)]\,\mathrm{d}x' \tag{13.3.7}$$

注意，式(13.3.4)~(13.3.7)表示的二次源激励的场正是二次源与格林函数 $\bar{\bar{Z}}$ (其分量为 Z_{zz}、Z_{zx}、Z_{xz}、Z_{xx})的卷积。

式(13.3.4)~(13.3.7)中源 J_z、J_x 是待求场 E_z、E_x 的函数，它们在积分号内，故称为积分方程。

根据信号分析中的卷积定理，在 $y=d_2+d_3$ 平面对式(13.3.6)、(13.3.7)进行傅里叶变换得到

$$\begin{aligned}\tilde{E}_z(k_x,d_2+d_3) &= -\tilde{Z}_{zz}(k_x,d_2+d_3)\tilde{J}_z(k_x,d_2+d_3)\\ &\quad -\tilde{Z}_{zx}(k_x,d_2+d_3)\tilde{J}_x(k_x,d_2+d_3)\end{aligned} \tag{13.3.8}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_x(k_x,d_2+d_3) &= -\tilde{Z}_{xz}(k_x,d_2+d_3)\tilde{J}_z(k_x,d_2+d_3)\\ &\quad -\tilde{Z}_{xx}(k_x,d_2+d_3)\tilde{J}_x(k_x,d_2+d_3)\end{aligned} \tag{13.3.9}$$

式中所有量上面的“~”表示相应量按 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x x}$展开的傅里叶变换，根据傅里叶变换的定义有

$$\tilde{\varphi}(k_x) = \int \varphi(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_x x}\mathrm{d}x \tag{13.3.10}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{\varphi}(k_x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x}\mathrm{d}k_x \tag{13.3.11}$$

式(13.3.8)、(13.3.9)表明，在傅里叶变换域(以后称为谱域)中，导电薄片所在平面场量间关系为一组代数方程描述，而不是复杂的积分方程(13.3.6)、(13.3.7)描述，这给微带线问题的分析带来极大的方便。

至此，微带线问题归结为求谱域格林函数 $\tilde{Z}_{zz}$，$\tilde{Z}_{zx}$，$\tilde{Z}_{xz}$，$\tilde{Z}_{xx}$。

13.3.3　用传输线模型求谱域格林函数

谱域格林函数描述在谱域中导电薄片所在平面的电场与电流关系，它应当满足导电薄片所在平面场量满足的边界条件，这就意味我们可以从导电薄片所在平面的边界条件导出这一关系。此外我们还注意到当微带线 x 方向为导电壁屏蔽时，导电薄片所在平面切向电场与表面电流在 x 方向的傅里叶展开与 y 为纵向的横向场量按模式函数展开是相同的。因为在本征坐标系下模式函数满足的波方程为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} + k_{uni}^2\right)\varphi_{ni}(u) = 0 \tag{13.3.12}$$

可以取指数函数形式的解 $\varphi'_{ni}(u)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{un}u}$。

场量的傅里叶展开系数 $\tilde{E}_x$、$\tilde{E}_z$ 等就是模式函数的幅值 V_x、V_z 等。因此我们可用 y 方向传输线模型研究导电薄片所在平面场量与导电薄片两旁多层介质中其他平面场量的关系。

导电薄片所在平面 $(y=d_2+d_3)$ 的边界条件为

$$E_{t1}=E_{t2} \tag{13.3.13}$$

$$H_{t1}-H_{t2}=J \tag{13.3.14}$$

E_{t1} 与 E_{t2}、H_{t1} 与 H_{t2} 分别为电场、磁场切向分量在导电薄片两边的量，下标 1 和 2 与场量所在区域 Ⅰ 和 Ⅱ 对应。

前已指出，由于导电薄片附近介质的不连续效应，对微带线的分析，TE、TM 模必须同时考虑。图 13－10 (b)、(c) 分别对应于 y 方向为纵向的 TE、TM 模的传输线模型。为简化分析，先在本征坐标系下进行。所谓本征坐标系，就是坐标轴方向的选择使得波矢 $\boldsymbol{k}$ 只有两个分量，即 $\boldsymbol{k}=k_u\boldsymbol{u}_0+k_y\boldsymbol{y}_0$，$k_v=0$，表示在 v 方向没有变化。

在本征坐标系 (u,v,y) 下，TE、TM 模各只有 3 个场量。与 y 方向垂直即在导电片所在平面的场量可表示为

TE 模

$$E'_v=-\sum_n V'_{vni}\varphi'_{ni} \tag{13.3.15}$$

$$H'_{ui}=\sum_n I'_{uni}\varphi'_{ni} \tag{13.3.16}$$

TM 模

$$H''_{vni}=\sum_n I''_{vni}\varphi''_{ni} \tag{13.3.17}$$

$$E''_{ui}=\sum_n V''_{uni}\varphi''_{ni} \tag{13.3.18}$$

$i=1$，2，表示属于区域 Ⅰ、Ⅱ 中量。对 n 求和，表示可存在多个模式的场。式 (13.3.15) 前的负号保证坡印亭流在 $+y$ 方向。因为区域 Ⅰ 与 Ⅱ u 方向情况相同，模式函数相同，所以

$$\varphi'_{ni}(u)=\varphi''_{ni}(u)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{un}u} \tag{13.3.19}$$

将上面关于 TE、TM 模横向场量 E_t、H_t 表达式代入边界条件式 (13.3.13)、(13.3.14) 得到

$$V'_{vn1}=V'_{vn2}=V'_{vn} \tag{13.3.20a}$$

$$I'_{un2}-I'_{un1}=J'_{vn} \tag{13.3.20b}$$

$$V''_{un1}=V''_{un2}=V''_{un} \tag{13.3.21a}$$

$$I''_{vn2}-I''_{vn1}=J''_{un} \tag{13.3.21b}$$

式中 J'_{vn}、J''_{un} 分别为表面电流密度分量 J_v、J_u 按模式函数 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{un}u}$ 展开的系数。定义

$$Y'^{\uparrow}_{n1}=I'_{un1}/V'_{vn} \tag{13.3.22a}$$

$$Y'^{\downarrow}_{n2}=-I'_{un2}/V'_{vn} \tag{13.3.22b}$$

$$Y''^{\uparrow}_{n1} = I''_{vn1}/V''_{un} \tag{13.3.23a}$$

$$Y''^{\downarrow}_{n2} = -I''_{vn2}/V''_{un} \tag{13.3.23b}$$

$$Y'_n = Y'^{\uparrow}_{n1} + Y'^{\downarrow}_{n2} \tag{13.3.24}$$

$$Y''_n = Y''^{\uparrow}_{n1} + Y''^{\downarrow}_{n2} \tag{13.3.25}$$

式(13.3.22b)、(13.3.23b)中负号的引入是因为网络理论中关于导纳的定义，电流的正方向定义为从端口流进网络的方向。将式(13.3.22)~(13.3.25)代入式(13.3.20)、(13.3.21)得到

$$Y'_n = -J'_{vn}/V'_{vn} \tag{13.3.26}$$

$$Y''_n = -J''_{un}/V''_{un} \tag{13.3.27}$$

或者

$$Z'_n = -V'_{vn}/J'_{vn} \tag{13.3.28}$$

$$Z''_n = -V''_{un}/I''_{un} \tag{13.3.29}$$

其中

$$Z'_n = \frac{1}{Y'^{\uparrow}_{n1} + Y'^{\downarrow}_{n2}} \tag{13.3.30}$$

$$Z''_n = \frac{1}{Y''^{\uparrow}_{n1} + Y''^{\downarrow}_{n2}} \tag{13.3.31}$$

式中 Y'_n、Y''_n 分别为 TE、TM 模从导电薄片所在平面向两边看进去的输入导纳之和，Z'_n、Z''_n 则为输入阻抗之和。式(13.3.26)、(13.3.27)或式(13.3.28)、(13.3.29)就是本征坐标系下我们所研究的微带线分析模型的横向谐振表达式，其物理意义是，在 TE、TM 模分开的情况下，从导电薄片所在平面向两边看进去的输入导纳之和等于导电薄片所在平面电流与电压按模式函数 $e^{-jk_{un}u}$展开的展开系数之比，即 I_n 与 V_n 比。当导电薄片不存在时，导电薄片所在平面电流 I_n 当然为零，式(13.3.26)、(13.3.27)就简化到多层介质波导横向谐振条件表达式$\sum Y_{in} = 0$。

鉴于实际微带线中传播的是混合模，TE、TM 模必须同时考虑，横向谐振条件式(13.3.26)、(13.3.27)可合并写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} J''_{un} \\ J'_{vn} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} Y''_n & 0 \\ 0 & Y'_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V''_{un} \\ V'_{vn} \end{bmatrix} \tag{13.3.32a}$$

同样式(13.3.28)、(13.3.29)可合并写成

$$\begin{bmatrix} V''_{un} \\ V'_{vn} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} Z''_n & 0 \\ 0 & Z'_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} J''_{un} \\ J'_{vn} \end{bmatrix} \tag{13.3.32b}$$

式(13.3.32)就是微带线在本征坐标系下横向谐振条件的一般表达式。

在本征坐标系下导电薄片侧面与坐标等于常数的平面不重合，根据图13-

10 (a)，只要将本征坐标沿 y 轴转过$90° - \theta$ 角就与(x, y, z)坐标系重合。在(x, y, z)坐标系中，导电薄片侧面与坐标 x 等于常数的面重合，故称(x, y, z)坐标系为结构坐标系。显然本征坐标系中一个横向分量在结构坐标系可分解为两个横向分量，所以在结构坐标系下，横向谐振表达式当然要复杂一些。由图 13-10 可见，本征坐标系中坐标(u, v)与结构坐标系中坐标(z, x)的变换关系为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \tag{13.3.33}$$

由于

$$\sin\theta = k_z / k_u \tag{13.3.34a}$$

$$\cos\theta = k_x / k_u \tag{13.3.34b}$$

式中

$$k_u = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} \tag{13.3.34c}$$

所以式(13.3.33)又可写为

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} \begin{bmatrix} k_z & -k_x \\ k_x & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \tag{13.3.35}$$

由此可得本征坐标系与结构坐标系之间场量变换关系

$$\begin{bmatrix} V''_{un} \\ V'_{vn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{zn} \\ V_{xn} \end{bmatrix} \tag{13.3.36a}$$

或

$$\begin{bmatrix} V''_{un} \\ V'_{vn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} \begin{bmatrix} k_z & -k_{xn} \\ k_{xn} & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{zn} \\ V_{xn} \end{bmatrix} \tag{13.3.36b}$$

$$\begin{bmatrix} J''_{un} \\ J'_{vn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{zn} \\ J_{xn} \end{bmatrix} \tag{13.3.37a}$$

或

$$\begin{bmatrix} J''_{un} \\ J'_{vn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} \begin{bmatrix} k_z & -k_{xn} \\ k_{xn} & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{zn} \\ J_{xn} \end{bmatrix} \tag{13.3.37b}$$

将式(13.3.36)、(13.3.37)代入式(13.3.32)得到

$$\begin{bmatrix} V_{zn} \\ V_{xn} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \tilde{Z}'_{zz} & \tilde{Z}'_{zx} \\ \tilde{Z}'_{xz} & \tilde{Z}'_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{zn} \\ J_{xn} \end{bmatrix} = -\ [\tilde{Z}] \begin{bmatrix} J_{zn} \\ J_{xn} \end{bmatrix} \tag{13.3.38a}$$

或者

$$\begin{bmatrix} J_{zn} \\ J_{xn} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \tilde{Y}_{zz} & \tilde{Y}_{zx} \\ \tilde{Y}_{xz} & \tilde{Y}_{xx} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{zn} \\ V_{xn} \end{bmatrix} = -\ [\tilde{Y}]\begin{bmatrix} V_{zn} \\ V_{xn} \end{bmatrix} \tag{13.3.38b}$$

其中$[\tilde{Y}]=[\tilde{Z}]^{-1}$。

右上角“-1”表示矩阵求逆，式中

$$\tilde{Z}_{zz} = Z''_n \sin^2\theta + Z'_n \cos^2\theta \tag{13.3.39a}$$

$$\tilde{Z}_{xx} = Z''_n \cos^2\theta + Z'_n \sin^2\theta \tag{13.3.39b}$$

$$\tilde{Z}_{zx} = \tilde{Z}_{xz} = (Z'_n - Z''_n)\sin\theta\cos\theta \tag{13.3.39c}$$

或者

$$\tilde{Z}_{zz} = \frac{1}{k_x^2 + k_z^2}(k_z^2 Z''_n + k_x^2 Z'_n) \tag{13.3.40a}$$

$$\tilde{Z}_{xx} = \frac{1}{k_x^2 + k_z^2}(k_x^2 Z''_n + k_z^2 Z'_n) \tag{13.3.40b}$$

$$\tilde{Z}_{zx} = \tilde{Z}_{xz} = \frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_z^2}(Z'_n - Z''_n) \tag{13.3.40c}$$

同样

$$\tilde{Y}_{zz} = \frac{1}{k_x^2 + k_z^2}(k_z^2 Y''_n + k_x^2 Y'_n) \tag{13.3.41a}$$

$$\tilde{Y}_{xx} = \frac{1}{k_x^2 + k_z^2}(k_x^2 Y''_n + k_z^2 Y'_n) \tag{13.3.41b}$$

$$\tilde{Y}_{zx} = \tilde{Y}_{xz} = \frac{k_x k_z}{k_x^2 + k_z^2}(Y'_n - Y''_n) \tag{13.3.41c}$$

将式(13.3.38)与式(13.3.8)～(13.3.9)比较，因为傅里叶展开系数$\tilde{E}_x$、$\tilde{E}_z$、$\tilde{J}_x$、$\tilde{J}_z$与模式函数展开系数V_x、V_z、I_x、I_z相对应，故式(13.3.40)表示的$\tilde{Z}_{zz}$、$\tilde{Z}_{zx}$、$\tilde{Z}_{xz}$、$\tilde{Z}_{xx}$就是我们要求的谱域格林函数表达式。$\tilde{Z}_{zz}$、$\tilde{Z}_{zx}$、$\tilde{Z}_{xz}$、$\tilde{Z}_{xx}$（或$\tilde{Y}_{zz}$、$\tilde{Y}_{zx}$、$\tilde{Y}_{xz}$、$\tilde{Y}_{xx}$）的具体求解要确定Z'_n、Z''_n（或Y'_n、Y''_n）。

对于图13-10所示传输线模型Z'_n、Z''_n计算如下：

$$Z'_n = \left(\frac{1}{Z'^{\downarrow}_{\text{in}}} + \frac{1}{Z'^{\uparrow}_{\text{in}}}\right)^{-1}$$

$$Z''_n = \left(\frac{1}{Z''^{\downarrow}_{\text{in}}} + \frac{1}{Z''^{\uparrow}_{\text{in}}}\right)^{-1}$$

$$Z'^{\downarrow}_{\text{in}}(y = d_2 + d_3) = Z'_2 \frac{Z'^{\downarrow}_{\text{in}}(y = d_3) + \text{j}Z'_2 \tan k_{y2} d_2}{Z'_2 + \text{j}Z'^{\downarrow}_{\text{in}}(y = d_3)\tan k_{y2} d_2}$$

$$Z''^{\downarrow}_{\text{in}}(y = d_2 + d_3) = Z''_2 \frac{Z''^{\downarrow}_{\text{in}}(y = d_3) + \text{j}Z''_2 \tan k_{y2} d_2}{Z''_2 + \text{j}Z''^{\downarrow}_{\text{in}}(y = d_3)\tan k_{y2} d_2}$$

$$Z'^{\uparrow}_{\text{in}}(y = d_2 + d_3) = Z'_1 \frac{Z'_0 + \text{j}Z'_1 \tan k_{y1} d_1}{Z'_1 + \text{j}Z'_0 \tan k_{y1} d_1}$$

$$Z''^{\uparrow}_{\text{in}}(y=d_2+d_3)=Z''_1\frac{Z''_0+\text{j}Z''_1\tan k_{y1}d_1}{Z''_1+\text{j}Z''_0\tan k_{y1}d_1}$$

$$Z'^{\downarrow}_{\text{in}}(y=d_3)=\text{j}Z'_3\tan k_{y3}d_3$$

$$Z''^{\downarrow}_{\text{in}}(y=d_3)=\text{j}Z''_3\tan k_{y3}d_3$$

$$Z'_i=\frac{\omega\mu}{k_{yi}}$$

$$Z''_i=\frac{k_{yi}}{\omega\varepsilon_{ri}\varepsilon_0}$$

$i=0$，1，2，3，分别表示空气、介质 1，2 和 3 中的量，有

$$k_{yi}^2=k_0^2\varepsilon_{ri}-k_u^2$$

计算谱域格林函数还剩一个问题，即本征坐标系到结构坐标系坐标旋转角 θ 怎么定？事实上，知道 θ，也就知道 k_x、k_z，基本问题也就解决了。θ 主要由 x 方向边界条件确定，我们到后面再给予说明。

13.3.4 巴塞伐尔定理

从式(13.3.8) ~ (13.3.9)或式(13.3.38)求解微带线问题还有困难。因为方程中有 4 个未知量，$\tilde{E}_z$、$\tilde{E}_x$、$\tilde{J}_z$、$\tilde{J}_x$，但方程只有两个，为此需要找出 $\tilde{E}_z$、$\tilde{E}_x$、$\tilde{J}_z$、$\tilde{J}_x$ 满足的另外两个关系。

仔细分析导电薄片所在平面的特性不难发现，在导电片上，电流不为零，但电场为零；而非导电片占据的部分，电场不为零，但电流为零。因此导电片所在的平面，电场与电流的乘积一定为零。但不能由此得出导电薄片所在平面电场、电流经傅里叶变换的量的乘积也为零。不过根据巴塞伐尔定理，对于 E_z、J_z 两个量，存在关系

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{J}_z(k_x)\tilde{E}_z(k_z)\,\text{d}k_x=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}J_z(x)E_z(x)\,\text{d}x=0 \tag{13.3.42}$$

所以在变换域中导电片所在平面电场与电流乘积的积分也为零，这就有可能从方程式(13.3.8) ~ (13.3.9)或式(13.3.38)中消去两个量，从而得出其他两个场量的解，这种方法叫伽略金法。

13.3.5 用伽略金法得出微带线问题的解

下面我们按照伽略金法从式(13.3.8) ~ (13.3.9)、(13.3.42)得出微带线问题的解。首先将式(13.3.8) ~ (13.3.9)中的 $\tilde{J}_z$、$\tilde{J}_x$ 用已知的基函数 $\tilde{J}_{zm}(k_x)$、$\tilde{J}_{xm}(k_x)$展开

$$\tilde{J}_z=\sum_{m=1}^{N}c_m\tilde{J}_{zm}(k_x) \tag{13.3.43a}$$

$$\tilde{J}_x = \sum_{m=1}^{M} d_m \tilde{J}_{xm}(k_x) \tag{13.3.43b}$$

式中 c_m、d_m 是未知系数，基函数 $\tilde{J}_{zm}$、$\tilde{J}_{xm}$ 的选择要尽量接近导电薄片上待求电流的分布。因为在交界面上，只有在导电薄片上才有电流，所以所选择的基函数也只限于导电薄片上不为零。

将式(13.3.43)代入式(13.3.8)～(13.3.9)并用 $\tilde{J}_{zk}$、$\tilde{J}_{xl}$ 对式(13.3.8)～(13.3.9)分别取内积，再利用式(13.3.42)，得到

$$\int\left(\tilde{J}_{zk}\tilde{Z}_{zz}\sum_{m=1}^{N} c_m\tilde{J}_{zm} + \tilde{J}_{zk}\tilde{Z}_{zx}\sum_{m=1}^{M} d_m\tilde{J}_{xm}\right)\mathrm{d}k_x = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,N) \tag{13.3.44a}$$

$$\int\left(\tilde{J}_{xl}\tilde{Z}_{xz}\sum_{m=1}^{N} c_m\tilde{J}_{zm} + \tilde{J}_{xl}\tilde{Z}_{xx}\sum_{m=1}^{M} d_m\tilde{J}_{xm}\right)\mathrm{d}k_x = 0 \quad (l = 1,2,\cdots,M) \tag{13.3.44b}$$

并进一步简写成

$$\sum_{m=1}^{N} K_{km}^{(1,1)} c_m + \sum_{m=1}^{M} K_{km}^{(1,2)} d_m = 0 \quad (k = 1,2,\cdots,N) \tag{13.3.45a}$$

$$\sum_{m=1}^{N} K_{lm}^{(2,1)} c_m + \sum_{m=1}^{M} K_{lm}^{(2,2)} d_m = 0 \quad (l = 1,2,\cdots,M) \tag{13.3.45b}$$

式中

$$K_{km}^{(1,1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}_{zk}(k_x)\,\tilde{Z}_{zz}(k_x,k_z)\,\tilde{J}_{zm}(k_x)\,\mathrm{d}k_x$$

$$K_{km}^{(1,2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}_{zk}(k_x)\,\tilde{Z}_{zx}(k_x,k_z)\,\tilde{J}_{xm}(k_x)\,\mathrm{d}k_x$$

$$K_{lm}^{(2,1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}_{xl}(k_x)\,\tilde{Z}_{xz}(k_x,k_z)\,\tilde{J}_{zm}(k_x)\,\mathrm{d}k_x$$

$$K_{lm}^{(2,2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{J}_{xl}(k_x)\,\tilde{Z}_{xx}(k_x,k_z)\,\tilde{J}_{xm}(k_x)\,\mathrm{d}k_x$$

欲使齐次方程组(13.3.45)有解，其系数组成的行列式必然等于零，即

$$\det[K] = 0 \tag{13.3.46}$$

因为行列式中每一个元素是 k_z 与 ω 的函数，所以式(13.3.46)可决定纵向传播常数 k_z 与 ω 的关系，即 $f(k_z,\omega)=0$，这就是我们要求的色散方程。

接下去的问题是如何选择基函数，原则上只要导电薄片上电流不为零的基函数均可选择，但是由于问题的变分性质，基函数的选择对计算的效率与精度大有影响，基函数的选择要反映垂直于导电薄片边缘电磁场分量的奇异性。

对于微带，如图 13－11 (a)，基函数可以取

$$J_{zn}(x) = \frac{\cos[2(n-1)\pi x/W]}{\sqrt{1-(2x/W)^2}} \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{13.3.47a}$$

$$J_{xn}(x)=\frac{\sin(2n\pi x/W)}{\sqrt{1-(2x/W)^2}}\quad(n=1,2,\cdots)\tag{13.3.47b}$$

此处电流的定义域只在导电片上，导电片外的区域为零。$n=1$，2，3 的 $J_{xn}(x)$，$J_{zn}(x)$示于图 13－11（b）。

式(13.3.47)的傅里叶变换为

$$\tilde{J}_{zn}(k_x)=\frac{\pi W}{4}\left[\mathrm{J}_0\left(\left|\frac{Wk_x}{2}+(n-1)\pi\right|\right)+\mathrm{J}_0\left(\left|\frac{Wk_x}{2}-(n-1)\pi\right|\right)\right]\tag{13.3.48}$$

$$\tilde{J}_{xn}(k_x)=\frac{\pi W}{4\mathrm{j}}\left[\mathrm{J}_0\left(\left|\frac{Wk_x}{2}+n\pi\right|\right)-\mathrm{J}_0\left(\left|\frac{Wk_x}{2}-n\pi\right|\right)\right]\tag{13.3.49}$$

式中 J_0 为第一类零阶贝塞尔函数。

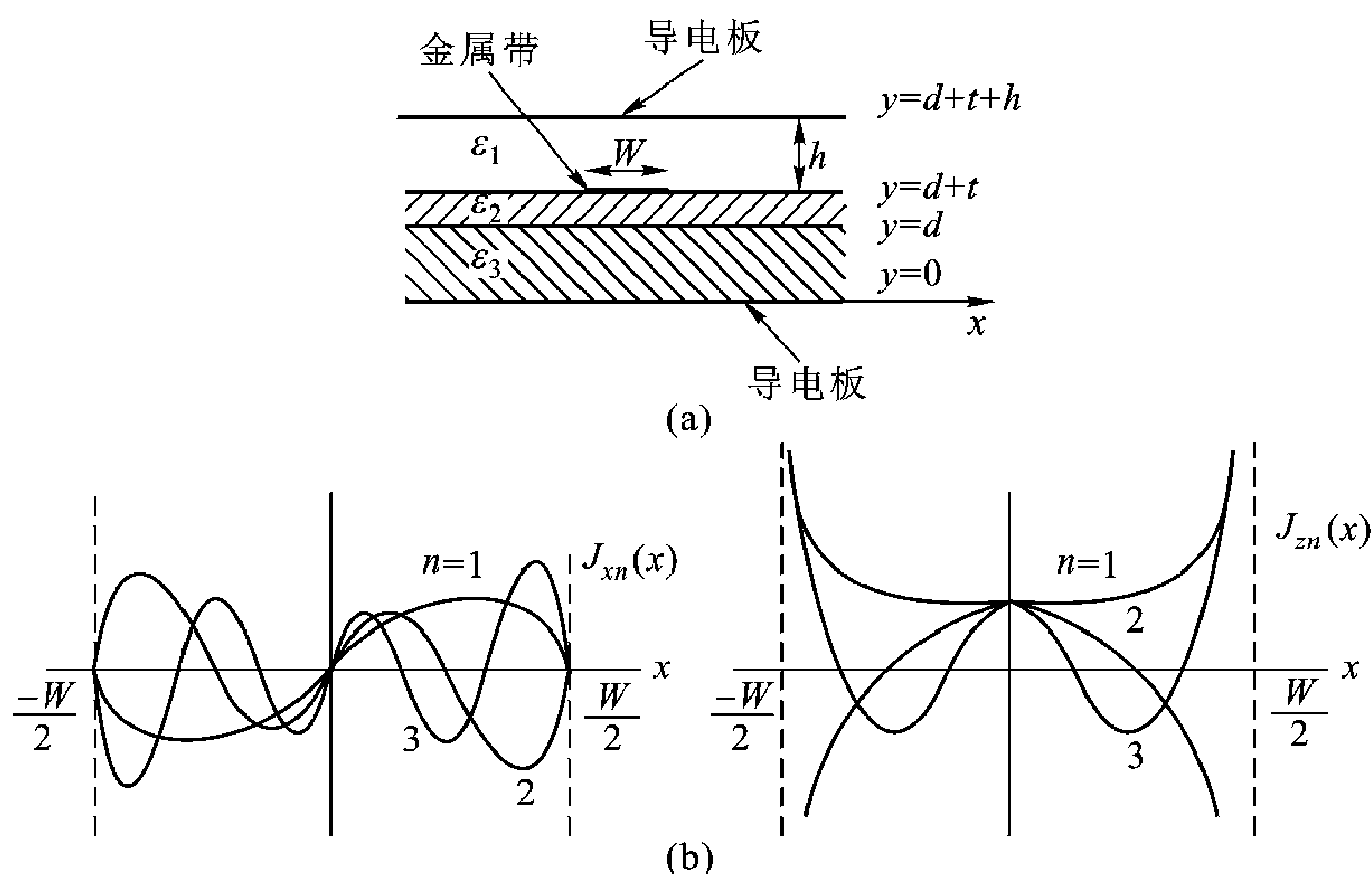


图 13－11　屏蔽微带线及其基函数
（a）屏蔽微带线　（b）基函数

上述基函数非常接近实际电流分布，对于 k_z 计算，选取 1 到 2 个基函数已足够。如果只取一个基函数，即式(13.3.44)中 $N=M=1$，那么式(13.3.44)成为

$$\begin{bmatrix}\int\tilde{J}_{zl}\tilde{Z}_{zz}\tilde{J}_{zl} & \int\tilde{J}_{zl}\tilde{Z}_{zx}\tilde{J}_{xl}\\ \int\tilde{J}_{xl}\tilde{Z}_{xz}\tilde{J}_{zl} & \int\tilde{J}_{xl}\tilde{Z}_{xx}\tilde{J}_{xl}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ d_1\end{bmatrix}=[Z]\begin{bmatrix}c_1\\ d_1\end{bmatrix}=0\tag{13.3.50}$$

系数矩阵的每一个元素都是 k_z 的函数，欲使方程有解

$$\det[Z]=0\tag{13.3.51}$$

因为式(13.3.51)中 Z_{xx}、Z_{xz}、Z_{zz} 都是 k_{yi} 与 ω 的函数，而 $k_{yi}=\sqrt{k^2-k_u^2}=\sqrt{k_i^2-k_x^2-k_z^2}$，而 $k_x=\dfrac{m\pi}{a}$，a 为 x 方向两导电壁之间距离。所以 Z_{xx} 等都是 ω 与 k_z 的函数。解式(13.3.51)就得到 $\omega \sim k_z$ 的关系，故式(13.3.51)就是我们要求的色散方程。数值计算时，给定一个 ω，先选择一个 k_z，计算式(13.3.51)的 det 是否等于零，如不等于零，改变 k_z，直到式(13.3.51)中 det 小于某一给定的小数(如 10^{-3} 或 10^{-4})，认为方程(13.3.51)得到满足，k_z 也就由此决定。再改变一个 ω，再决定一个 k_z，如此得到 $\omega \sim k_z$ 的关系曲线。

任选一个 k_z 等效于任选一个 θ，因为 $k_z=k_u\sin\theta$。所以给定一个 ω 求出 k_z，等效于求出本征坐标系绕 y 轴旋转一个角度 $(90°-\theta)$ 到结构坐标系。式(13.3.46)或式(13.3.51)与 x 方向边界条件有关，所以 θ 是由 x 方向边界条件决定的。

$\omega \sim k_z$ 关系得出后，再利用传输线理论可求出 y 方向场分布，由此进一步求出微带线等效阻抗。因为 k_z 决定后，即可决定本征矢 (c_m, d_m)，从而求得导电片所在平面的电流

$$\tilde{J}_z = \sum_m c_m \tilde{J}_{zm}$$

$$\tilde{J}_x = \sum_m d_m \tilde{J}_{xm}$$

然后利用坐标变换关系(13.3.37)，求得本征坐标系中 $(J''_{un}, J'_{vn})^{\mathrm{T}}$，再利用式(13.3.32)可求得 (V''_{un}, V'_{vn})，根据传输线上电压电流变换关系，可求得本征坐标系中 $y=$ 常数的任一平面上 V、I，再利用坐标变换关系，可求得结构坐标系中 $y=$ 常数的任一平面上 $\tilde{E}$、$\tilde{H}$。到此，整个空间的场就确定了。

不同微带线的连接，常常要用到阻抗匹配的概念，由于微带线在横向(y 方向)介质分布的不均匀，介电系数 ε 是 y 的函数，$\varepsilon=\varepsilon(y)$，反映入射波横向电磁场量关系的特征阻抗不能用均匀介质填充时的简单关系式(2.1.36)。跟工作于 TE_{10} 模的矩形波导一样，对于微带线也引入等效阻抗 Z_{e}，其定义为

$$Z_{\mathrm{e}} = 2P/I^2 \tag{13.3.52}$$

式中 P 是微带线纵向功率流的时间平均值，I 为导电片上的纵向电流

$$I = \int J_z \mathrm{d}x$$

J_z 为 $\tilde{J}_z$ 的傅里叶反变换。

根据巴塞伐尔定理，纵向功率流的时间平均值可以用谱域中的场量求得

$$P = \int_S \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \cdot z_0 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\infty} \widetilde{\boldsymbol{E}} \times \widetilde{\boldsymbol{H}}^* \cdot z_0 \mathrm{d}y\mathrm{d}k_x$$

微带线色散特性计算举例

图 13－12 给出了屏蔽微带线的色散关系。微带线的基本结构参数是，介

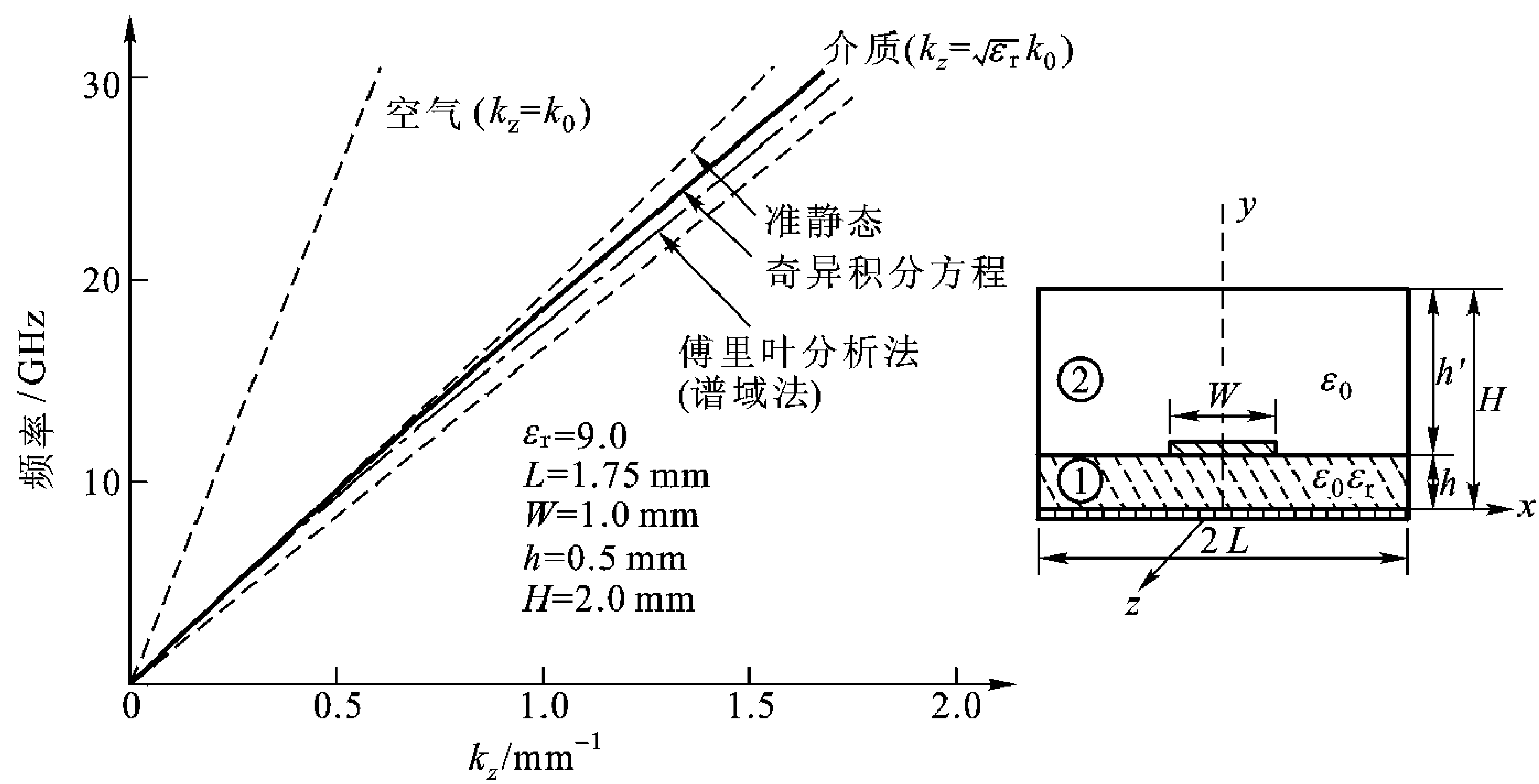


图 13－12 微带线色散关系

质基片的相对介电常数 $\varepsilon_r = 9.0$，基片厚度 = 0.5 mm，导电薄带宽度 W = 1.0 mm，屏蔽壳的截面尺寸为 $2L \times H$ = 3.5 mm × 2.0 mm。图中点划线是用谱域法计算得到的结果，实线是用积分方程法得到的结果。这两根曲线都不是直线，靠得很近，说明用这两种数值分析方法得到的结果差别不大。图中同时给出了 TEM 模近似下得到的结果，它是一条直线。图中还给出了为 ε_r介质填充的无限空间的色散关系，它也是一条直线。谱域法与积分方程法算得的两条曲线在这两条直线之间。频率低时，这两条曲线与 TEM 模近似下得到的色散曲线（实际是一直线）基本重合。所以频率低时（在本例中，低于 5 GHz），TEM 模近似可以应用。频率高时，介质基片厚度与波长之比增大，色散曲线就逐步接近用 ε_r介质填充的无限空间的色散曲线。

谱域法也可用来分析微带谐振器，此时对导电薄片所在平面场量（电场与电流）要进行二维空间傅里叶展开，导电薄片所在平面切向电场与表面电流的关系与微带线几乎完全一样，这里就不再进一步深入讨论了。

13.4 介质谐振器的有限元分析

介质谐振器已在第 8 章简单地讨论过。本节以介质谐振器数值分析为例介

绍电磁场数值计算中常用的有限元分析法。

13.4.1　有限元法简介

有限元法是一种应用范围广、灵活性大的数值分析方法。介质波导、微带线以及微带谐振器等都可用有限元法进行数值分析。它把利兹(Ritz)法与差分法结合起来，理论上以变分原理为基础，具体利用了差分离散处理的优点。设有算子方程

$$Lu = v \tag{13.4.1}$$

L 为希尔伯特(Hilbert)空间中正定算子，u 为待求函数，v 表示激励，是已知函数。与式(13.4.1)对应的泛函为

$$J(u) = \langle Lu, u\rangle - 2\langle v, u\rangle \tag{13.4.2}$$

式中〈〉表示取内积。利兹法的出发点是求算子方程(13.4.1)的解可转化为泛函(13.4.2)的极小值。如熟知的二维拉氏方程

$$\nabla^2 u = 0 \tag{13.4.3}$$

可归结为求泛函(在直角坐标中)

$$J(u) = \iint_\sigma \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{13.4.4}^*$$

的极小值问题。

利兹法假定 u 具有如下形式的解

$$u \approx u_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k \tag{13.4.5}$$

α_1，α_2，…，α_n 为待定系数，ψ_1，ψ_2，…，ψ_n 为线性无关的坐标元素。将式(13.4.5)代入式(13.4.2)得到

$$J(u) \approx J(u_n) = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \alpha_k \langle L\psi_j, \psi_k\rangle - 2\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v, \psi_j\rangle \tag{13.4.6}$$

---

* 取一个小量 $\delta\varphi$，此时 $J(\varphi+\delta\varphi) = \iint \nabla(\varphi+\delta\varphi)\cdot\nabla(\varphi+\delta\varphi)\,\mathrm{d}s = \iint (\nabla\varphi)^2\mathrm{d}s + 2\iint \nabla\varphi\cdot\nabla\delta\varphi\mathrm{d}s + \iint (\nabla\delta\varphi)^2\,\mathrm{d}s$　　(1)

略去二阶小项，得到一次变分

$$\delta J = J(\varphi+\delta\varphi) - J(\varphi) = 2\iint \nabla\varphi\cdot\nabla\delta\varphi\mathrm{d}s \tag{2}$$

利用格林定理　$\iint\{\nabla u\cdot\nabla v + v\nabla u^2\}\,\mathrm{d}s = \int v\nabla u\mathrm{d}c$

(2) 式成为　$\delta J = -2\iint \delta\varphi\,\nabla^2\varphi\mathrm{d}s + 2\int\delta\varphi\,\nabla\varphi\mathrm{d}c$　　(3)

在边界上 $\delta\varphi = 0$，所以(3)右边第二项为零。使变分 $\delta J = 0$ [即 $J(\varphi)$取极值]。由式(3)可见，要求 $\nabla^2\varphi = 0$，所以 $J(\varphi)$取极值与 $\nabla^2\varphi = 0$ 等价。

于是 $J(u)$近似地变成了参变量 α_1，α_2，…，α_n 的函数

$$J(u) \approx J(u_n) = I(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

根据多元函数极值理论，要使 $J(u)$达到极值，应有

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha_1} I(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial \alpha_2} I(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial}{\partial \alpha_n} I(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0 \end{aligned} \tag{13.4.7}$$

解代数方程组(13.4.7)，得到$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，代入式(13.4.5)，即得利兹解 u_n。

利兹解的困难之一是，如何选择基函数 ψ_k。因为利兹形式的解是对全定义域而言的，因此它要求$(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$是全域上的解析函数。由于解析函数的局部性态，失去了它在全域上的灵活性和适应性。因而在解题中要找一组既对全域解析又要在边界上满足强加条件的基函数来组成近似解就相当困难，尤其对一些比较复杂的几何、物理条件更是如此。

有限元法在保留利兹法精髓的前提下，吸收了差分法灵活通用的优点，克服了在全定义域上寻找合适基函数的困难。有限元法解题的第一步跟传统的变分法一样，也是把求解微分方程的问题等价为变分问题，然后通过离散化处理，构造一个分片解析的有限元子空间，把变分问题近似地转化为有限元子空间中的多元函数极值问题。把变分问题的近似解作为所求方程的近似解，这就是有限元法的变分原理。

现以解二维拉氏方程(13.4.3)为例说明有限元法解题过程。先将场域分割，如图 13－13 所示。一般将场域分割为三角形，这是因为任意多边形都可分割为三角形，而且在多边形中以三角形最为简单，因而数值计算的定式化也比较容易。如果选取最简单的多项式(线性插值函数)表示三角单元内的电位 u，可得

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \tag{13.4.8}$$

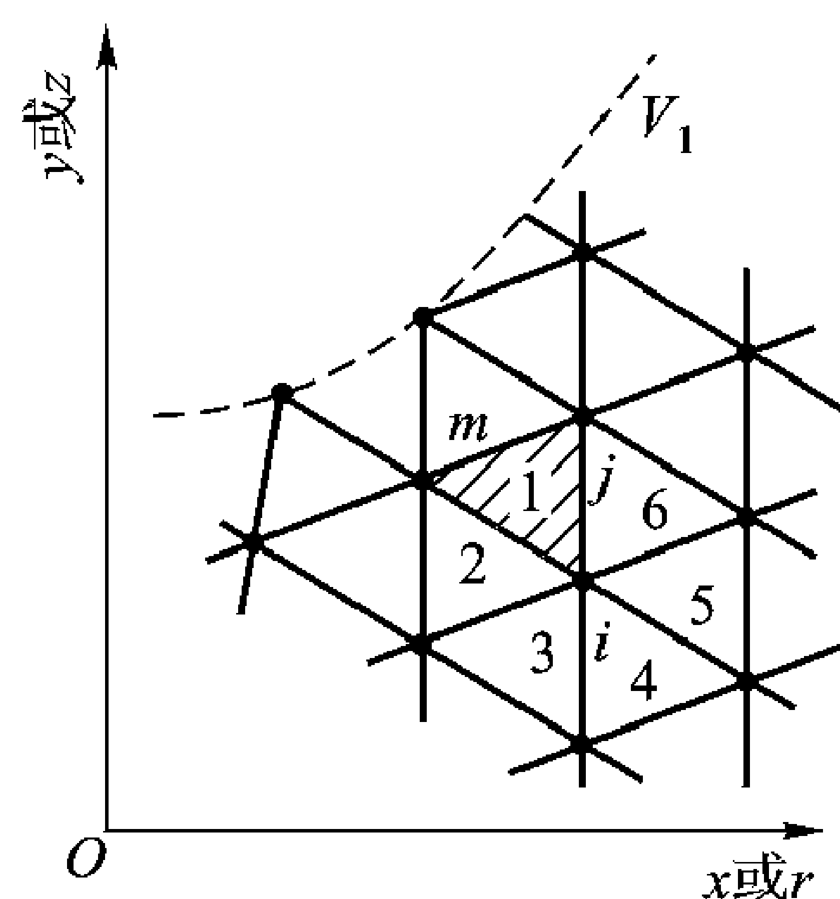


图 13－13　有限元的网格剖分

因为电场 $-\partial u/\partial x$ 和 $-\partial u/\partial y$ 为常数，故式(13.4.8)意味着当单元取得足够时，在单元内电场可以看成是不变的，单元三角形的顶点是未知函数的取样点。若三角形单元 3 个顶点(称为节点)的编号为 i、j 和 m，则电

位 u_i、u_j 和 u_m 表示如下

$$\left.\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \end{aligned}\right\} \tag{13.4.9}$$

由上式可求出 α_1，α_2，α_3，再代入式(13.4.8)，得到

$$u = \frac{1}{2A_e}[(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m] \tag{13.4.10}$$

式中 A_e 表示三角形△ijm 的面积，$a_i = x_j y_m - x_m y_j$，$b_i = y_i - y_m$，$c_i = x_m - x_j$；$a_j = x_m y_i - x_i y_m$，$b_j = y_m - y_i$，$c_j = x_i - x_m$；$a_m = x_i y_j - x_j y_i$，$b_m = y_i - y_j$，$c_m = x_j - x_i$，如果将式(13.4.10)用矩阵表示，则有

$$u = [N_i\ N_j\ N_m]\begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} \tag{13.4.11}$$

式中

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2A_e$$
$$N_j = (a_j + b_j x + c_j y)/2A_e$$
$$N_m = (a_m + b_m x + c_m y)/2A_e$$

通常把($N_i\ N_j\ N_m$)叫做单元基函数。

如果把场域中所有单元电位 u 都按式(13.4.11)以各节点电位(一般取为 u_i)表示，则其值是在式(13.4.8)假定之下得出的近似值。若希望所得的值更接近于真正的空间电位，可把单元分割得细些。为了取泛函 $J(u)$的极小值，可把节点电位 u_i 看作变量，对各个 u_i 求导数并令其为零。从式(13.4.4)可得图13－13中单元1的泛函 J_e 为

$$J_e = \frac{1}{4A_e}[(b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m)^2 + (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m)^2] \tag{13.4.12}$$

因而全域上的泛函 J 为场域内所有单元的泛函之和

$$J = \sum_{e=1}^{N} J_e \tag{13.4.13}$$

若把 J 对 u_i 的导数取为零，如图(13－13)所示，将只剩下围着节点 i 的6个单元，可得

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = \sum_{e=1}^{6} \frac{\partial J_e}{\partial u_i} = 0 \tag{13.4.14}$$

式中

$$\frac{\partial J_e}{\partial u_i}=\frac{1}{2A_e}\left[(b_iu_i+b_ju_j+b_mu_m)+(c_iu_i+c_ju_j+c_mu_m)\right] \tag{13.4.15}$$

在式(13.4.12)中，单元的泛函对于节点电位 u_i 为二次式，但如果对 u_i 微分，可得出对于节点电位 u_i 的一次式，如式(13.4.15)所示，因此，对于所有的节点电位，根据式(13.4.14)可得出与未知数的数目相同的多元联立方程组，该方程组的解就是变分问题的近似解。

对于旋转对称场，有限元法的计算步骤与二维场情况基本相同，只要将式(13.4.8)~(13.4.11)进行坐标代换($x\rightarrow r, y\rightarrow z$)上述公式仍可使用。但拉氏方程所对应的泛函为

$$J(u)=\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right](2\pi r)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}z \tag{13.4.16}$$

$\triangle ijm$ 面积则有如下关系：

二维场

$$\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y = A_e \tag{13.4.17}$$

旋转对称场

$$\iint \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z = (\rho_i+\rho_j+\rho_m)A_e/3 \tag{13.4.18}$$

在旋转对称场中单元 1 的泛函为

$$J_e=\frac{\pi}{6A_e}(\rho_i+\rho_j+\rho_m)\left[(b_iu_i+b_ju_j+b_mu_m)^2+(c_iu_i+c_ju_j+c_mu_m)^2\right] \tag{13.4.19}$$

综合上述分析，有限元法的计算步骤大体如下：(1)将场域分割为单元的集合，如图 13－13；(2)选取单元内的试验函数，如式(13.4.8)；(3)建立变分问题，如式(13.4.14)；(4)将变分问题化为代数方程组(13.4.14)、(13.4.15)。解此方程组，就得到变分问题的近似解。

由此可见，用有限元法求微分方程的近似解，首先要找到与该微分方程对应的泛函，如二维拉氏方程对应的泛函式(13.4. 4)。柱形金属波导中的场满足的波方程

$$(\nabla^2+k^2)u=0 \tag{13.4.20}$$

对应的泛函为

$$J(u)=\frac{\iint(\nabla u)^2\,\mathrm{d}s}{\iint u^2\mathrm{d}s} \tag{13.4.21}$$

一般来说，如果找到所研究微分方程对应的泛函，即可用上面所述的有限元法进行数值解。实际上，即使找不到相对应的泛函，仍然可以用有限元法得

到微分方程的近似解。理论分析表明，只要存在一个变分原理，则从加权的伽略金法所得到的方程与由变分原理导出的方程将完全相同，下面结合求圆柱形介质谐振器场问题的近似解予以说明。

13.4.2 圆柱形介质谐振器的有限元分析

对于实际应用的圆柱介质谐振器，为了避免辐射损耗，通常把介质谐振器放在屏蔽的金属盒子里，并置于介质基片上，如图 13-14 (a)。由于结构的轴对称性，利用圆柱坐标最为方便，对于 $TE_{01\delta}$模，$E_\rho = E_z = H_\varphi = 0$，电场分量 E_φ 满足的方程是

$$\frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 E_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho} + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)E_\varphi = 0 \tag{13.4.22}$$

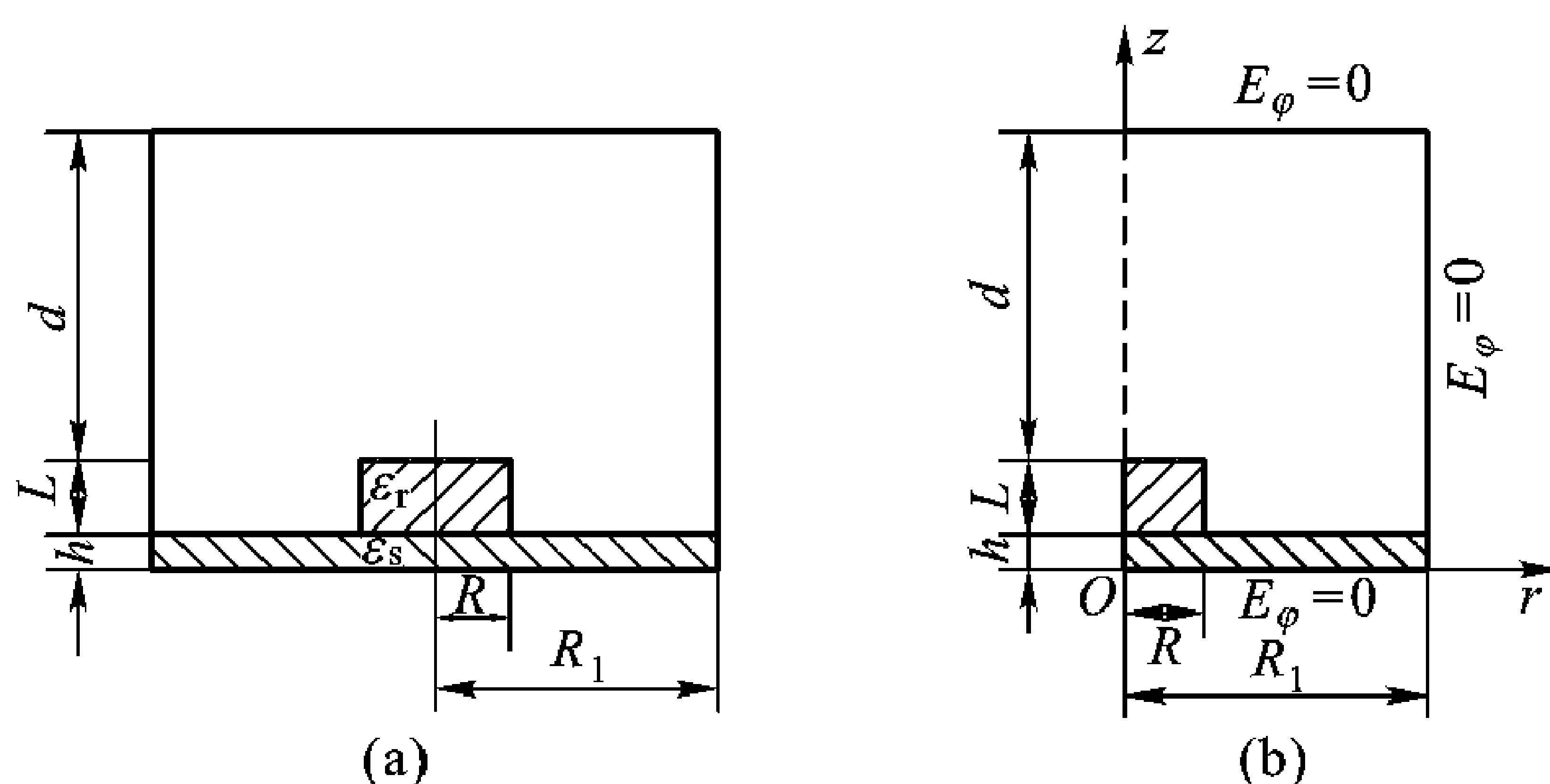


图 13-14 屏蔽介质谐振器

(a) 屏蔽介质谐振器的横截面图 (b) 实际分析模型

由于所研究的模式 φ 方向场没有变化，故只要研究如图 13-14 (b)所示的 φ 等于某一常数平面上的场分布就足够了，所处理的问题也就简化为二维场问题。利用有限元法计算图 13-14 (b)所示结构的谐振频率时，需将该图分割为许多三角形单元，如图 13-15，因为绝大部分电磁场集中在介质谐振器区域，所以该区应分割得细密一些，然后选取线性插值函数近似表示每一单元中的变量 E_φ，令 $\hat{E}_\varphi = [N_e][E_\varphi]_e$ (即 $\hat{E}_\varphi$ 用基函数$[N_e]$展开)代入方程(13.4.22)，由于 $\hat{E}_\varphi$ 为 E_φ 的近似值，代入式(13.4.22)后，有余量 R

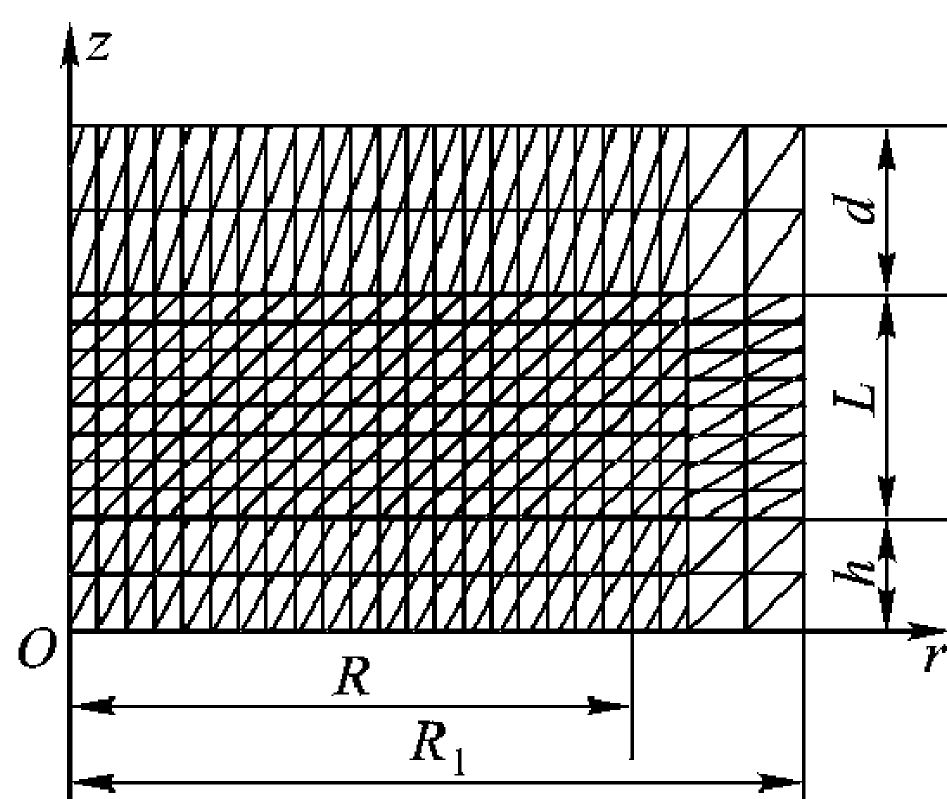


图 13-15 有限元分割示意图

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_\varphi}{\partial \rho^2}+\frac{\partial^2 \hat{E}_\varphi}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{E}_\varphi}{\partial \rho}+(k^2-\frac{1}{\rho^2})\hat{E}_\varphi=R\neq 0 \tag{13.4.23}$$

可以证明，如果权函数 W 与基函数相同，就得到伽略金法，现在要找出余量 R，使其满足

$$\int_V RW\mathrm{d}V=0 \tag{13.4.24}$$

在圆柱坐标中，因为 $TE_{01\delta}$模的 E_φ 与 φ 无关，所以单元体积 $\mathrm{d}V$ 可表示为 $\mathrm{d}V=2\pi\rho\mathrm{d}A$，$\mathrm{d}A$ 为 $\rho-z$ 平面上单元面积，将 $\mathrm{d}V$ 及式(13.4.23)代入式(13.4.24)，得到

$$\int_A\left[\rho W\frac{\partial^2 \hat{E}_\varphi}{\partial \rho^2}+\rho W\frac{\partial^2 \hat{E}_\varphi}{\partial z^2}+W\frac{\partial \hat{E}_\varphi}{\partial \rho}+\left(k^2\rho W-\frac{W}{\rho}\right)\hat{E}_\varphi\right]\mathrm{d}A=0 \tag{13.4.25}$$

按照伽略金法，取 $W=[N]_e^{\mathrm{T}}$，将$[N]_e^{\mathrm{T}}$代入式(13.4.25)，并取 $\hat{E}_\varphi=\hat{\psi}(\rho,z)$，可得

$$\int_A\left[-\rho\left\{\left[\frac{\partial N}{\partial \rho}\right]_e^{\mathrm{T}}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \rho}+\left[\frac{\partial N}{\partial z}\right]_e^{\mathrm{T}}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z}\right\}+k^2\rho\,[N]_e^{\mathrm{T}}\hat{\psi}-\frac{1}{\rho}\,[N]_e^{\mathrm{T}}\hat{\psi}\right]\mathrm{d}A=0 \tag{13.4.26}$$

从式(13.4.25)到式(13.4.26)我们利用了格林定理及屏蔽盒上的边界条件

$$\int(\nabla u\cdot\nabla v+v\nabla^2 u)\,\mathrm{d}S=\int_V\nabla u\mathrm{d}c=0$$

从而可求出每一单元的矩阵方程

$$[K]_e\,[\hat{\psi}]_e=0 \tag{13.4.27}$$

式中

$$K_{ij}=\int_{A_e}\left[\rho\frac{\partial N_i}{\partial \rho}\frac{\partial N_j}{\partial \rho}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}+\frac{N_iN_j}{\rho}-k^2\rho N_iN_j\right]\mathrm{d}A_e\quad(i,j=1,2,3) \tag{13.4.28}$$

只要能计算出单元矩阵中各元素，将它们汇总在一起，便得到了整个介质谐振器的矩阵方程

$$[K][\hat{\psi}]=0 \tag{13.4.29}$$

上式中的矩阵方程包括了图 13－15 中所有节点，并包括导体上 $\psi=0$ 的边界条件，令行列式$[K]$为零，即

$$\det[K]=0$$

即可算出介质谐振器的谐振频率，计算中增加单元的数目，直到收敛于所要的精度为止。

图 13－16 是圆柱形介质谐振器 $TE_{01\delta}$模谐振频率计算曲线。纵坐标为归一

化谐振频率 $f_n = 2Rf_0\sqrt{\mu\varepsilon_r}$，$f_0$ 为介质谐振器谐振频率。横坐标为介质谐振器归一化衬底高度 $h_n = h/R$。计算中 $\varepsilon_s/\varepsilon_r = 0.13$，$L/R = 0.25$，$L$、$R$ 分别为介质谐振器的高度和半径，h 为介质谐振器衬底高度，ε_r，ε_s 分别为介质谐振器及衬底的介电常数。

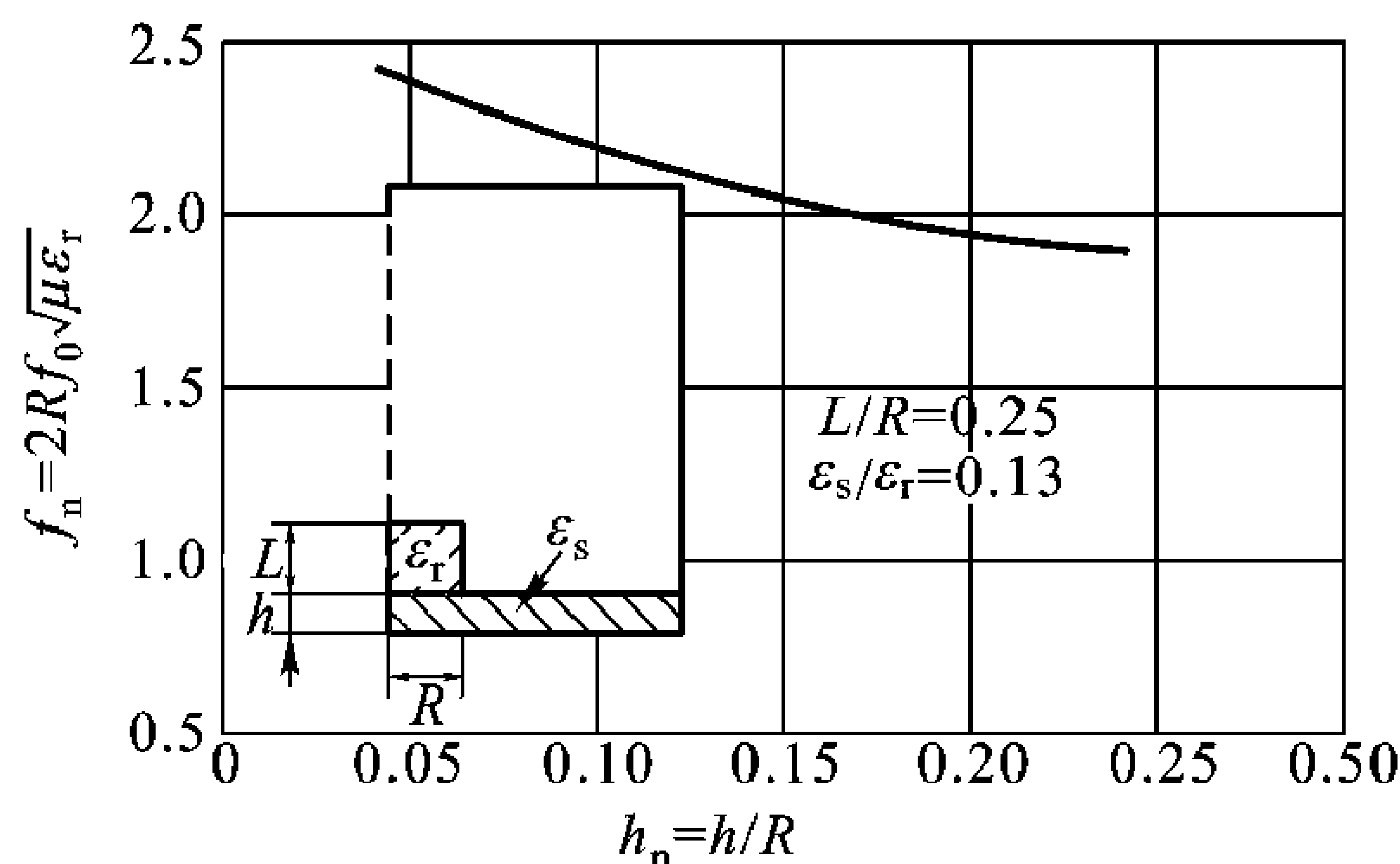


图 13－16　$TE_{01\delta}$模归一化谐振频率计算曲线

13.5　时域有限差分方法(FDTD)的基本原理

本书到现在为止，对电磁问题的分析绝大部分都是在频域中进行的，所研究的电磁场量对时间作简谐变化。如果要分析瞬态变化的场，首先要将瞬变场对时间作傅里叶展开，然后对每一个频率分量进行研究。

本节讨论的时域有限差分(FDTD)方法，不仅在三维空间对场量离散，而且在时间轴上也对场量离散，并用差分代替微分，得到麦克斯韦方程在一定边值与初值条件下的近似解。差分法的优点是，解题有很大的灵活性，缺点是计算工作量大。如果在 x、y、z 方向各取 N_x、N_y、N_z 个离散点，在 $t_1 - t_2$ 时间再取 N_t 个时间间隔，对于一个具体的场问题就要计算$(N_x \times N_y \times N_z \times N_t)$个离散未知量，其计算工作量之大可想而知。近代高速大容量数字计算机的发展，使时域有限差分法的应用成为可能，因而自 20 世纪 80 年代以来，研究波导问题的时域有限差分法得到了极大的发展。在时域有限差分法发展初期，对于具有开放边界的波导系统，用时域有限差分法模拟波导的瞬态特性是十分有效的，但利用时域分析的结果得出波导的频域特性误差仍较大。经过近 20 年不少学者对时域有限差分方法的深入研究，尤其是开放边界条件的正确处理，时域有限差分法不仅成功地应用于研究波导的瞬态特性，而且用来分析波导本征值等问题也能得到满意的结果。

本节介绍时域有限差分法的基本原理，下一节再介绍时域有限差分在数值模拟波导器件网络参数时的应用。

13.5.1 麦克斯韦方程的差分近似

时域有限差分方法是 20 世纪 60 年代由 K. S. Yee 首先提出的。本节介绍的FDTD方法，基本上遵循 Yee 的思路，但作为麦克斯韦方程的基本方程取为

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{13.5.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{13.5.2}$$

式中

$$\boldsymbol{D} = \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{E} \tag{13.5.3}$$

其中介质的介电常数 $\bar{\bar{\varepsilon}}$ 可以为张量，表示介质的电特性是各向异性的。μ_0 表示真空中的磁导率，即此时限定在分析非磁性介质的情况。从式(13.5.1)、(13.5.3)出发的优点是，可将 FDTD 方法推广到研究包括各向异性介质的情况。而在 Yee 的论文中 ε 是标量，没有涉及介质各向异性问题。

一般情况下，张量 $\bar{\bar{\varepsilon}}$ 包括 9 个分量

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{13.5.4}$$

当介质主光轴与坐标轴一致时，ε 就简化为对角张量，即

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{vmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{vmatrix} \tag{13.5.5}$$

当 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ 时，就简化为各向同性介质。

FDTD 方法的第一步，将场量离散，并用差分近似微分。为此先把矢量麦克斯韦方程组(13.5.1)、(13.5.2)化为标量麦克斯韦方程组

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \mu_0 \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \tag{13.5.6a}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \mu_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \tag{13.5.6b}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \mu_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \tag{13.5.6c}$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \tag{13.5.6d}$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{13.5.6e}$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial t}=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{13.5.6f}$$

差分网格的划分及单元网格上各场分量的配置如图 13－17 所示。与 Yee 的论文相比略有补充，这是因为起始方程中同时包含有电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 与电场 $\boldsymbol{E}$，所以差分网格中电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 分量的位置上也有相应的电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 分量。为了表示方便起见引入如下定义：

$$F^n(i,j,k)=F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \tag{13.5.7}$$

式中 Δx、Δy、Δz 分别表示在空间 x、y、z 3 个方向上的差分步长，Δt 表示时间上的差分间隔。$F^n(i,j,k)$ 表示在 $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$ 位置上 $n\Delta t$ 时刻的场分量。

从差分网格中可以看出，电场分量 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{D}$ 和磁场分量 $\boldsymbol{H}$ 在空间位置上相差半个差分步长，而且在以后对时间差分上 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 也相差半个步长。这样保证了差分方程的形式为中心差分，有二阶差分精度，同时可以获得蛙跳式差分格式。

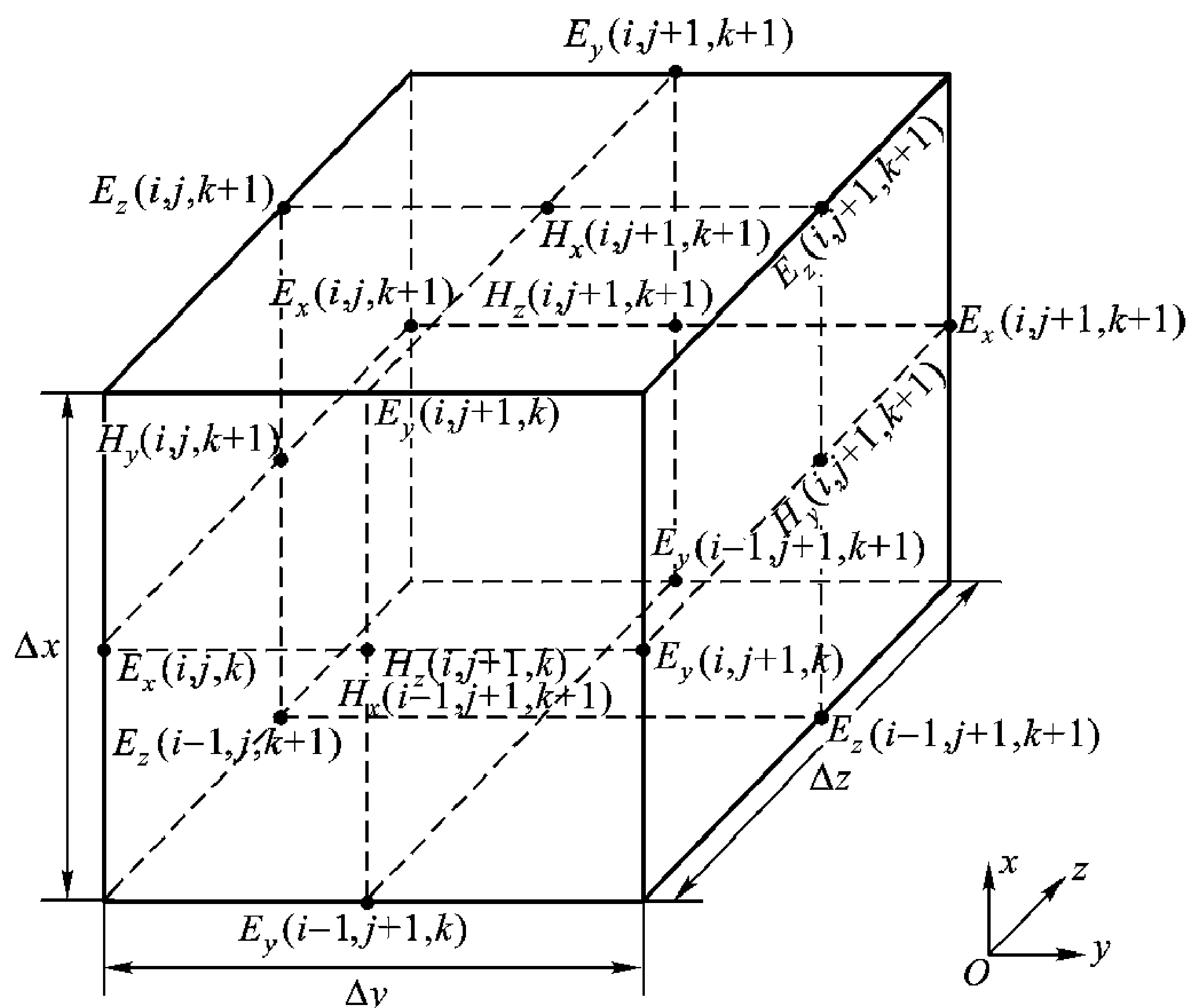


图 13－17　场分量在网格中的位置

利用图 13－17 所示的差分网格，对式(13.5.6)在时间和空间上用差分代替微分可得一差分方程组

$$D_x^{n+1}(i,j,k)=D_x^n(i,j,k)+\Delta t\Big[\frac{H_z^{n+1/2}(i,j+1,k)-H_z^{n+1/2}(i,j,k)}{\Delta y}-$$

$$\frac{H_y^{n+1/2}(i,j,k+1)-H_y^{n+1/2}(i,j,k)}{\Delta z}\Bigg] \tag{13.5.8a}$$

$$D_y^{n+1}(i,j,k)=D_y^n(i,j,k)+\Delta t\Bigg[\frac{H_x^{n+1/2}(i,j,k+1)-H_x^{n+1/2}(i,j,k)}{\Delta z}-$$

$$\frac{H_z^{n+1/2}(i+1,j,k)-H_z^{n+1/2}(i,j,k)}{\Delta x}\Bigg] \tag{13.5.8b}$$

$$D_z^{n+1}(i,j,k)=D_z^n(i,j,k)+\Delta t\Bigg[\frac{H_y^{n+1/2}(i+1,j,k)-H_y^{n+1/2}(i,j,k)}{\Delta x}-$$

$$\frac{H_x^{n+1/2}(i,j+1,k)-H_z^{n+1/2}(i,j,k)}{\Delta y}\Bigg] \tag{13.5.8c}$$

$$H_x^{n+1/2}(i,j,k)=H_x^{n-1/2}(i,j,k)+\frac{\Delta t}{\mu_0}\Bigg[-\frac{E_z^n(i,j,k)-E_z^n(i,j-1,k)}{\Delta y}+$$

$$\frac{E_y^n(i,j,k)-E_y^n(i,j,k-1)}{\Delta z}\Bigg] \tag{13.5.8d}$$

$$H_y^{n+1/2}(i,j,k)=H_y^{n-1/2}(i,j,k)+\frac{\Delta t}{\mu_0}\Bigg[-\frac{E_x^n(i,j,k)-E_x^n(i,j,k-1)}{\Delta z}+$$

$$\frac{E_z^n(i,j,k)-E_z^n(i-1,j,k)}{\Delta x}\Bigg] \tag{13.5.8e}$$

$$H_z^{n+1/2}(i,j,k)=H_z^{n-1/2}(i,j,k)+\frac{\Delta t}{\mu_0}\Bigg[-\frac{E_y^n(i,j,k)-E_y^n(i-1,j,k)}{\Delta x}+$$

$$\frac{E_x^n(i,j,k)-E_x^n(i,j-1,k)}{\Delta y}\Bigg] \tag{13.5.8f}$$

在上面的差分方程组中包含了 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{H}$ 及 $\boldsymbol{D}$ 分量，从差分方程中求得 $\boldsymbol{D}$ 分量后，$\boldsymbol{E}$ 分量可以利用介质结构方程(13.5.3)得出，即

$$\boldsymbol{E}^n(i,j,k)=[\bar{\bar{\varepsilon}}(i,j,k)]^{-1}\boldsymbol{D}^n(i,j,k) \tag{13.5.9}$$

式(13.5.8)与式(13.5.9)给出了从 $n\Delta t$ 时刻的场计算 $(n+1)\Delta t$ 时刻的场，它们是 FDTD 法的基本算式。实践证明，在分析波导结构时，只要使差分步长与所关心频率的波长之比在 0.03 以内，其差分精度完全可以得到保证。

13.5.2 稳定性条件

对于任何一个差分方程组，为了使每一步差分求解所引起的误差不会积累，也就是使差分方程有稳定的解，差分步长 Δx、Δy、Δz 和 Δt 必须满足一定的关系，这种关系称之为差分方程的稳定性条件。从偏微分方程差分解的稳定性条件可以导出

$$v_{\mathrm{p}}\Delta t\leqslant\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta y^2}+\frac{1}{\Delta z^2}}} \tag{13.5.10}$$

式中 v_p 为所分析波导的最大相速。

13.5.3　边界条件

边界条件的正确处理是用 FDTD 法解题的关键。与其他差分方法一样，FDTD 法在求解差分方程之前，边界必须预先给定。通常遇到的边界可以分成 3 类：一类称之为“硬边界”，如等效电壁、等效磁壁；第二类称之为“软边界”，如介质分界面；第三类是开放边界，也就是匹配边界。

硬边界处理相对简单，对于切向电场或法向磁场为零的等效电壁这类边界，使切向电场或法向磁场所在的网格节点落在边界上，并使其为零；而对于法向电场与切向磁场，由于其在等效电壁法线方向导数为零，可置其与边界相差半个步长的网格节点上的值对于边界呈偶对称分布即可。对于等效磁壁也可作类似处理。

如图 13－18 所示的介质分界面为软边界，将麦克斯韦方程应用于介质分界面，可以得到

$$\left(\frac{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}_1 \cdot E^1}{\partial t} \cdot \boldsymbol{x}_0\right) = \frac{\partial H_z^1}{\partial y} - \frac{\partial H_y^1}{\partial z} \tag{13.5.11a}$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\bar{\varepsilon}}_2 \cdot E^2}{\partial t} \cdot \boldsymbol{x}_0\right) = \frac{\partial H_z^2}{\partial y} - \frac{\partial H_y^2}{\partial z} \tag{13.5.11b}$$

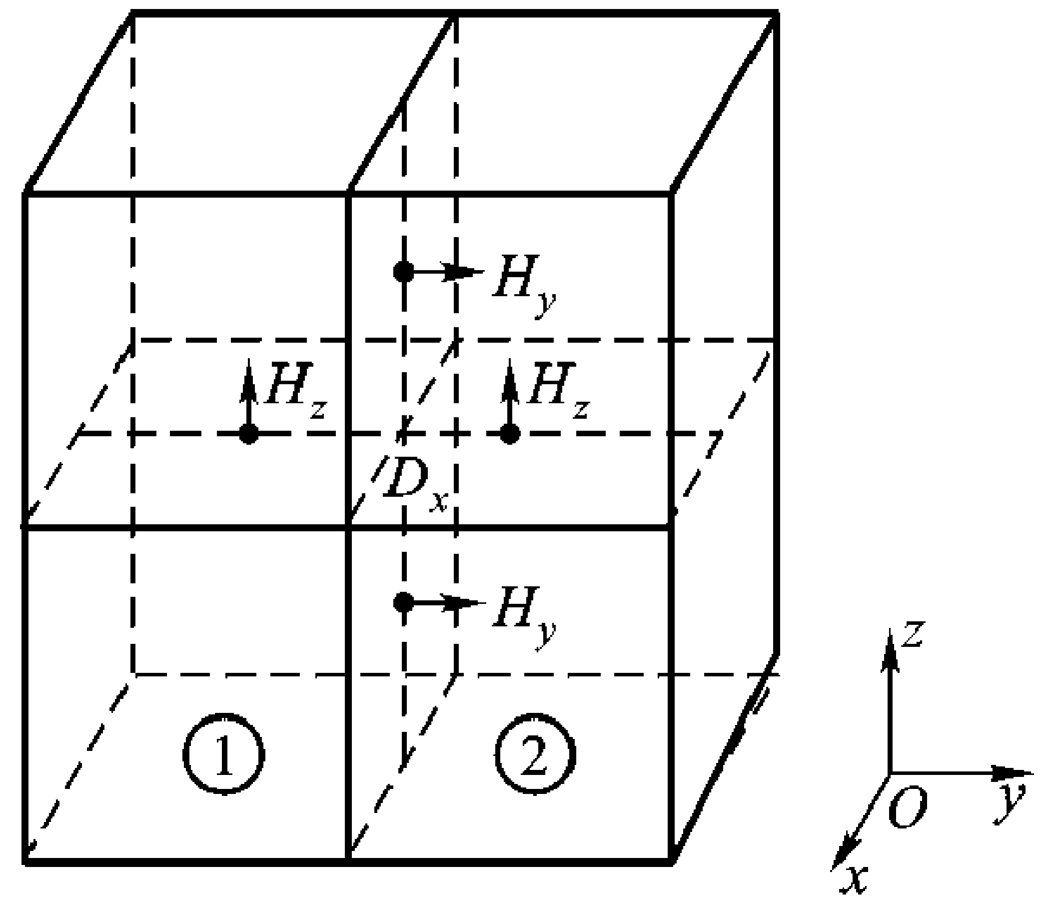


图 13－18　介质分界面示意图

式中上标 1、2 分别表示介质 Ⅰ、Ⅱ 中的场量。将式[13.5.11(a)]与式[13.5.11(b)]相加取平均可得

$$\frac{\partial D_x}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\bar{\varepsilon}}_1 \cdot \boldsymbol{E}^1 + \bar{\bar{\varepsilon}}_2 \cdot \boldsymbol{E}^2) \cdot \boldsymbol{x}_0 = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \tag{13.5.12}$$

$$D_x = \frac{1}{2}(\,(\bar{\bar{\varepsilon}}_1 + \bar{\bar{\varepsilon}}_2) \cdot \boldsymbol{E})\boldsymbol{x}_0 \tag{13.5.13}$$

对 D_y，D_z 采取同样的方法，并组合可得到

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{\varepsilon}}_1 + \bar{\bar{\varepsilon}}_2) \cdot \boldsymbol{E} \tag{13.5.14}$$

由此，在求边界上的场量时，可引入一等效介电常数 $\bar{\bar{\varepsilon}}'$，有

$$\bar{\bar{\varepsilon}}' = \frac{1}{2}(\bar{\bar{\varepsilon}}_1 + \bar{\bar{\varepsilon}}_2) \tag{13.5.15}$$

也就是说在介质交界面上按式(13.5.9)从 $\boldsymbol{D}$ 求 $\boldsymbol{E}$ 时，式中的 $\bar{\bar{\varepsilon}}$ 用 $\bar{\bar{\varepsilon}}'$ 代替即可。

对于开放边界，严格来说只有向外传播的波，因而这类边界条件也可称之为辐射条件，或者称之为匹配边界条件。原则上只要使开放的边界在无穷远处，就不会引起反射，但这在计算机模拟时是不可能实现的。采用合适的方法处理这一类边界是时域有限差分方法中一个重要的问题。下面介绍几种行之有效的处理方法。

根据电磁场的叠加原理与惟一性原理可知，在其他条件完全相同的情况下，一个边界等效开路($\Gamma_0=1$)与另一个边界等效短路($\Gamma_s=-1$)的场分布的叠加可以得到一个匹配边界($\Gamma=0$)条件下的场分布，即

$$F^n(i,j,k)\Big|_{\Gamma=0}=F^n(i,j,k)\Big|_{\Gamma=1}+F^n(i,j,k)\Big|_{\Gamma=-1} \tag{13.5.16}$$

这样就把原来难于处理的开放边界问题转化成为硬边界问题。这一方法只能用于线性系统。而且当结构具有 n 个开放边界时，必须计算 2^n 个等效结构的场分布。

第二种方法是利用电磁场的辐射条件。假设开放边界在 $z=k\Delta z$ 处，且在这一平面内只有向正 z 方向传播的波，即有

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{v_z\partial t}\right)F\Big|_{z=k\Delta z}=0 \tag{13.5.17}$$

式中 v_z 为 z 方向波的传播速度，可以表示成

$$\frac{1}{v_z}=\frac{1}{c_0}\left[1-\left(\frac{c_0}{v_y}\right)^2-\left(\frac{c_0}{v_x}\right)^2\right]^{1/2} \tag{13.5.18}$$

其中 $c_0=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$，对式(13.5.18)进行多项式展开，并取其一阶近似

$$\frac{1}{v_z}=\frac{1}{c_0}+O\left[\left(\frac{c_0}{v_y}\right)^2+\left(\frac{c_0}{v_x}\right)^2\right] \tag{13.5.19}$$

把式(13.5.19)代入式(13.5.17)可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{c_0\partial t}\right)F\Big|_{z=k\Delta z}=0 \tag{13.5.20}$$

这就是开放边界的一阶近似表达式。在 FDTD 方法中，由于其特有的网格分布，只要对边界上的切向电场进行处理即可。由此把 F 看成切向电场并对式(13.5.20)进行差分近似，可得到

$$E_t^{n+1}(i,j,k)=E_t^n(i,j,k-1)+\frac{c_0\Delta t-\Delta z}{c_0\Delta t+\Delta z}\left[E_t^{n+1}(i,j,k-1)-E_t^n(i,j,k)\right] \tag{13.5.21}$$

上式即为开放边界条件的一阶近似差分表达式。这样，对于一阶近似，$(n+1)\Delta t$ 时刻，开放边界(i,j,k)上的值可用 $n\Delta t$ 时刻开放边界上的值以及边界内$(i,j,k-1)$网格上$(n+1)\Delta t$ 时刻的场来近似。

如对式(13.5.19)取高阶近似，利用同样的方法就可以得到高阶近似的表

达式。

由以上分析可以看出，式(13.5.21)对单频无色散TEM波是有效的。实际波导中传播的一般并非TEM波，式(13.5.21)应当用高阶近似表达式代替。

第三种方法是对式(13.5.21)一阶近似的改进。首先在式(13.5.20)中c_0用v_p来代替，$v_p = 1/\sqrt{\mu\varepsilon_{eff}}$。根据式(13.5.10)，假设$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta h$，可以通过选择$\Delta t$与$\varepsilon_{eff}$使

$$M = \frac{\Delta h}{v_p \Delta t} \tag{13.5.22}$$

M为整数。对式(13.5.20)进行差分离散并进行一些处理可得

$$E_t^n(i,j,k) = E_t^{n-M}(i,j,k-1) \tag{13.5.23}$$

利用上式，开放边界上的场就可以从边界内场求得。此式在物理概念上很容易理解。从式(13.5.22)可以看出，波传播Δh的距离所需的时间为$M\Delta t$，所以在边界上$n\Delta t$时刻的场分量就与前一网格点$(n-M)\Delta t$时刻的场分量相同。由于上面的处理仍然引入假设波导结构在整个频带内无色散，即ε_{eff}为常数，所以用式(13.5.23)处理开放边界时，在边界上仍有3%～5%的反射。

为了进一步减少这一误差，对接近于开放边界的切向磁场也用类似于式(13.5.23)进行处理，即

$$H_t^n(i,j,k-1/2) = H_t^{n-M}(i,j,k-3/2) \tag{13.5.24}$$

在实际计算中发现，从边界上的电场出发，利用差分方程组(13.5.8)和式(13.5.23)得到的$H_t^n(i,j,k-1/2)$与用式(13.5.24)得到$H_t^n(i,j,k-1/2)$虽然都有误差，但这两个误差总是具有相反的符号，且幅度总是保持固定的比例。所以只要对这两个磁场值按一定的比例进行加权平均就可以大大减小磁场值的误差。经过这种处理以后，由于边界不匹配引起的误差可以减到很小，基本上消去了开放边界上的反射。所以第三种方法是处理开放边界的比较有效的方法。近几年发展的完全匹配层(PML)吸收边界，通过在FDTD区域截断边界处设置一种特殊介质层，该层介质的波阻抗与相邻介质波阻抗完全匹配，因而入射波将无反射地穿过分界面而进入PML层，并且PML层为有耗介质，进入PML层的透射波将迅速衰减，即使PML为有限厚度，它对于入射波仍有很好的吸收效率。开放边界条件的有效处理是FDTD法研究的一个重要课题，不断有新的成果报导，本节介绍的是最基本的几种处理方法。读者使用FDTD法时，请注意有关这方面的最新研究成果。

至此，利用麦克斯韦方程的差分表达式(13.5.8)，及波导结构的边界条件，即可由$n\Delta t$时刻的场分布得到$(n+1)\Delta t$时刻的场。如已知某一t_0时刻的场分布，则t_0以后任何时刻场分布都可以得到。所以在$t=0$这一时刻的场(称之为初始激励场)的选择就成为FDTD法又一个重要问题。如果初始激励场

选择恰当就可在较短时间内收敛到正确解。

13.5.4　初始激励信号的选择

高斯脉冲包含了丰富的频谱，其波形在时间分布上是光滑的，实践证明它比较适合作为 FDTD 法研究波导问题时的初始激励信号。

一个理想的沿着 $+z$ 方向传播的高斯脉冲可以表示成

$$g(t,z)=\exp\left[-\left(t-t_0-\frac{z-z_0}{v}\right)^2\Big/T^2\right] \tag{13.5.25}$$

其中 T 为脉冲宽度，v 为脉冲沿 $+z$ 方向的传播速度。上式表明脉冲在 $z=z_0$ 和 $t=t_0$ 时有最大的幅度。T、t_0、z_0 的选择必须满足一定的要求。

当差分步长 Δt 与 Δz 给定时，高斯脉冲必须有足够的空间宽度，同时在我们所关心的频率范围内，高斯脉冲的频谱必须有较大的幅度。如果这两个条件不能同时得到满足，必须重新选择 Δz、Δt。

通常情况下脉冲宽度需覆盖 10 个步长，即

$$T=\frac{10\Delta z}{\sqrt{3}\,v_{\mathrm{p}}} \tag{13.5.26}$$

当高斯脉冲的宽度选定时，其频谱最大值

$$f_{\max}=\frac{1}{2T}=\frac{\sqrt{3}\,v_{\mathrm{p}}}{20\Delta z} \tag{13.5.27}$$

从上式可知改变 Δz，可以改变所分析的频率范围。

另外一个要求是选取合适的 t_0 与 z_0，使初始激励场从 $t=0^-$ 到 $t=0^+$ 的变化很小，以免引入过多的高频分量。

初始激励脉冲波形确定以后，$t=0$ 时所研究波导空间场分布一般只指定 $z=z_0$ 输入平面的场分布，其他地方所有场分量均假定为零。输入平面场分布指定得合适与否也直接关系到计算时间与计算结果。从理论上来说，用主模场空间分布作为激励场的空间分布最为理想。但是在通常情况下主模的场分布事先并不知道，所以在实际数值模拟时只能使激励场的空间分布与实际场分布尽量接近。一般来说，只要激励场的空间分布比较接近实际的场分布，就可以花费较短的时间获得足够的计算精度。

如果我们研究的电磁问题，重点不是系统的瞬态特性，而是色散特性等问题，也可选冲激函数作为初始激励脉冲。

13.5.5　FDTD 法数值解步骤

现将 FDTD 数值求解的步骤归纳如下：

(1) 将时域麦克斯韦方程组的旋度方程展开成其坐标分量式(常用直角坐

标系)，用中心有限差分式替代各场分量对空间、时间的微分，得到 FDTD 基本方程式。

⑵ 决定空间网格基本单元尺寸 Δx、Δy、Δz。这 3 个轴向的单元尺寸可以相等，亦可以不等，视研究的具体问题而定。单元尺寸大小的选择应考虑到下列因素：⑴由六面形的基本单元组成的空间网格能较好地拟合任意被研究的空间媒质；⑵尽可能地减小网格空间数值模的数值色散。为了减小数值色散，应满足 $\lambda_{\min}\geqslant 10\Delta$，$\Delta=\min(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$，$\lambda_{\min}$是被研究媒质空间的最小波长值(对应最高频率)。当用直角坐标系时，被模拟的媒质分界面一般呈锯齿形，这可能导致沿锯齿形表面生成表面波，引起附加的色散。减少单元尺寸会减小数值色散误差，但这又引起计算存贮量的加大，需权衡利弊、折衷处理。

⑶ 选择时间步长 Δt。Δt 的选择应使数值计算稳定，其判别式为

$$\Delta t\leqslant\frac{1}{v_{\mathrm{p\,max}}}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\Delta x^2}+\dfrac{1}{\Delta y^2}+\dfrac{1}{\Delta z^2}}}$$

$v_{\mathrm{p\,max}}$是问题空间中工作模的最大波相速。一般选取 $\Delta t=\Delta/(2v_{\mathrm{p\,max}})$，$\Delta$ 是 Δx、Δy 和 Δz 的最小值。

⑷ 决定问题空间的大小。在直角坐标系中，问题空间一般为平行六边形，沿 3 个轴向边长 $L_x=N_x\Delta x$，$L_y=N_y\Delta y$，$L_z=N_z\Delta z$。N_x、N_y 和 N_z 分别是沿 3 个轴向上单元的总数。它们的选择应考虑下列因素：⑴能将被研究的媒质“装入”；⑵边界条件的设置需在每一个轴向上占用约 4 个单元；⑶信号源的设置位置；⑷连接边界的设置(将总场与散射场分区域)。一般地讲，被研究媒质的边界与全空间边界的间隔，宜选用 6~10 个网格单元。

⑸ 沿网格空间的外表面设置吸收边界条件。通常对二维和三维空间，宜用二阶近似的边界条件。对一维问题应用一阶近似条件。

⑹ 选用和设置激励源。频域 FDTD 计算时，激励源一般为时谐波形式。对于时域计算，激励源一般是时变冲击函数形式，此时需考虑源的频谱分布，特别是最高频率成分(对应 $\lambda_{\min}$)，这个值又是决定网格单元尺寸和时间步长的依据。

⑺ 决定运算的总时间步数。频域计算时，由于源是谐变场，为了使得散射体内外场达到稳定状态，计算的总时间至少大于 3 个谐变周期 T，即时间步数为

$$N_t\geqslant 3T/\Delta t$$

对于时域计算，设 $t\leqslant 0$ 时，时变脉冲源场值等于零，脉冲的持续期为 T_{d}。由于它包含一定宽度的频谱，应使主要频谱部分的信号达到稳定状态，特别应使低端频谱信号达到稳定状态，所需的总时间一般比 T_{d} 大得多。可以

用逐渐增加时间步使得计算结果收敛的方法来决定所需时间步的最小值。

(8) 估算计算存储量。这涉及如下诸因素：①空间网格点的 6 个场分量值，总数为 $6\times N_x\times N_y\times N_z$；②计算空间各网格单元电参数($\varepsilon$、$\sigma$、$\mu$)的赋值，通常电参数仅是位置的函数，某些媒质还应考虑在 3 个轴向上有不同的值；③时域计算时，需存储某些空间场点上的时域信息(时间步数为 N_t)；④ 由计算的场值推演派生而得所需参数的空间、时间分布等。当计算空间尺寸大于 5 个波长时，一般均占用较大的存储量。因此在 FDTD 计算预测时，应尽可能减少存储量，节省计算时间，以提高 FDTD 计算效率。

13.6　FDTD 法模拟微带器件的等效网络参数*

本节以微带器件的等效网络参数模拟说明 FDTD 法的应用。相当一部分微带器件如谐振器、定向耦合器、滤波器等由若干典型的微带不均匀性如导电薄

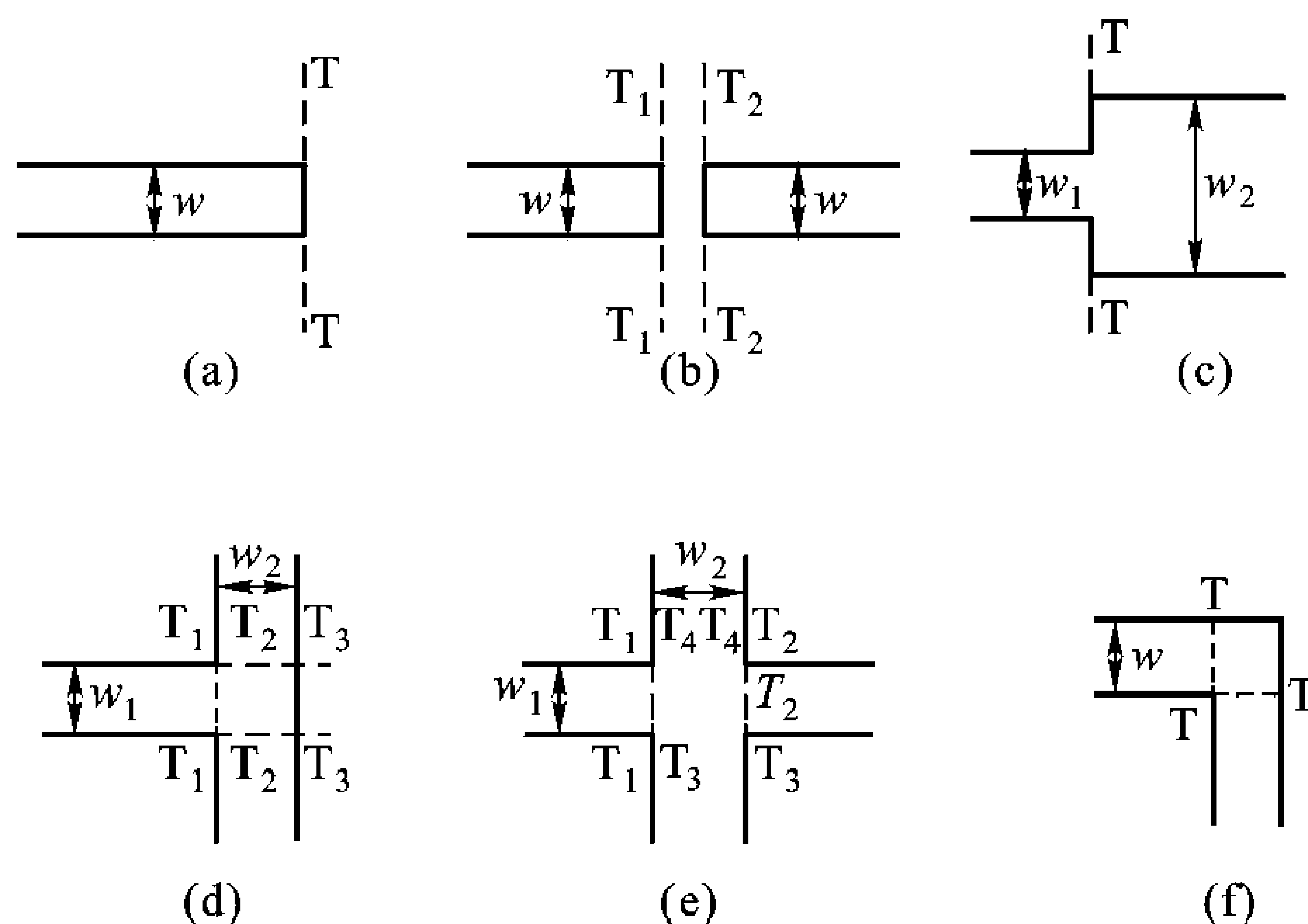


图 13－19　微带不均匀性

(a) 开路　(b) 缝隙　(c) 阶跃　(d) T 形接头

(e) 十字形接头　(f) 拐弯

带终端开路、隙缝、宽度阶跃、T 型接头、十字形接头和拐弯等构成(见图13－19)。用数值法对这些不均匀性进行精确模拟是微波 CAD 技术中的一个重要课题。若有了不均匀性的频域特性，就可用网络概念分析由它们连接而构成的微带器件的特性。当然也可用 FDTD 法直接分析由这些不均匀性组成的复杂电

---

* 本小节微带十字形和 T 形接头、微带低通滤波器、微带支线定向耦合的数值模拟结果取自高本庆《时域有限差分法》。

路。本节先以微带导电薄片终端开路、隙缝、T 形、十字形接头为例，说明 FDTD 法的应用概貌，再以微带低通滤波器、微带支线定向耦合器说明 FDTD 法在模拟复杂微带电路等效网络参数时的应用。

导电薄片终端开路微带线

开路微带线结构模型示于图 13－20（a）。因为微带线的结构对称性，所以图 13－20（a）只画出对称面右边的一半。其中基片厚度 $H=0.6$ mm，导电薄带宽度 $w=0.6$ mm，基片的相对介电常数 $\varepsilon_r=9.6$。数值分析时，空间差分步长 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=\Delta h=H/10$。微带屏蔽盒截面尺寸为 $(N_1\Delta x)\times(N_2\Delta y)$，$N_1=40$，$N_2=120$。纵向长度为 $N_3\Delta z$，$N_3=190$。断开的导电薄带长度为 $l_1\Delta z$，$l_1=120$。l_1 要足够大，使得在端口面，高次模可忽略，只有基模在起作用。时间步长 Δt 的选择使得 $v_p\Delta t/\Delta h=0.514$。激励高斯脉冲宽度 $T=40\Delta t$，$t_0=350\Delta t$。

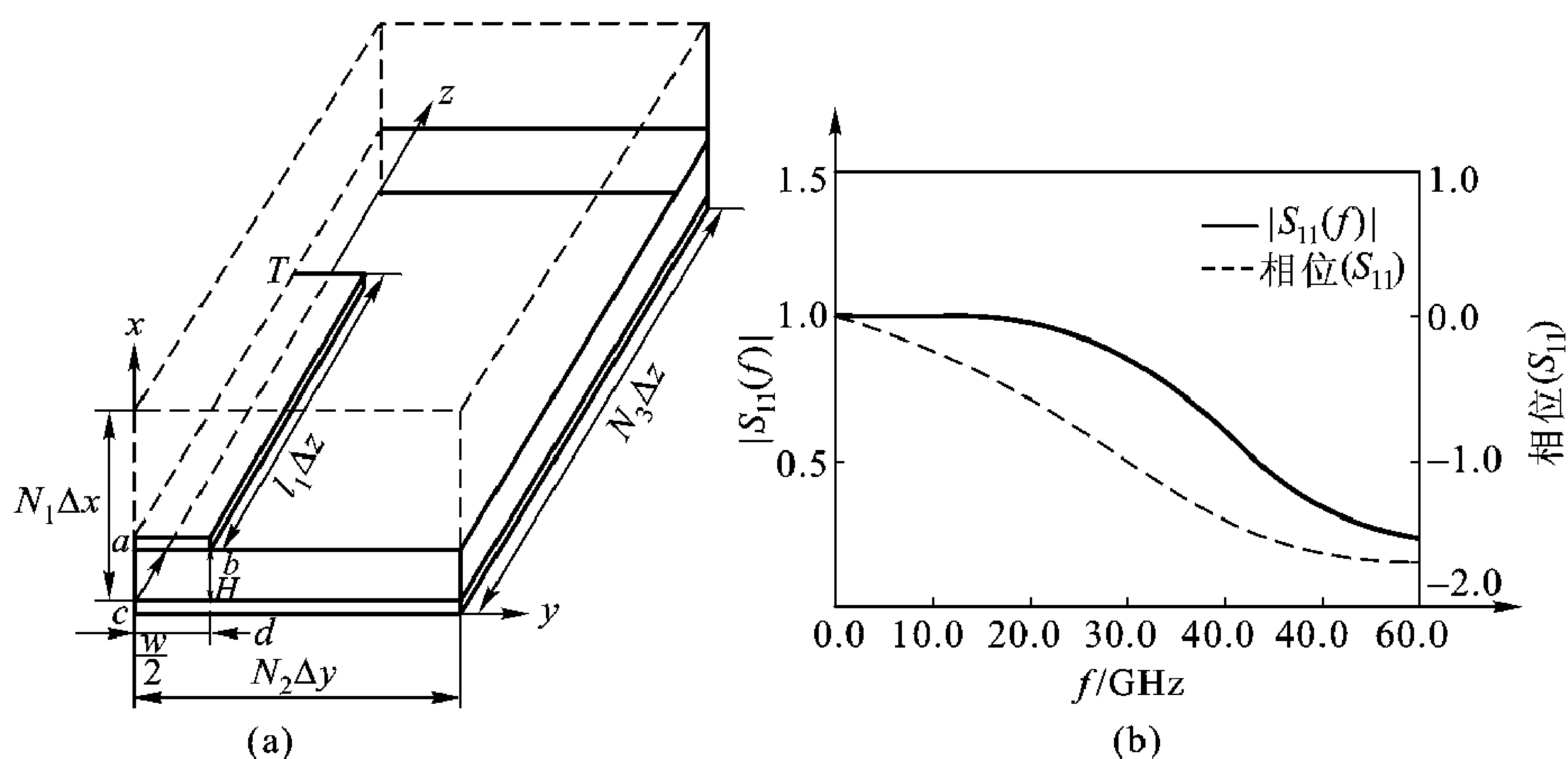


图 13－20　开路微带线及其 S 参数 S_{11}

（a）开路微带线　（b）S_{11}与频率关系

开路微带线是一端口网络，它的 S 参数就是反射系数 $S_{11}(\omega)$，有

$$S_{11}(\omega)=\frac{V^{r}(\omega)}{V^{i}(\omega)}=\frac{F[V^{r}(t)]}{F[V^{i}(t)]}\tag{13.6.1}$$

式中 $V^r(\omega)$、$V^i(\omega)$分别是端口所在表面时变反射波电压 $V^r(t)$与入射波电压 $V^i(t)$的傅里叶变换。FDTD 法求得的是入射波和反射波之和，为了得到入射波，将输入端的微带线无限延伸，或从输入端延伸到另一端的吸收边界处，记下入射波与上述合成波之差(入射波加反射波)，即得到端口的反射波，这样就可得到 Δt，$2\Delta t$，…，$n\Delta t$ 时刻 $V^r(t)$和 $V^i(t)$的离散值。

$S_{11}(\omega)$用 FDTD 法数值模拟的结果示于图 13－20 (b)。由图可见，微带导电薄片终端开路，低频时反射系数模$|S_{11}(\omega)|\approx 1$，微带线相当于开路传输线。频率提高时，由于导电薄片断开处的辐射，一部分能量辐射出去，反射系数模$|S_{11}(\omega)|<1$，频率越高，辐射损耗越大，$|S_{11}(\omega)|$越小。

微带隙缝

微带线尺寸与导电薄片终端开路的微带线[图 13－20(a)]相同，隙缝的尺寸 $S/H=0.5$。微带隙缝是二端口网络，其散射参数为

$$S_{11}(\omega)=\frac{V^{\mathrm{r}}(\omega,z_1)}{V^{\mathrm{i}}(\omega,z_1)}=\frac{F[V^{\mathrm{r}}(t,z_1)]}{F[V^{\mathrm{i}}(t,z_1)]} \tag{13.6.2}$$

$$S_{22}(\omega)=\frac{V^{\mathrm{r}}(\omega,z_2)}{V^{\mathrm{i}}(\omega,z_2)}=\frac{F[V^{\mathrm{r}}(t,z_2)]}{F[V^{\mathrm{i}}(t,z_2)]} \tag{13.6.3}$$

$$S_{21}(\omega)=\frac{V^{\mathrm{t}}(\omega,z_2)}{V^{\mathrm{i}}(\omega,z_1)}=\frac{F[V^{\mathrm{t}}(t,z_2)]}{F[V^{\mathrm{i}}(t,z_1)]} \tag{13.6.4}$$

$$S_{12}(\omega)=S_{21}(\omega) \tag{13.6.5}$$

式中 $V(\omega,z)$为相应时变量 $V(t,z)$的傅里叶变换，上标 r、i、t 分别表示入射波、反射波、传输波。z_1 表示端口 1 位置坐标，z_2 表示端口 2 位置坐标。图 13－21 给出微带隙缝的散射参数曲线。在直流和频率很低时，能量被隙缝阻隔，全部被反射回去($|S_{11}|=1$，$|S_{21}|=0$)，随着频率升高，能量将通过空间场耦合到缝隙另一侧，并且随频率升高，$|S_{11}|$减小和$|S_{21}|$增加。

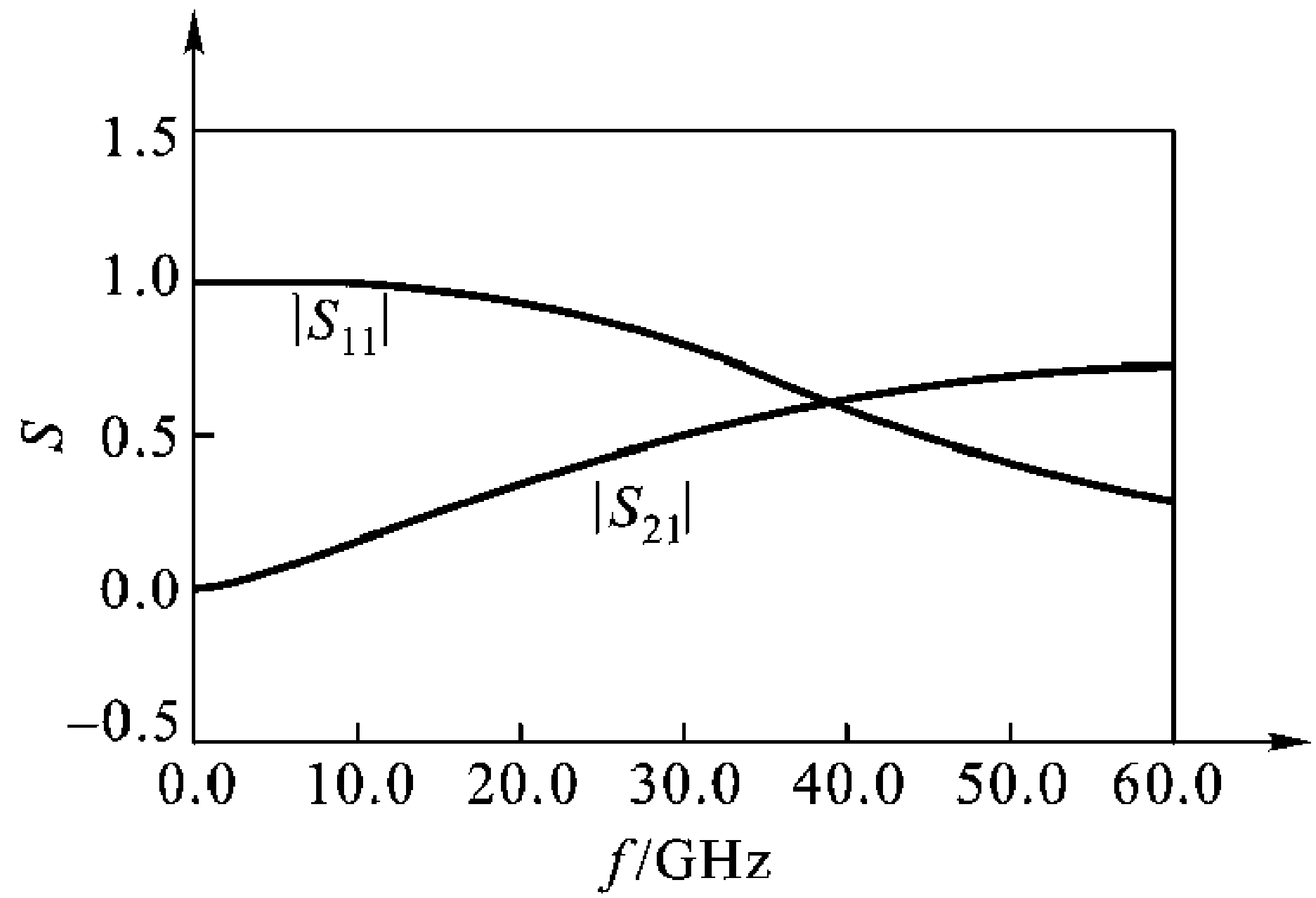


图 13－21 微带隙缝的散射参量

微带十字形和 T 形接头

微带线基本结构及坐标仍然如同图 13－20 (a)，$H=0.6$ mm，$w_1=w_2=0.6$ mm，空间网络 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=\Delta h=H/8$，$\Delta t=0.514\Delta h/v_{\mathrm{p}}$，$N_1=30$，$N_2=65$，$N_3=180$。源平面位于微带输入端导电薄带下方，也用高斯脉冲激励，$T=40\Delta t$，$t_0=350\Delta t$。

图 13－22 和图 13－23 分别表示高斯脉冲在微带十字接头和 T 形接头处传播和反射的瞬时分布情形(取带线下方的 E_x 分量，同时坐标轴起始点作了平移)。当高斯脉冲抵达十字接头处时，被分成 4 部分，一部分传向对面支线 2，

一部分传向二侧支线(3,4)，一部分向输入支线1反射(图13-22中仅表示了支线1、2、3中的分布)。而当高斯脉冲抵达T形接头时，可以看出仅有很小量的表面波穿过接头，大部分能量或传入二侧支线，或向原支线反射。

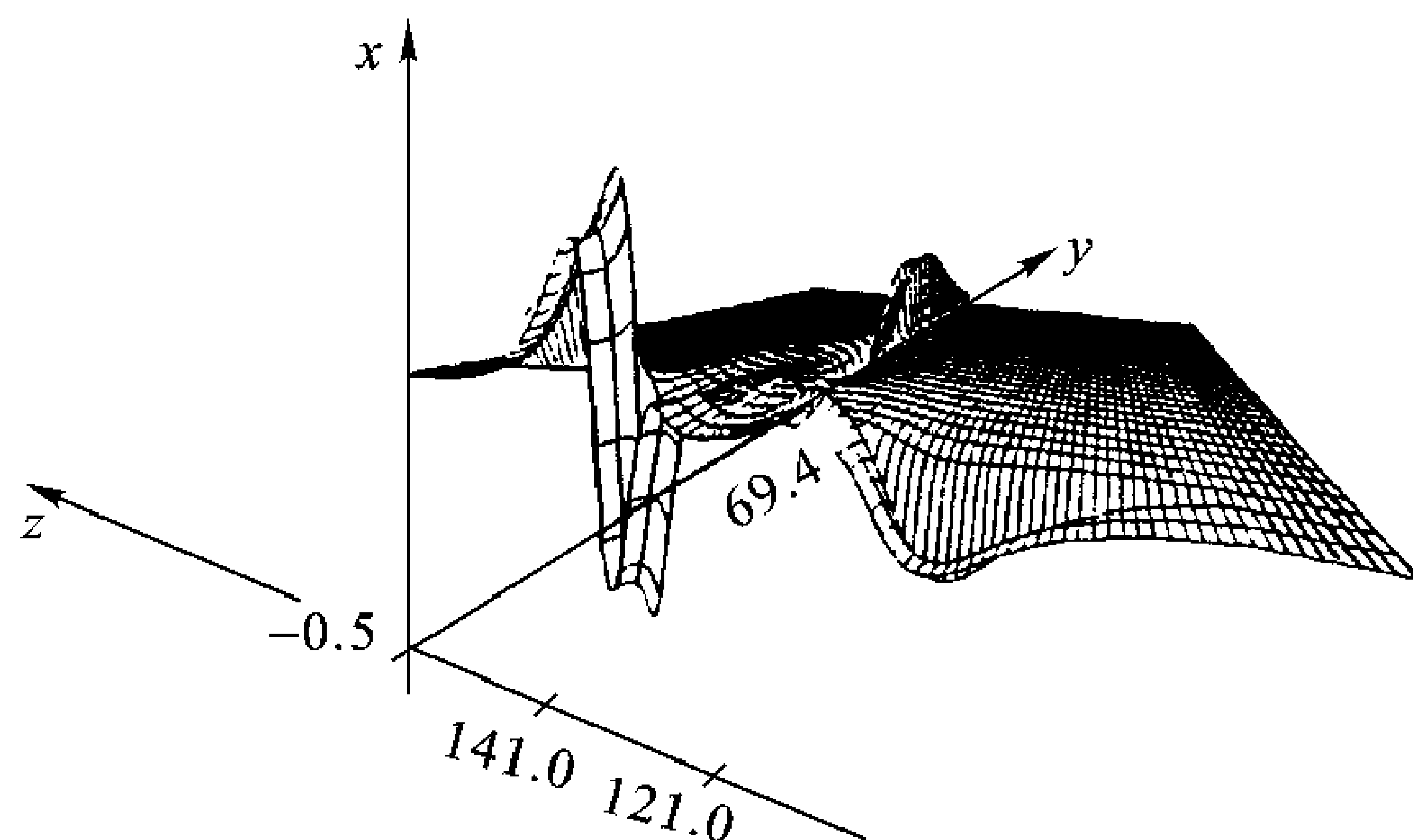


图13-22　高斯脉冲在微带十字形接头处的散射和传输

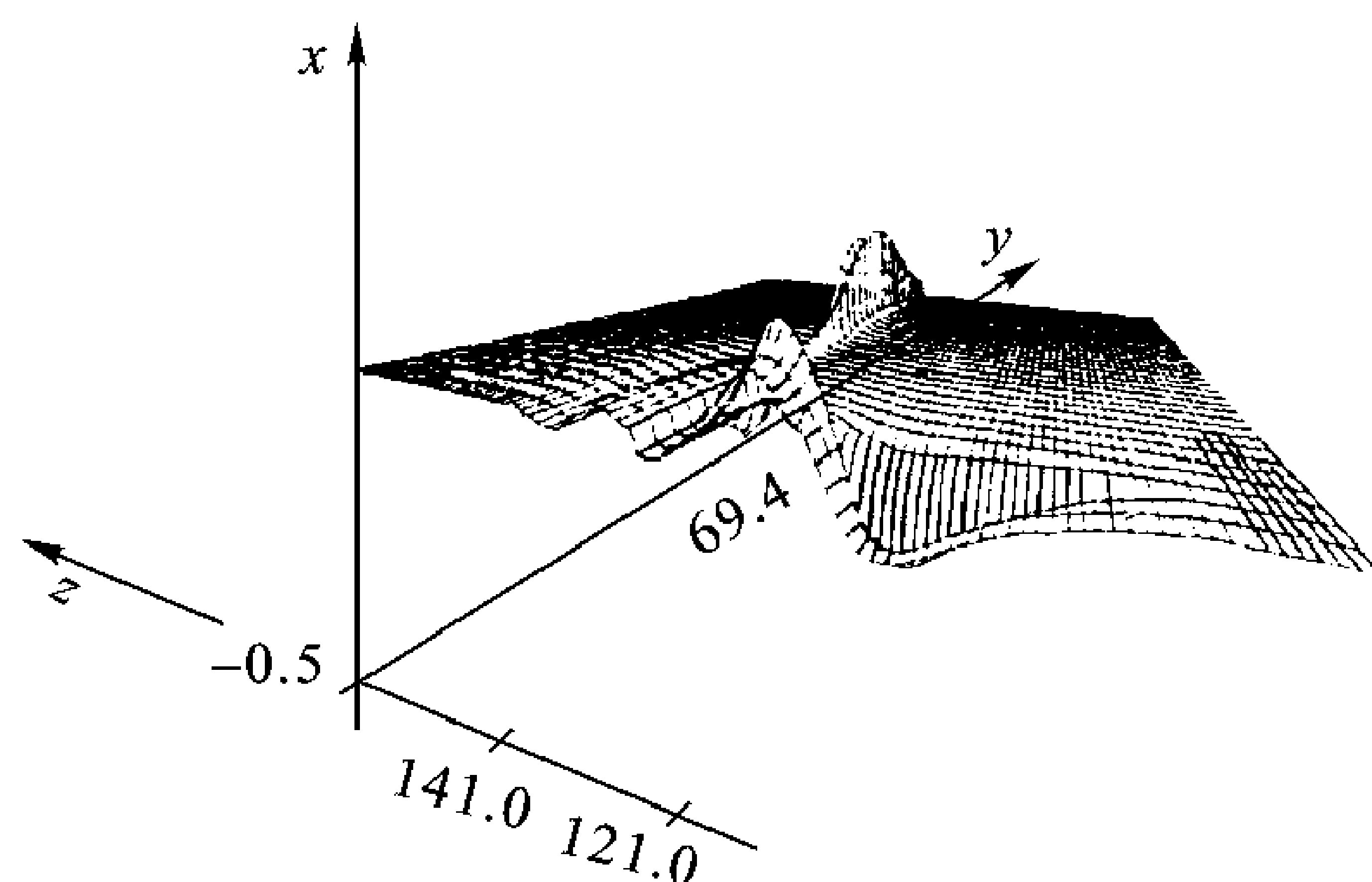


图13-23　高斯脉冲在微带T形接头处的反射和传输

取适当参考面(见图13-19)，根据S参数的定义[类似于式(13.6.2)~(13.6.5)]可以求得十字形接头和T形接头的散射参数。图13-24为十字接头的散射参量S_{11}、S_{21}和$S_{31}(=S_{41})$对频率的关系曲线，同时给出Mehran的结果(虚线)供比较。在DC和低频段上，各参数值为0.5，表示向各口传输或反射的能量大小为1/4，即平分总输入能

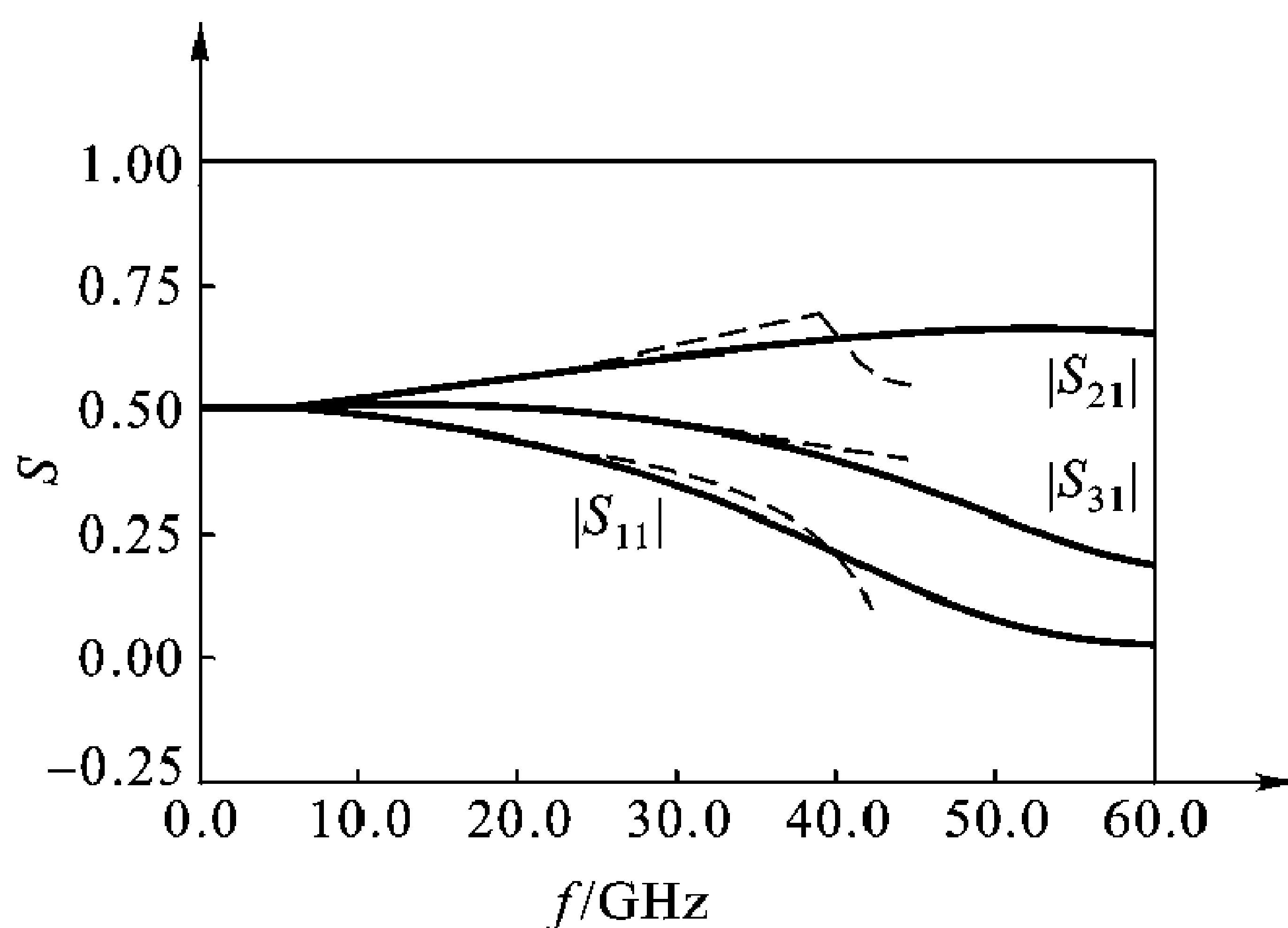


图13-24　微带十字形接头散射参量

量，这是符合散射矩阵惟一性条件的（$|S_{11}|^2+|S_{21}|^2+|S_{31}|^2+|S_{41}|^2=1$），因为在低频段没有可观的辐射存在。T形接头的频域散射参量曲线见图13-25。图中S_{11}、S_{21}（$=S_{31}$）同样在低频段满足散射矩阵的惟一性。对于上述二图的低频段，FDTD与Mehran数值均吻合得很好，而在高频段均出现差异。其原因部分是由于在Mehran的结果中没有考虑高频段表面波的效应和辐射的存在，部分是由于当频率高于3 GHz时，时域的结果没有精确地表示出主模的参量。

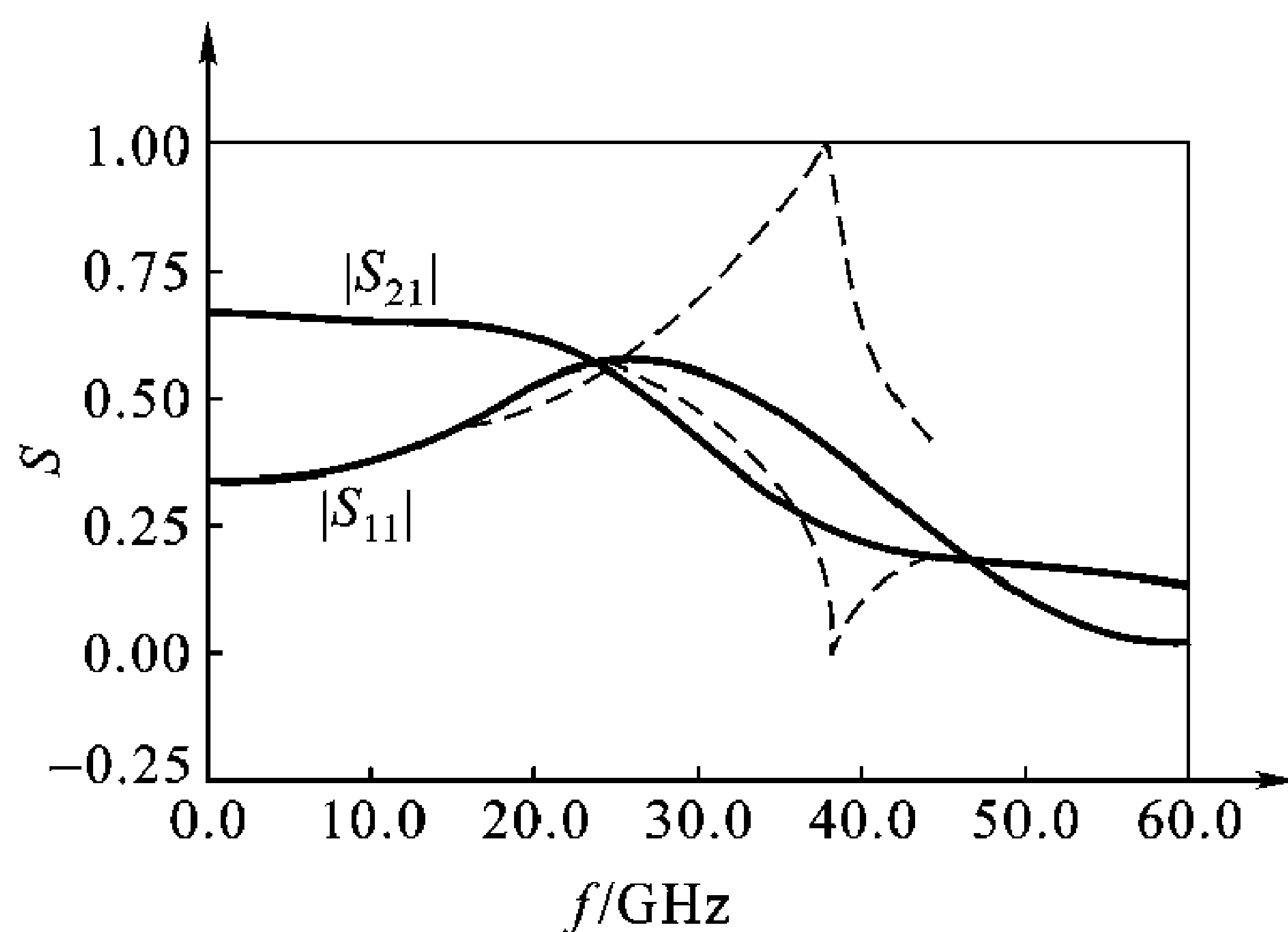


图13-25 微带T形接头的散射参量

微带低通滤波器

滤波器的结构和尺寸见图13-26（a）。全部计算空间被分成边长为Δx、Δy和Δz的网格，令$\Delta x=0.265$ mm，$\Delta y=0.406\,4$mm，$\Delta z=0.423\,3$mm；沿x、y、z轴向的网格数分别是16、80和100。沿y向导带在y、z向的尺寸分别是$50\Delta y$和$6\Delta z$，但支线（z向导带）1和2的宽度和位置则近似等于Δy的倍数，其宽度近似等于$6\Delta y$。在支线1、2上，选距离y向导带边$10\Delta z$处为参考面。

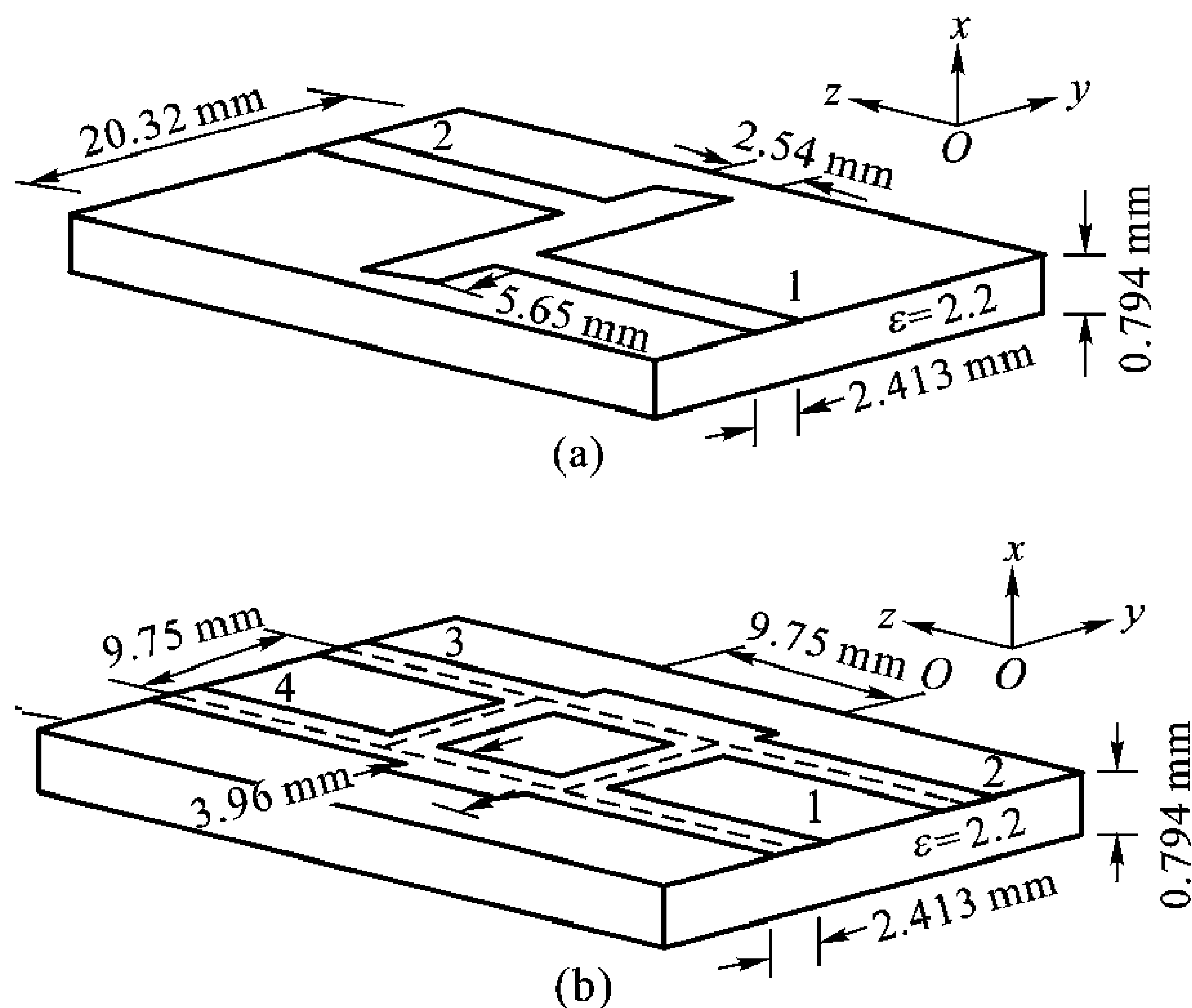


图13-26 微带元件简图

（a）低通滤波器 （b）支线耦合器

将激励源面设置在支线 1 上距离参考面为 $40\Delta z$ 处，取时间步长 $\Delta t = 0.441$ ps。激励源为高斯脉冲：$E_z = \exp[-(t-t_0)^2/T^2]$，$T = 15$ ps，$t_0 = 3T$。为了改善激励脉冲沿微带线的传输，将一个磁壁加到源面上，磁壁的形成利用了镜像原理，即令磁壁外侧的切向磁场分量等于磁壁内切向磁场分量的负值。考虑到微带线上波传播的特点，其场分量大都集中在导带与接地板间的介质层内，带线上的脉冲将垂直入射到网格壁上。这使得吸收边界条件可以简化，即在边界面垂直方向上场满足一维波方程，对于法向为 z 轴向的一维波方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{v_z}\frac{\partial}{\partial t}\right)E_{\mathrm{t}} = 0 \tag{13.6.6}$$

这正是 13.5 节中介绍的一阶近似吸收边界条件，相应的有限差分方程式为

$$E_{\mathrm{b}}^{n+1} = E_1^n + \frac{v_z\Delta t - \Delta z}{v_z\Delta t + \Delta z}(E_1^{n+1} - E_{\mathrm{b}}^n) \tag{13.6.7}$$

式中 E_{b} 表示边界面上切向电场分量，E_1 表示靠近边界壁的内部网格面上的切向电场分量，v_z 是 z 向波的传播速度。

由于激励源脉冲在微带上建立、传输和在不均匀处反射再传输等均需要一定的时间过程，故场在微带元件上的空间分布将随时间而异。图 13－27 为介质分界面下方 $E_x(y,z,t)$ 在时间步为 200、400、600 和 800 时的空间分布情况。用于计算的总时间步取为 4 000，此时二个支线上的电场分布近似接近于零值。计算所得的散射参量值及相应的实验值示于图 13－28，在很宽的频带上，二者的一致性较好。所要求的低通滤波性能在低频端较好，大约从 $f = 5$ GHz 开始 S_{21} 值急剧下降，在高频端又一次下降，并有某些偏移。关于止带特性，其计算曲线宽度稍比测量曲线宽度小一些。根据某些平面电路的实验情况来看，这种变窄主要是由于所选 Δy、Δz 值造成支线位置的偏差所引起的。

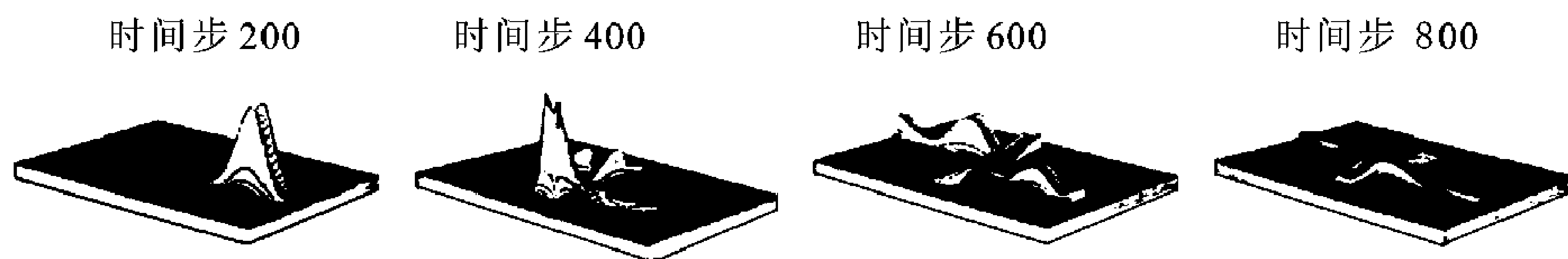


图 13－27　低通滤波器介质分界面下方 $E_x(y,z,t)$ 的分布

微带支线定向耦合器

图 13－26 (b) 表示微带支线定向耦合器的结构和尺寸，它是由 4 根 z 向支线和方形环线连接而成。当环线的中心到中心距离选择为 1/4 波长时，由支线 1 或 2 输入的能量将被等分并由 3、4 输出，且 3、4 支线间有 90°的相移。FDTD 分析时，取网格尺寸 Δx、Δy 和 Δz 尽可能地与电路尺寸相匹配。选

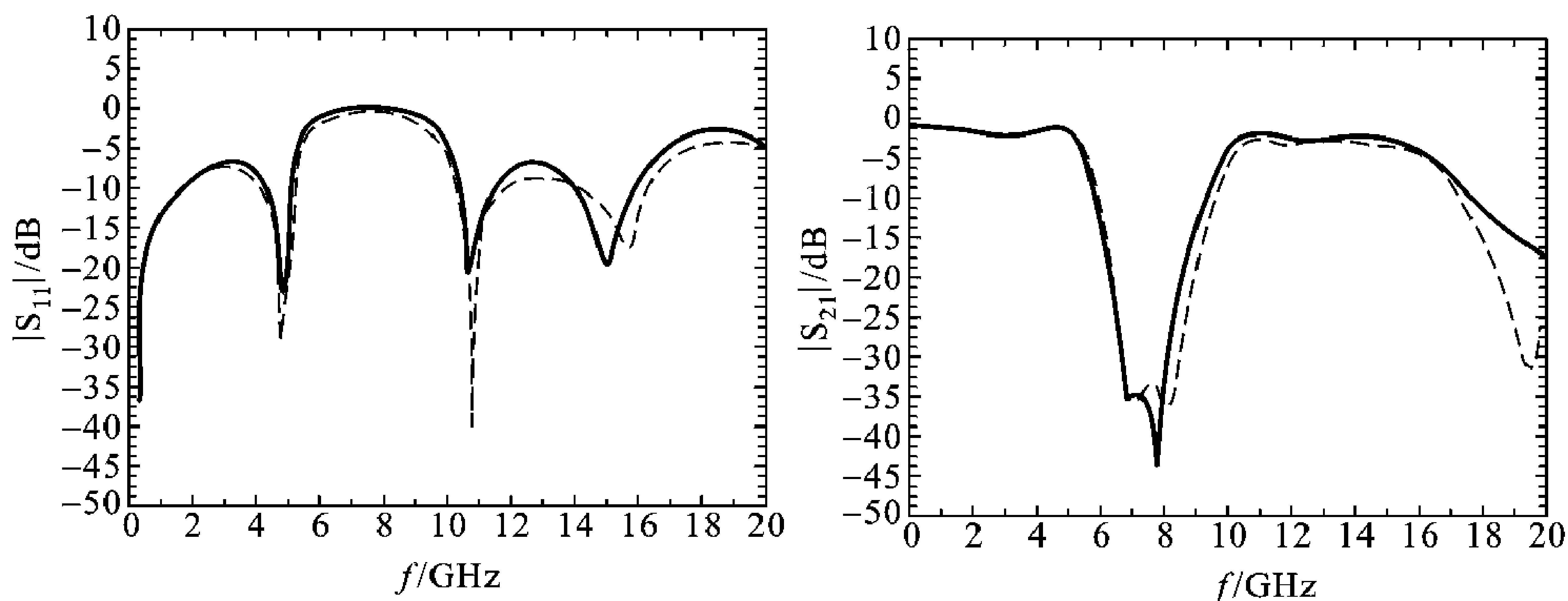


图 13 - 28　低通滤波器的散射参量

（a）$|S_{11}|$　（b）$|S_{21}|$

注：- - - 测量；—— 计算。

$\Delta x = 0.265$ mm，$\Delta y = \Delta z = 0.406$ mm，则中心到中心距离(9.75 mm)为 $24\Delta y$ 和 $24\Delta z$，基片厚度为 $3\Delta x$，4 个支线宽度为 $6\Delta y$，耦合器较宽带的宽度为 $10\Delta y$。各支线上参考面距离耦合器环线边缘为 $10\Delta z$，激励源面距离参考面为 $40\Delta z$。计算空间沿 x、y 和 z 轴向网格数分别是 16、60 和 100。所用的时间步长、总时间步数、激励脉冲的参数以及求散射参数的过程均与上述低通滤波器相似。计算所得散射参量的频率特性示于图 13 - 29 (a)，计算值与实验值吻合较好。特别是在曲线的交点和"零点"的位置上一致性较好。如图所示，S_{11}和 S_{21}的"零点"位置在 $f \approx 6.5$ GHz 上，此点亦是 S_{31}和 S_{41}的交点，该点处二者近似为

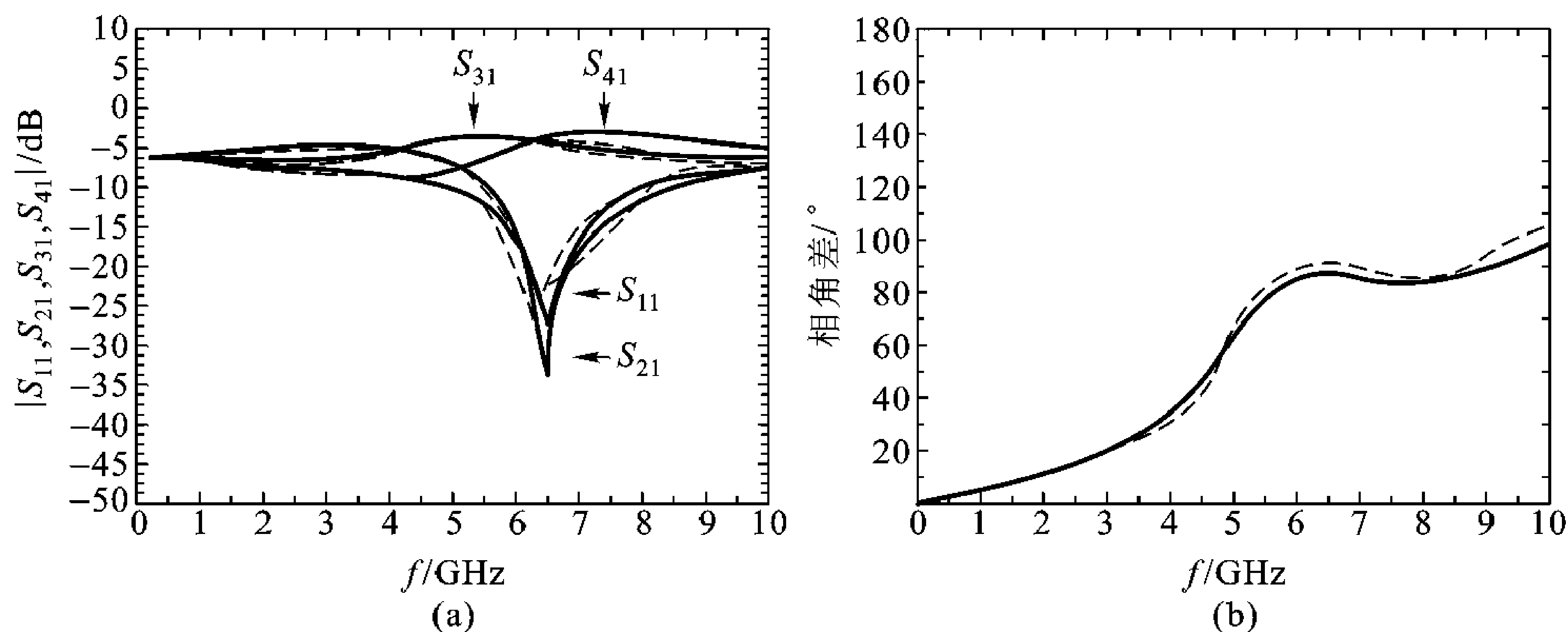


图 13 - 29　微带支线定向耦合器的散射参量

（a）散射参量的大小　（b）3、4 支线间相差

注：- - - 测量；　——计算。

-3 dB，表明功率是在 3、4 支线间等分的。在工作频率上 S_{11}和 S_{21}的"零点"表示有少量功率在支线 1 和 2 上传输。在工作点($f \approx 6.5$ GHz)上 S_{31}和 S_{41}间的相位差近似等于90°，理论和实验值均如此[见图 13-29(b)]。总之所得结果与预定值很一致。S_{11}和 S_{22}二曲线"零值"间的偏移可能是由于线的宽度偏移网格尺寸的整倍数之故。另外数值计算时，未计及介质和导体中的损耗等亦是造成误差的一个原因。这个误差原因对上面分析低通滤波器的误差亦是适用的。

13.7　谐振法数值模拟波导器件的网络参数

谐振法模拟波导器件的网络参数，其要点是设想在离开波导器件端口适当位置将端口短路，构成一封闭的谐振器。通过对该虚拟谐振器谐振频率的数值模拟得出该波导器件的网络参数。

13.7.1　谐振法模拟二端口网络 *A* 参数

图 13-30 (a)是连接两不同特征阻抗的微带过渡器，端口 A 微带线的导带宽度 w_1 比端口 B 导带宽度 w_2 要小，即 $w_1 < w_2$，它把 A 端较高特征阻抗 Z_a 的微带线在虚线所示范围内过渡到较低特征阻抗 Z_b 的微带线。此外，以波长作计量单位端口 A、B 离开不均匀处足够远。

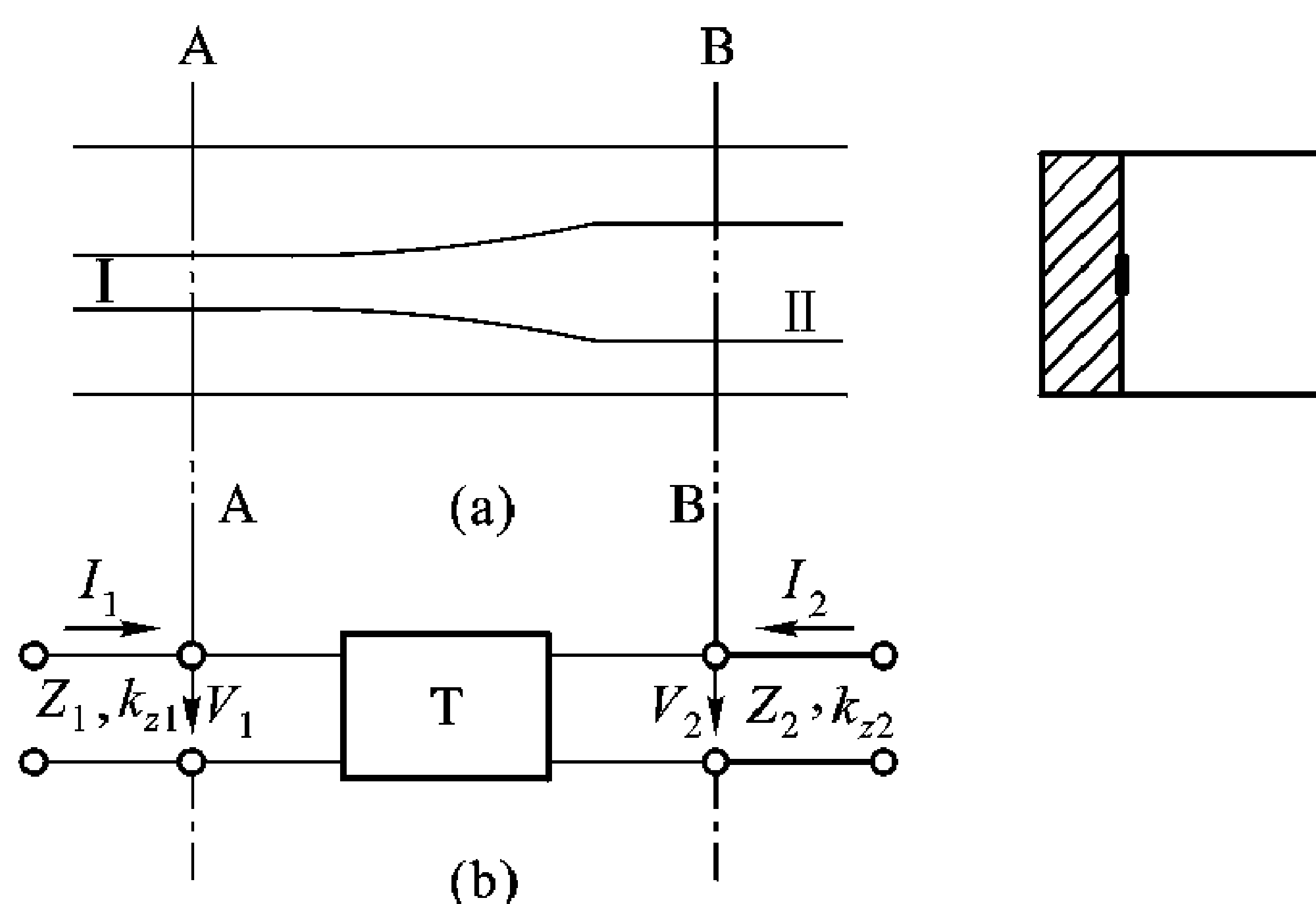


图 13-30　不均匀微带线及其等效网络

(a) 不均匀微带线　(b) 等效网络

当基模电磁波由微带线 I 向右传播遇到虚线之内的不均匀区域时，将激励起其他高次模式。如果微带线 I 与 II 都只能传播基模，则在离开不均匀部分足够远的 AA、BB 面，高次模已衰减到可以不予考虑。AA 面左边的微带线 I 与 BB 面右边微带线 II 只有基模在传播并可以用传输线等效。包括不均匀区在内

的 AA－BB 面间这段过渡微带线，对基波而言可用一网络表示，这样就得到 13－30 (b)所示的等效电路。

已经假定，微带线上只传播基波，网络 T 只有 4 个元素，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

通过网络 T，AA 面与 BB 面上电压、电流的变换关系为

$$\begin{bmatrix}V_1\\ I_1\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}V_2\\ -I_2\end{bmatrix} \tag{13.7.1}$$

若定义 BB 面上的阻抗 $Z_b=V_2/I_2$，AA 面上阻抗 $Z_a=V_1/I_1$，其阻抗变换关系为

$$Z_a=\frac{A_{11}Z_b+A_{12}}{A_{21}Z_b+A_{22}} \tag{13.7.2}$$

所以不均匀区对外部的影响，只要知道网络 A 的参数就足够了。

为确定网络参数 A，需要进行 4 次独立的测量实验。如图 13－31 (a)，将微带线 Ⅰ、Ⅱ 分别在离开 AA、BB 面 l_1、l_2 处短路而形成一个谐振器，测出该系统的谐振频率 ω。如选择 AA 为参考面，谐振时

$$\vec{Z}_a+\overleftarrow{Z}_a=0 \tag{13.7.3}$$

式中

$$\overleftarrow{Z}_a=\mathrm{j}Z_1\tan k_{z1}l_1$$

$$\vec{Z}_a=\frac{A_{11}\vec{Z}_b+A_{12}}{A_{21}\vec{Z}_b+A_{22}}$$

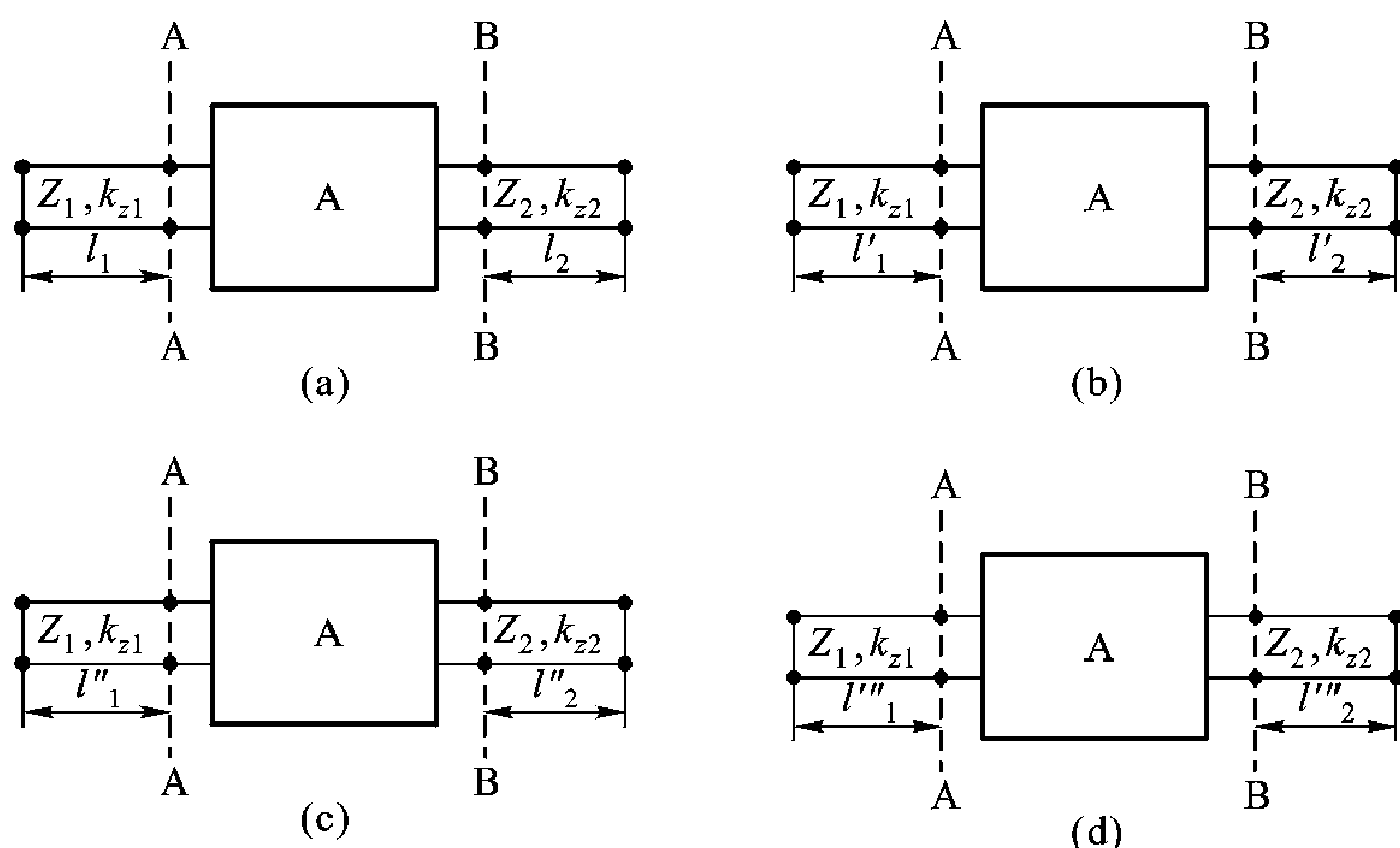


图 13－31　假想实验系统

$$\vec{Z}_b = jZ_2\tan k_{z2}l_2$$

将 $\vec{Z}_a$、$\overleftarrow{Z}_a$ 代入式(13.7.3)得到

$$jZ_1\tan k_{z1}l_1 + \frac{jZ_2\tan k_{z2}l_2A_{11} + A_{12}}{jZ_2\tan k_{z2}l_2A_{21} + A_{22}} = 0 \tag{13.7.4}$$

现在改变 l_1 为 l'_1，调节 l_2，使得 $l_2 = l'_2$，系统仍然在 ω 谐振，如图 13－31 (b)，再改变 l_1 为 l''_1、l'''_1，再调节 l_2，使得 $l_2 = l''_2$，l'''_2 时系统又二次在 ω 谐振，如图 13－31 (c)和(d)，后三次谐振满足的关系式为

$$jZ_1\tan k_{z1}l'_1 + \frac{jZ_2\tan k_{z2}l'_2A_{11} + A_{12}}{jZ_2\tan k_{z2}l'_2A_{21} + A_{22}} = 0 \tag{13.7.5}$$

$$jZ_1\tan k_{z1}l''_1 + \frac{jZ_2\tan k_{z2}l''_2A_{11} + A_{12}}{jZ_2\tan k_{z2}l''_2A_{21} + A_{22}} = 0 \tag{13.7.6}$$

$$jZ_1\tan k_{z1}l'''_1 + \frac{jZ_2\tan k_{z2}l'''_2A_{11} + A_{12}}{jZ_2\tan k_{z2}l'''_2A_{21} + A_{22}} = 0 \tag{13.7.7}$$

式(13.7.4)～(13.7.7)即可确定网络参数 A_{11}、A_{12}、A_{21}、A_{22}。

通过实际测量确定网络参数，结果可靠，但需要昂贵的测量装置与熟练的技能。确定网络参数的又一途径是计算机模拟，不是通过测量，而是通过数值分析，计算系统的谐振频率。模拟的过程是，选定(l_1, l_2)一组值，计算图 13－31 (a)所示系统的谐振频率 ω，使 l_1 有一个小的增量 $l_1 + \Delta l_1 = l'_1$，逐步改变 l_2，计算系统的谐振频率，直到 $l_2 + \Delta l_2 = l'_2$，系统仍谐振在 ω，如图 13－31 (b)，又得到一组(l'_1, l'_2)。重复上述步骤，再得到二组(l''_1, l''_2)、(l'''_1, l'''_2)系统仍在 ω 谐振。l_1，l_2 这 4 组值，通过(13.7.4)～(13.7.7)就可以确定网络参数。如果利用网络的某些性质，如无耗可逆等性质，得出网络参数满足的关系，数值模拟系统虚拟谐振的次数就可减少。数值模拟的优点是，由于没有必要改变实际谐振系统的尺寸，具有很大的灵活性。当然数值模拟的结果是否正确还得用实验来验证。

系统谐振频率的模拟，谱域法、模式匹配法、有限元法、时域有限差分法等都是可以选用的。

图 13－32 给出了微带多级阶跃不连续的等效网络参数与频率的关系曲线。微带线Ⅰ，Ⅱ导电薄片宽度分别为 W_1、W_2，过渡段微带导电片宽度为 W_m，长为 l_m。微带线不均匀区的具体尺寸已在图中标出。

13.7.2　谐振法模拟 *N* 端口网络 *S* 参数

前面介绍的谐振法，对于二端口网络，4 个参数，要进行 4 次测量。如果是三端口网络，9个参数，要9次测量。Jansen提出一种改进方法，不仅利用

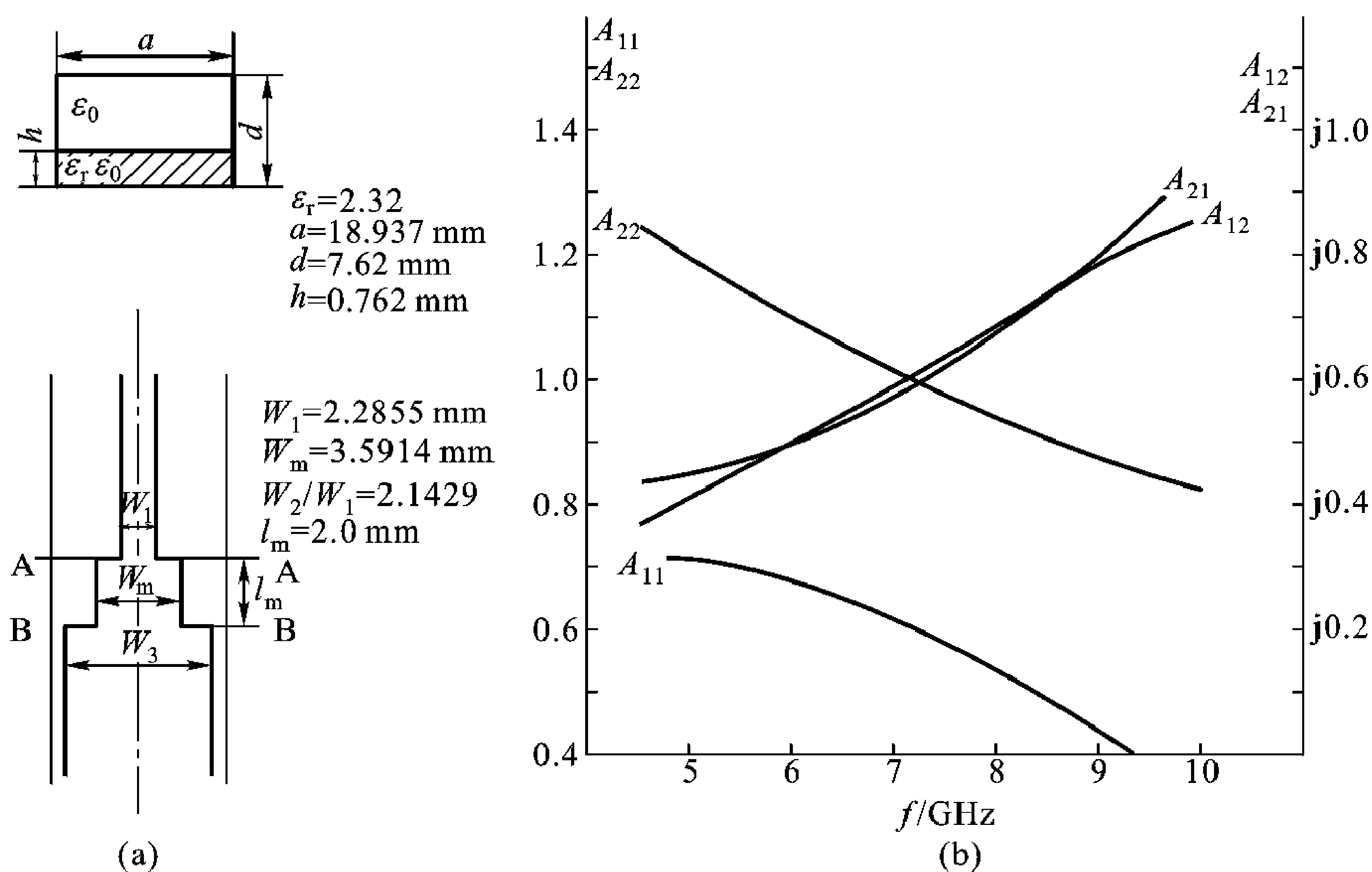


图 13－32　微带线阶跃不连续及其等效网络参数

虚拟谐振器的谐振特性，还利用谐振时在 AA、BB 面上的相位关系。N 端口网络参数只要进行 n 次模拟即可，大大减少了测量或数值模拟工作量。图 13－33 给出了 Jansen 模拟多端口波导器件等效网络参数的思路。

图 13－33 (a)给出的是一个 N 端口器件，在离开端口适当距离被短路而构成谐振器，(b)是该结构的等效电路。(c)给出任意 N 端口网络 S 参数确定过程。

从端口向器件内部看，用 S 参数表示时有关系

$$[b]=[S][a] \tag{13.7.8}$$

从端口向外面看，即向各短路面看，又有关系

$$[b]=[D(l)][a] \tag{13.7.9}$$

$[D(l)]$是一个对角矩阵，对角线上第 i 个元素

$$[D(l)]_{ii}=-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\beta_i l_i}$$

β_i 为第 i 端口所连波导等效传输线的传播常数，l_i 为第 i 端口到短路面距离。谐振时应当有

$$([S]-[D(l)])[a]=0 \tag{13.7.10}$$

数值模拟的过程是，给定一组$(l_{01},\ l_{02},\cdots,l_{0n})$，数值模拟该虚拟谐振器的谐振频率 f_0，同时利用式(13.7.9)得到端口入射波列向量$[a_{01}]$，反射波列向量$[b_{01}]$；然后改变$(l_{01},l_{02},\cdots,l_{0n})$使得$(l_{01}+\Delta l_{01}^{(1)},l_2+\Delta l_{02}^{(1)},\cdots,l_{0n}+$

图 13-33 N 端口网络不连续性分析

(a) N 端口器件 (b) 等效电路 (c) S 参数确定过程

$\Delta l_{0n}^{(1)}$）时，虚拟谐振器又在 f_0 谐振，同时又得到入射波列向量$[a_{02}]$，反射波列向量$[b_{02}]$，如此重复 N 次，得到$[a_{0n}]$、$[b_{0n}]$；最后将 N 次数值模拟结果$[a_{0i}]$、$[b_{0i}]$排列成矩阵$[A_0]$和$[B_0]$，即

$$[A_0]=([a_{01}],[a_{02}],\cdots,[a_{0n}]) \tag{13.7.11}$$

$$[B_0]=([b_{01}],[b_{02}],\cdots,[b_{0n}]) \tag{13.7.12}$$

显然

$$[S]=[B_0][A_0]^{-1} \tag{13.7.13}$$

这样 N 端口网络只要通过 N 次模拟就能得到 N 端口网络的 S 参数。

本章要点

- 波导及波导器件特性的数值模拟对于优化设计、缩短设计周期、降低设计成本越来越重要。
- 模式匹配法确定不连续面的等效网络参数，首先将不连续面两边波导用传输线等效，确定相应波导的模式函数，并将不连续面两边场量用模式函数展开，然后利用不连续面边界条件，得出不连续面两边传输线上电压－电流变换关系，这变换关系可用网络表示。
- 谱域法数值模拟微带线特性先将微带线等效为横向有源网络，其中导电薄片相当于一个二次电流源，对导电薄片所在平面场量进行空间傅里叶展开，得出谱域中导电薄片所在平面表面电流与切向电场关系。再根据导电薄片所在平面切向电场与表面电流乘积处处为零这一事实，利用巴塞伐尔定理，就可由谱域中导电薄片所在平面电场与电流关系得出决定 $k_z \sim \omega$ 的色散方程。该方程可以用数值法求解。
- 有限元法把利兹(Ritz)法与差分法结合起来，理论上以变分原理为基础，具体方法上利用了差分离散处理的优点，解决了在全定义域上寻找合适基函数的问题。有限元法第一步把求解微分方程问题等价为变分问题，然后通过离散化处理，构造一个分片解析的有限元子空间，把变分问题近似地转化为有限元子空间中的多元函数极值问题。把变分问题近似解作为所求方程近似解。
- 时域有限差分法(FDTD)不仅在空间域而且在时间域对场量离散，用差分近似微分，得到麦克斯韦方程在一定初值与边值条件下的近似值。使用 FDTD 法时要注意，空间步长 Δx、Δy、Δz 与时间步长 Δt 的选择要满足稳定性条件，初始激励脉冲的选择很重要。FDTD 法应用中最困难的是开放边界条件的处理。
- 用谐振法模拟器件的网络参数，先将要模拟的器件置于虚拟的谐振器中，虚拟谐振器的谐振特性(如谐振频率 ω，场分布)与所模拟器件网络参数有关；然后用数值法(如谱域法、模式匹配法、有限元法、FDTD 法等)计算虚拟谐振器的谐振频率，从而决定所模拟器件的网络参数。Janson 提出的谐振法不仅利用谐振频率 ω_0，还要利用谐振时在网络端口场的相位信息，这样 N 端口网络只要进行 N 次模拟即可。

习题

13.1 简述用模式匹配法求阶跃不连续面等效网络参数的思路与过程。

13.2 简述谱域法的基本思路与要点。

13.3 简述有限元法的基本思路与要点。

13.4 简述 FDTD 法的基本思路与要点。

13.5 比较时域差分法、谱域法、有限元法、模式匹配法。

13.6 简述谐振法模拟不均匀区等效网络参数的基本思想。

13.7 选择你感兴趣的一种数值计算方法，计算某一种波导、谐振器或天线的特征参数。

主要参考书目

英文版

1. Liang Chi Shen, Jin Au Kong. Applied electromagnetism. Wadsworth Inc, 1983
2. Fawwaz T Ulaby. Fundamentals of applied electromagnetics. Prentice Hall Inc, 1997
3. Stanley V Marshall, Gabriel G Skitek. Electromagnetic concepts and applications. Prentice Hall Inc, 1987
4. Jin Au Kong. Electromagnetic Wave Theory. EMW Publishing, 2000
5. Jin Au Kong. Maxwell Equations. EMW Publishing, 2002
6. K.C.Gupta, Ramesh Garg, Inder Bahl, Prakash Bhartia. Microstrip Lines and Slotlines (Second edition). Artech House, Inc, 1996
7. Nigel J Cronin. Microwave and optical waveguides. Institute of physics publishing, 1995
8. Cotter W. Sayre. Complete Wireless Design. McGraw – Hill Teleccom, 2001
9. Reinhold Ludwig, Pavel Bretchko. RF Circuit Design Theory and Applications. Pearson Education, 2000
10. K. C Gupta, Ramesh Grrg, Rakesh Chadha. Computer Aided Design of Microwave Circuits. Artech House, Inc. 1981
11. T Itoh. Numerical techniques for microwave and millimeter wave passive structures. John Wiley & Sons, 1989
12. Bhag Singh Guru, Hüsoyin R: Hiziloğlu. Electromagnetic Field Theory Fundamentals. PWS publishing Company, 1998
13. Robert E Collin, Francis J Zucker. Antenna theory. McGraw-Hill, 1969
14. Rajiv Ramaswami, Kumar N Sivarajan. Optical networks: A practical perspective. Morgan Kaufmann publishers Inc, 1998
15. Norio Kashima. Passive optical components for optical fiber transmission. Artech House, 1995

中文版

1. 陈抗生. 应用电磁学. 杭州：浙江大学出版社，2001

2. 陈抗生. 微波与光导波技术教程. 杭州：浙江大学出版社，2000
3. 陈抗生，郑国武. 波导系统的等效网络分析. 北京：电子工业出版社，1994
4. 廖承恩. 微波技术基础. 北京：国防工业出版社，1984
5. 应嘉年，顾茂章，张克潜. 微波与光导波技术. 北京：国防工业出版社，1994
6. 张明德，孙小菡. 光纤通信原理与系统. 南京：东南大学出版社，1996
7. 高本庆. 时域有限差分法. 北京：国防工业出版社，1995
8. 张克潜，李德杰. 微波与光电子学中的电磁理论(第二版). 北京：电子工业出版社，2001
9. 水启刚. 微波与光导波技术. 杭州：浙江大学出版社，1996
10. 牛中奇，朱满座，卢智远，路宏敏. 电磁场理论基础. 北京：电子工业出版社，2001
11. 王增和，王培章，卢春兰. 电磁场与电磁波. 北京：电子工业出版社，2001
12. 刘学观，郭辉萍. 微波技术与天线. 西安：西安电子科技大学出版社，2001
13. 苗敬峰. 毫米波电路. 南京：东南大学出版社，1988
14. I.J. 鲍尔. 微带天线，P. 布哈蒂亚著，梁联卓、寇廷耀译，北京：电子工业出版社，1984
15. G.R. 福尔斯著，陈时胜、林礼煌译，现代光学导论. 上海：上海科学技术出版社，1975
16. 楼仁海，符果行，袁敬闳. 电磁理论. 成都：电子科技大学出版社，1996
17. 叶培大，吴彝尊. 光波导技术基本理论. 北京：人民邮电出版社，1981
18. 高建平、张芝贤. 电波传播. 西安：西北工业大学出版社，2002
19. 冯恩信. 电磁场与波. 西安：西安交通大学出版社，1999
20. 龚中麟，徐承和. 近代电磁理论. 北京：北京大学出版社，1990
21. 葛德彪，闫玉波. 电磁波时域有限差分法. 西安：西安电子科技大学出版社，2002
22. 谢处方，饶克谨. 电磁场与电磁波(第三版). 北京：高等教育出版社，2002

附录1：坐标与算符∇

	直角坐标系 x, y, z	柱坐标系 ρ, φ, z	球坐标系 r, θ, φ
单位长度	$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$	$\mathrm{d}\rho, \rho\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}z$	$\mathrm{d}r, r\mathrm{d}\theta, r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$
$\nabla \Phi$	$\boldsymbol{x}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \boldsymbol{y}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \boldsymbol{z}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	$\boldsymbol{\rho}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \boldsymbol{z}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	$\boldsymbol{r}_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \boldsymbol{\theta}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$
$\nabla^2 \Phi$	$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$
$\nabla \cdot A$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$
$\nabla \times A$	$\boldsymbol{x}_0\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{y}_0\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{z}_0\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$	$\boldsymbol{\rho}_0\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \boldsymbol{\varphi}_0\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) + \boldsymbol{z}_0\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)$	$\boldsymbol{r}_0 \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right] + \boldsymbol{\theta}_0 \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)\right] + \boldsymbol{\varphi}_0 \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]$

附录 2：矢量运算恒等关系

$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$

$\nabla(\Phi_1\Phi_2)=\Phi_1\nabla\Phi_2+\Phi_2\nabla\Phi_1$

$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi+\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

$\nabla\times(\Phi\boldsymbol{A})=\nabla\Phi\times\boldsymbol{A}+\Phi\nabla\times\boldsymbol{A}$

$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$

$\nabla\times\nabla\Phi=0$

$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$

散度定理：$\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\mathrm{d}V=\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

斯托克斯定理：$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\oint_c\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

附录 3：贝塞尔函数与三角函数、指数函数

对贝塞尔函数的理解最好跟正弦、余弦函数以及指数函数对比起来，因为正弦、余弦函数、指数函数我们都很熟悉。

贝塞尔函数	正弦、余弦函数、指数函数
第 n 阶贝塞尔方程 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\lambda^2 x^2 - n^2) y = 0$	正弦、余弦函数、指数函数满足的微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda^2 y = 0$
(i) $\lambda^2 > 0$，λ 是实数，n 为整数 用级数方法求解贝塞尔方程 得到两个独立的解： $J_n(\lambda x)$——第 n 阶第一类贝塞尔函数 $Y_n(\lambda x)$——第 n 阶第二类贝塞尔函数	(i) $\lambda^2 > 0$，λ 是实数 用级数方法求解上面的微分方程 得到两个独立的解： $\sin(\lambda x)$——正弦函数 $\cos(\lambda x)$——余弦函数
$J_n(\lambda x)$ $Y_n(\lambda x)$ x	$\sin(\lambda x)$ $\cos(\lambda x)$ x
比较 $J_n(\lambda x)$、$Y_n(\lambda x)$ 与 $\sin(\lambda x)$、$\cos(\lambda x)$ 确有相似之处	
(ii) $\lambda^2 < 0$，λ 是虚数 设 $\lambda = j\gamma$ 微分方程成为 $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\gamma^2 x^2 + n^2) y = 0$ 用级数方法求解得到两个独立的解 $I_n(\gamma x)$——第 n 阶第一类修正贝塞尔函数 $K_n(\gamma x)$——第 n 阶第二类修正贝塞尔函数	(ii) $\lambda^2 < 0$，λ 是虚数 设 $\lambda = j\gamma$ 微分方程成为 $\frac{d^2 y}{dx^2} - \gamma^2 y = 0$ 用级数方法求解得到两个独立的指数函数解

续表

贝塞尔函数	正弦、余弦函数、指数函数
$I_n(\gamma x)$ —— ; $K_n(\gamma x)$ - - - ; x	$\exp(\gamma x)$ —— ; $\exp(-\gamma x)$ - - - ; x
比较 $I_n(\gamma x)$、$K_n(\gamma x)$ 与 $\exp(\gamma x)$、$\exp(-\gamma x)$ 确有相似之处	

附录4：材 料 常 数

以下介质材料的常数与商用材料可能有一些差别。

表 4.1　微波或更低频率介质的相对介电系数 ε_r

材　　料	相对介电系数 ε_r
PTFE	2.1
Paraffin（石蜡）	2.1
Polyethylene（聚乙烯）	2.25
Polypropylene（聚丙烯）	2.5
Polystryrene（光泽塑料）	2.7
Wood（木材）	2 to 4
Paper（纸）	3
Rubber（橡皮）	3
Snow（dry）[雪（干）]	3.3
Nylon（尼龙）	3.5
Glass（玻璃）	4
Ice（pure）[冰（纯）]	4
Quartz（石英）	5
Sodium chloride（氯化钠）	5.7
Alumina [氧化铝（礬土）]	10
Silicon（硅）	12
Germanium（锗）	16
Diamond（金刚石）	16
Ethyl alcohol 乙醇	25
Water（pure）[水（纯）]	80
Titanium dioxide（二氧化钛）	100
Barium titanate（钛酸钡）	1 200

表 4.2　光波段常用材料折射率 *n*

介　　质	折射率 *n*
Hydrogen（氢）	1.000 132
Air（空气）	1.000 293
Carbon dioxide（二氧化碳）	1.000 45
Water（pure）（纯净水）	1.333
Ethyl alcohol（乙醇）	1.361
Glass（玻璃）	1.4 to 1.8
Fused silica（熔融石英）	1.46
Vitreous quartz（透明石英）	1.45
Crystal quartz（石英晶体）	1.55
Dense flint（致密燧石）	1.75
Sodium chloride（氯化钠）	1.50
Diamond（金刚石）	2.42

表 4.3　材料的相对磁导率 μ_r

材　　料	相对磁导率 μ_r
Copper，aluminium Plastics，wood（铜，铝，塑料，木材）	1.0
Nickel（镍）	50
Cast iron（生铁）	60
Cobalt（钴）	60
Steel（钢）	300
Ferrite（typical）（铁氧体）	1 000
Iron（transformer）（变压器用铁芯）	3 000
Iron（pure）（纯铁）	4 000
Mumetal（导磁合金或 μ 合金）	20 000

表 4.4　材料的电导率 σ　（S/m）

材　　料	相对电导率 σ
Silver（银）	6.17×10^7
Copper（铜）	5.80×10^7
Gold（金）	4.10×10^7
Aluminium（铝）	3.82×10^7
Brass（黄铜）	1.50×10^7
Nickel（铁）	1.15×10^7
Bronze（青铜）	1.10×10^7
Carbon steel（碳钢）	6×10^6
Lead（铅）	4.6×10^6
Germanium（pure）[锗（纯）]	2.2×10^6
Stainless steel（不锈钢）	1.1×10^6
Mercury（水银）	1×10^6
Cast iron（粗铁）	1×10^6
Graphite（石墨）	7×10^4
Carbon（碳）	3×10^4
Silicon（pure）[硅（纯）]	1.2×10^3
Ferrite（typical）（铁氧体）	100
Water（sea）（海水）	4
Water（pure）[水（纯净）]	10^{-4}
Granite（花岗岩）	10^{-6}
Bakelite（酚醛塑胶）	10^{-9}
Polystyrene（光泽塑胶）	10^{-16}
Quartz（石英）	10^{-17}